OPUSCOLI
MATEMATICI
E
FISICI

DI

DIVERSI AUTORI

TOMO PRIMO

MILANO
PRESSO PAOLO EMILIO GIUSTI
1832.

PREFAZIONE

Due difetti si debbono egualmente evitare nello studio delle scienze fisiche e matematiche. Vi sono taluni i quali pongono ogni cura nella parte pratica di esse, e formandosi un' idea troppo ristretta della loro utilità, rifuggono da ogni ricerca che non si presti ad una immediata applicazione. Si veggono costoro affaccendati nel raccogliere risultamenti di sperienze e di osservazioni, e nel discutere in essi l'esattezza delle ultime decimali con una pazienza che resiste ad ogni fatica, senza che poi si prendano molto pensiero di sollevarsi alla contemplazione delle leggi ammirabili che regnano sopra quei numeri e ne stabiliscono i rapporti e le grandezze. A questi deve dirsi: Prezioso è il vostro studio quando congiungasi col teorico, perchè l'uno perfeziona l'altro trovando i valori di quelle quantità costanti ch'esso lascia indeterminate; ma il primo disgiunto dal secondo è veramente un corpo senz'anima. Lodevole è colui che raduna con intelligenza le espressioni di molti fatti all'oggetto di indagare le formole matematiche dal cui sublime magistero quelle dipendono: ma chi giunge al ritrovamento di quest'ultime ha tanto maggior diritto alla nostra gratitudine ed ai nostri encomii, quanto n'ebbe Keplero più di Ticone.

Havvi però un altro difetto verso il quale sembra che nel nostro secolo siavi una tendenza, forse pel motivo che nel passato alcuni dotti inchinavano nell'opposto, ed è quello di abbondare in calcoli ed in teoriche di cui può temersi che abbiano a restare lungo tempo in una sterile astrazione e generalizzazione, teoriche che, parlando di fisica matematica, sono talvolta fondate sopra ipotesi non troppo assicurate. A chi si conduce in tale maniera converrà tenere un altro linguaggio: principj certi, metodi a tutta prova, verità che ritornano sempre le stesse dopo svariati processi analitici, dopo la considerazione di fenomeni molteplici: ecco la scienza che abbiamo ereditata da'nostri maggiori, la sola scienza che passerà alle più tarde età per onore dell'umano ingegno, per conforto dell'umana vita.

Le quali cose scrivendo noi non vorremmo che in troppo rigido significato fossero intese le nostre parole, come se biasimassimo senza

distinzione tutte quelle ricerche dei moderni di cui per avventura non si scorgesse subito un'utile applicazione. Sappiamo di varie dottrine credute sul principio infeconde di conseguenze, che nel progresso riuscirono ad ottimo fine: sappiamo di alcune ipotesi, che rinfrancate successivamente dalla costante corrispondenza dei fatti, passarono ad accrescere il numero delle cognizioni certe: sappiamo in fine che lo spirito avendo anch'esso i suoi bisogni, sarebbe irragionevole il chiudergli la fonte di quel diletto che talora prova vivissimo nella contemplazione di verità anche puramente astratte; chè a torto, per recare un esempio, si toglierebbe da un libro d'analisi l'elegantissima formola di Wallis esprimente il rapporto del diametro alla circonferenza per mezzo di prodotti infiniti dietro il solo motivo ch'essa non è poi la più opportuna a calcolarne prontamente il valore approssimato. Di questa libertà che vorremmo lasciare ai geometri noi non riproviamo l'uso ma l'abuso; e perchè non si incorra nel secondo crediamo conveniente ricordare agli studiosi il pericolo di disperdere le forze della mente in ciò che meno importa, e il dovere di consacrarsi di preferenza alla ricerca ed alla meditazione di quelle verità che formano quanto v'è di più sodo nella scienza.

Il numero di sifatte verità, di cui sempre si mantiene la memoria in mezzo alle umane vicissitudini, non è troppo grande: esso si accresce ma lentamente, essendo pochi gli uomini privilegiati ai quali è dato di aggiungervi le loro scoperte. Di qui la ragione per cui naturalmente si diffida sulle prime dell'eccellenza intrinseca di quelle produzioni che escono alla luce con facilità ed in gran copia. Ma non per questo vogliamo noi sentenziare in maniera precipitata sui lavori de' moderni; protestiamo di nutrire un'alta opinione intorno il sapere di alcuni geometri viventi, e di riconoscere in taluno di essi quella potenza intellettuale che allarga i confini delle scienze. S'inganna chi crede l'umana natura esaurita negli uomini sommi che ci precedettero, talchè a noi null'altro rimanga che studiare e quasi idolatrare le opere loro. No: se ricomparissero fra noi, ammirerebbero essi pure i perfezionamenti e le aggiunte fatte ai loro insegnamenti, nè sdegnerebbero di rendersi per qualche poco discepoli di quelli ai quali furono maestri. Nelle scienze severe sempre si progredisce e si sale, nè il cammino è come in altro genere di studi, ove quando giungesi a certe sommità il passar oltre è discendere.

Se non vogliamo di subito arrischiare sulle produzioni de' moderni un giudizio il quale riescirà difficile anche a chi verrà dopo molti anni a correre il nostro arringo, non possiamo però ommettere una osservazione che non ne tocca la sostanza, e che ci è necessaria per ciò che or ora diremo. I grandi Geometri del passato secolo lavoravano le opere loro in quella guisa che il celebre Sanzio i suoi dipinti; ponendo cioè il primo e massimo pregio nell'invenzione ma non trascurando di scendere a trattare con amore i più minuti particolari: nè la fecondità in taluno quasi prodigiosa faceva danno a questa regola, come il lettore dovrà convenirne rammentando anche solamente le opere d'Eulero. Che lo stesso possa dirsi di varie recenti scritture, non dissimuliamo di sentirne dubbio: al qual dubbio un altro poi se ne aggiunge anche più spiacevole, quello cioè che la minore attenzione ad un'arte, la quale fa amare la scienza e diminuisce la difficoltà del suo acquisto, abbia a scemare il numero de' suoi cultori. Se però ci venisse fatto d'incontrarci in uno di que' pusillanimi, che sconfortato dalla quasi impossibilità di percorrere tanti libri e tante memorie di fresca data relative alle scienze esatte, fosse sul pensiero di voltare strada, gli vorremmo fare coraggio col dirgli essere l'esperimento meno assai malagevole di quanto può sembrare a prima vista, giacchè superati di tratto in tratto certi punti principali, tutto il resto non ha più nulla che possa arrestare. Anche sul conto delle materie gli diremmo che queste sono spesse volte ripetute in più luoghi: che alcune dottrine vestite di un aspetto di novità si trovano in parte fra le già conosciute: che varie indagini particolari possono oltrepassarsi quando si è in possesso di metodi generali: che non a molto si riduce la sostanza di ciò che ciascuno scritto aggiunge al deposito delle cognizioni antecedenti, risolvendosi il rimanente in contorni ed accompagnamenti: e queste ed altre cose suggerendogli ci lusingheremmo di vedere di nuovo erigersi le sue speranze.

Abbiamo finora cercato di dare in succinto qualche idea intorno lo stato delle scienze fisiche e matematiche ai nostri giorni con quella schiettezza che non prendendo di mira l'uno o l'altro autore considera le loro produzioni complessivamente. Se tali nozioni non sono false, quali saranno gli scrittori che oggidì possano appellarsi veramente benemeriti della scienza? Al certo prima d'altri coloro che

si affaticano per aumentare con trovati nuovi e originali le cognizioni di non dubbia importanza. Poi anche quelli che si propongono di far note ai loro connazionali le recenti teoriche di cui la scienza si arricchì per altrui mezzo, sceverandole da ciò che è di minore interesse, ordinandole e incorporandole a quelle che per sistema d'istruzione sono alla portata di molti, dilucidandone alcune parti, supplendo alcune dimostrazioni, esponendole con metodo. Finalmente anche coloro che non giungendo a nulla migliorare nelle produzioni degli altri si limitano a darne compendiosa ed esatta notizia, e così risparmiano la fatica di andar frugando nei vari giornali e nelle raccolte accademiche a que' molti che si accontentano di tali informazioni.

Gli scrittori degli opuscoli che ora cominciano ad uscire in luce, e proseguiranno se il pubblico vorrà loro prestare grata accoglienza, sono lontani dal credersi da tanto di conseguire tutti e tre i fini sopra indicati. Faranno essi però tutto che possono per tale conseguimento: chè non solo merita lode quegli che arriva alla meta, ma anche colui che scorgendola da lungi si affanna con ogni sua possa per avvicinarvisi. Però i fascicoli di quest'opera, che si succederanno a non lungo intervallo, presenteranno due parti, nella prima delle quali si daranno scritti originali cercando che siano di argomenti interessanti ed al livello dello stato attuale della scienza: nella seconda poi avranno luogo compendj, discussioni, notizie dirette all'intento di divulgare fra noi le utili cognizioni da qualunque luogo ci vengano. Entrambe queste parti saranno limitate a quanto è proprio della matematica pura ed applicata, e della fisica principalmente congiunta colle matematiche; essendo questo campo anche troppo vasto senza che vi sia bisogno di estenderlo a comprendervi le scienze affini.

Pertanto l'oggetto di quest'opera è manifesto: essa tende a infervorare fra di noi lo studio di scienze nobili e ben degne di occupare gl'ingegni italiani, i quali posti fra la vivacità francese e la gravità alemanna sembrano i più atti a coltivarle con successo.

PARTE PRIMA



SULLE FIGURE ISOPERIMETRE

ESISTENTI IN QUALSIVOGLIA SUPERFICIE

MEMORIA

DI ANTONIO BORDONI

Quantunque lo scopo principale, che ho di mira in questa breve memoria, sia la contemplazione delle linee costituenti i contorni delle figure della massima o minima area fra le isoperimetre esistenti in una superficie *qualsivoglia*, non ostante, in essa espongo e dimostro anco, col metodo delle derivate, proposizioni relative alle superficie sviluppabili, che occorrono nella dimostrazione di nna singolare proprietà delle linee medesime; anzi do principio ad essa coll' esporre alcune considerazioni generali, che sono necessarie od almeno utili per la facile ed esatta intelligenza di alcuni passi di essa medesima.

Si abbiano le due equazioni

$$(1) \cdots y\,a(t) = x\,b(t) + A(t), \quad z\,a(t) = x\,c(t) + B(t)$$

fra le x, y, z coordinate rettangole e la t quantità indeterminata: per ogni valore individuato della t, le x, y, z saranno coordinate dei punti di una linea retta, la quale varierà, variando la t stessa; ed ammesso la t quantità da eliminarsi, le medesime x, y, z saranno in vece le coordinate dei punti della superficie luogo di tutte le rette corrispondenti agli infiniti valori dei quali è suscettibile la medesima quantità t.

Per la origine delle coordinate si immagini la retta parallela a quella rappresentata colle due equazioni

$$y\,a(n) = x\,b(n) + A(n), \quad z\,a(n) = x\,c(n) + B(n),$$

ove n esprime un valore individuato della t; ed essa si mova senza cessare di passare per l' origine e di mantenersi parallela alle successive rette rappresentate colle equazioni, che risultano col porre nelle (1) in luogo della quantità t tutti i suoi valori successivi all' n; e continui, finchè cada nella rappresentata colle due equazioni

$$y\,a(t) = x\,b(t), \quad z\,a(t) = x\,c(t),$$

cioè finchè sia parallela alla stessa rappresentata colle (1).

Evidentemente, le successive deviazioni di questa retta saranno le stesse deviazioni delle anzidette sue parallele; ed essa genererà una porzione della superficie conica, le coordinate della quale sono le x, y, z, che entrano nelle equazioni

$$y\,a(t) = x\,b(t),\ z\,a(t) = x\,c(t),$$

ritenuta la t quantità da eliminarsi.

Questa porzione di superficie conica suppongasi distesa in un piano, e l' angolo compreso dalle due rette, nelle quali cadono i suoi estremi, si denomini ξ: quest' angolo ξ si chiamerà *complesso* delle successive deviazioni delle rette appartenenti alla famiglia rappresentata colle due equazioni (1).

L' arco circolare, misura dell' angolo ξ, e propriamente l' angolo stesso, è evidentemente la curva comune alla porzione anzidetta di superficie conica ed alla sferica avente il centro nella origine delle coordinate ed il raggio eguale alla *unità*; e però ξ' derivata di esso sarà la

$$\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)},$$

purchè le x, y, z siano desunte dalle equazioni seguenti

$$y\,a(t) = x\,b(t),\ \ z\,a(t) = x\,c(t),$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1;$$

ma queste equazioni ammesso $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, danno $x = a$, $y = b$, $z = c$; adunque sarà

$$\xi'^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2.$$

Vale a dire, il quadrato della derivata del complesso delle successive deviazioni delle rette appartenenti alla famiglia rappresentata colle equazioni (1) eguaglia la somma dei quadrati delle derivate delle quantità a, b, c, le quali sono evidentemente i *coseni* degli angoli fatti cogli assi delle coordinate dalla retta rappresentata colle medesime equazioni (1).

Quando le rette rappresentate colle equazioni (1) siano tangenti di una curva, le successive deviazioni di esse si chiamano angoli di contingenza di *prima specie* della curva stessa; e quando siano perpendicolari ai piani osculatori della curva, le medesime successive deviazioni di esse chiamansi angoli di contingenza di *seconda specie* della curva stessa, e sono in sostanza le successive deviazioni *diedre* degli stessi piani osculatori.

Osservazione. Nella superficie luogo di tutte le rette rappresentate colle equazioni (1) vi è una linea, ogni punto della quale, è quello di una delle medesime rette, vicino, più di qualunque altro di essa, alla prossima di esse medesime; e dessa è interessante per una tale superficie, come per una superficie sviluppabile lo è il suo spigolo di regresso; e però credo bene di indicare, come si possa essa determinare.

Evidentemente, per questa linea, dev'essere *minima* la quantità $\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)}$ e le x', y', z' insieme alle x, y, z soddisfare le quattro equazioni

$$ay - bx - A = 0, \quad ya' - xb' - A' + ay' - bx' = 0,$$
$$az - cx - B = 0, \quad za' - xc' - B' + az' - cx' = 0,$$

ove le derivate indicate sono tutte rispetto alla t; e però per essa avransi anco le due seguenti

$$ax' + by' + cz' = 0, \quad a'x' + b'y' + c'z' = 0.$$

Eliminando da queste sei equazioni le cinque quantità y, z, x', y', z', ed avuto riguardo alla $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ed alla sua derivata $aa' + bb' + cc' = 0$, facilmente si trova la seguente

$$ax\xi'^2 = (Aa' - A'a)b' + (Ba' - B'a)c',$$

la quale combinata colle medesime

$$ay - bx - A = 0, \quad az - cx - B = 0$$

dà le x, y, z coordinate della linea richiesta.

« Trovare la derivata del complesso degli angoli di contingenza di prima « specie dello spigolo di regresso della superficie sviluppabile tangente una « data, qualsivoglia, lungo una curva pure data?

Sia $z = F(x, y)$ la equazione fra le x, y, z coordinate rettangole della superficie qualsivoglia data, ed $y = f(x)$ l'analoga di una projezione della curva lungo la quale questa superficie è toccata dalla sviluppabile.

Si denominino t, u i valori delle derivate parziali $\left(\frac{dF(x,y)}{dx}\right)$, $\left(\frac{dF(x,y)}{dy}\right)$ corrispondenti alla $y = f(x)$, e t', u'; t'', u'' le derivate prime e seconde *totali* prese rispetto alla x contenuta in questi medesimi valori; e Δ' la derivata richiesta.

Essendo $R - z = (P - x)t + (Q - y)u$,
$0 = (P - x)t' + (Q - y)u'$

le equazioni fra le P, Q, R coordinate rettangole della retta caratteristica della superficie sviluppabile, i coseni degli angoli fatti da essa cogli assi delle coordinate risultano

$$\frac{u'}{\mu}, \; -\frac{t'}{\mu}, \; \frac{\alpha}{\mu}, \text{ dove } \alpha = tu' - ut', \text{ e } \mu = \sqrt{(t'^2 + u'^2 + \alpha^2)};$$

e però, per l'esposto superiormente, sarà

$$\Delta'^2 = \left(\frac{u'}{\mu}\right)'^2 + \left(\frac{t'}{\mu}\right)'^2 + \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)'^2$$

ossia $\mu^4\Delta'^2 = (u''^2 + t''^2 + \alpha'^2)\mu^2 - \mu^2\mu'^2$, ed anco

$$\mu^4\Delta'^2 = (t'u'' - t''u')^2 + (t'\alpha' - t''\alpha)^2 + (u'\alpha' - u''\alpha)^2.$$

Ma $t'\alpha' - t''\alpha = t(t'u'' - t''u')$, $u'\alpha' - u''\alpha = u(t'u'' - t''u')$; adunque sarà

$\mu^4\Delta'^2 = (1 + t^2 + u^2)(t'u'' - t''u')^2$, e conseguentemente

$$\Delta' = \frac{\beta}{\mu^2}(t'u'' - t''u'):$$

la β è posta per $\sqrt{(1 + t^2 + u^2)}$.

Osservazione. Sebbene la derivata del complesso degli angoli di contingenza di *seconda* specie dello spigolo di regresso contemplato nella proposizione qui esposta non occorra in questa memoria, nulladimeno credo bene di esporla.

La retta normale della superficie qualsivoglia, nel punto pel quale si hanno $z=F\big(x, f(x)\big)$, ed $y=f(x)$, fa cogli assi delle coordinàte angoli aventi per coseni

$$-\frac{t}{\beta},\ -\frac{u}{\beta},\ \frac{1}{\beta};$$

ed è essa perpendicolare al corrispondente piano tangente la superficie sviluppabile, il quale è lo stesso osculatore del suo spigolo di regresso; e però la derivata richiesta sarà

$$\frac{1}{\beta^2}\sqrt{\big((t\beta'-t'\beta)^2+(u\beta'-u'\beta)^2+\beta'^2\big)}\ \text{ cioè } \frac{\mu}{\beta^2}.$$

« Trovare la derivata dell' angolo compreso dalle due rette condotte dallo « stesso punto della linea di contatto tra la superficie qualsivoglia e la svilup- « pabile, l' una tangente a questa linea e l' altra caratteristica della medesima « superficie sviluppabile?

Si denomini ϕ l' angolo del quale si cerca la derivata, s l' arco corrispondente della linea di contatto fra le due superficie, ed α, μ le quantità $tu'-ut'$, $\sqrt{(t'^2+u'^2+\alpha^2)}$, ove però le derivate si intendano prese rispetto a qualsivoglia variabile.

Egli è evidente, che i coseni degli angoli fatti dalle due rette nominate cogli assi delle coordinate x, y, z sono ordinatamente

$$\frac{x'}{s'},\ \frac{u'}{\mu},\ \frac{y'}{s'},\ -\frac{t'}{\mu};\ \frac{z'}{s'},\ \frac{\alpha}{\mu};$$

e però, posto $x'=as'$, $y'=bs'$, $z'=cs'$, sarà

$$\cos.\phi=\frac{1}{\mu}(au'-bt'+c\alpha).$$

Questo valore del $\cos.\phi$ dà

$$\text{sen.}\phi=\frac{1}{\mu}\sqrt{\big(\mu^2-(au'-bt'+c\alpha)^2\big)},$$

$$\text{ossia } \text{sen.}\phi=\frac{1}{\mu}\sqrt{\big((at'+bu')^2+(a\alpha-cu')^2+(b\alpha+ct')^2\big)}$$

$$\text{cioè } \text{sen.}\phi=\frac{\beta}{\mu}(at'+bu'),$$

per essere $c=at+bu$, ed $\alpha=tu'-ut'$.

La stessa espressione del $\cos.\phi$ somministra visibilmente

$$\mu^2\phi'\cdot\text{sen.}\phi=\mu(b't'-a'u'-c'\alpha)+a(\mu'u'-\mu u'')-b(\mu't'-\mu t'')+c(\alpha\mu'-\mu\alpha'),$$

$$\text{ossia } \phi'=\frac{A}{\mu\,\text{sen.}\phi}+\frac{B}{\mu^2\text{sen.}\phi},$$

ammesso $A=b't'-a'u'-\alpha c'$,

e $B=(\mu'u'-\mu u'')a-(\mu't'-\mu t'')b+(\alpha\mu'-\mu\alpha')c$.

Sostituendo nella espressione della A in luogo della α' il suo valore

$$-\frac{b}{a}b'-\frac{c}{a}c',\ \text{si ha}\ A=\frac{b'}{a}(a t'+b u')+\frac{c'}{a}(c u'-a\alpha);$$

e da questa, ponendo in luogo delle quantità c, α le equivalenti $a t+b u$, $t u'-u t'$, si ottiene $A=\frac{1}{a}(a t'+b u')(b'+u c')$.

Così, per essere

$$\mu u''-\mu' u'=\frac{t'}{\mu}(t' u''-t'' u')+\frac{\alpha}{\mu}(\alpha u''-\alpha' u'),$$

$$\mu t''-\mu' t'=\frac{u'}{\mu}(t'' u'-t' u'')+\frac{\alpha}{\mu}(\alpha t''-\alpha' t'),$$

$$\mu \alpha'-\mu' \alpha=\frac{t'}{\mu}(\alpha' t'-\alpha t'')+\frac{u'}{\mu}(\alpha' u'-\alpha u''),$$

ed $\alpha u''-\alpha' u'=u(t' u''-t'' u')$, $\alpha t''-\alpha' t'=t(t'' u'-t' u'')$,

$\alpha' t'-\alpha t''=t(t' u''-t'' u')$, $\alpha' u'-\alpha u''=u(t' u''-t'' u')$,

e però $\mu u''-\mu' u'=\frac{1}{\mu}(t'-u\alpha)(u'' t'-u' t'')$,

$$\mu t''-\mu' t'=\frac{1}{\mu}(u'+t\alpha)(u' t''-u'' t'),$$

$$\mu \alpha'-\mu' \alpha=\frac{1}{\mu}(t t'+u u')(t' u''-t'' u'),$$

la espressione della B equivale evidentemente alla

$\frac{1}{\mu}\Big(a(t'-\alpha u')+b(u'+\alpha t)+c(t t'+u u')\Big)(u' t''-u'' t')$; e per tanto sarà

$$B=\frac{\beta}{\mu}(a t'+b u')(t' u''-t'' u'),$$

giacchè è $\alpha=t u'-u t'$, e $c=a t+b u$.

I valori di sen. ϕ, A, B trovati danno

$$A:\mu\,\text{sen.}\,\phi=(b'+u c'):a\beta,$$

$$B:\mu^2\text{sen.}\,\phi=\beta(t'' u'-t' u''):\mu^2=-\Delta';$$

quindi avrassi $\phi'=\frac{1}{a\beta}(b'+u c')-\Delta'$,

cioè la derivata richiesta $\phi'=\frac{s'}{\beta x'}\left(\left(\frac{y'}{s'}\right)'+u\left(\frac{z'}{s'}\right)'\right)-\Delta'$.

« Trovare la derivata del complesso degli angoli di contingenza di quella
« curva *piana*, nella quale si trasfigura la linea di contatto tra la superficie
« qualsivoglia e la sviluppabile, quando questa sia distesa in un piano?

La derivata richiesta si chiami ψ'.

Nel piano, ove sia distesa la superficie sviluppabile, si immaginino le due linee a seconda delle quali si dispongono la curva di contatto e lo spigolo di regresso, ed anco le due rette secondo le quali si dispongono la tangente e la caratteristica contemplate nella proposizione antecedente: evidentemente queste due rette saranno tangenti le due prime linee, e comprenderanno anch'esse l'angolo ϕ, ed il complesso degli angoli di contingenza della seconda di queste linee sarà lo stesso Δ considerato nella proposizione prima. Ma la retta tangente di una linea piana, nel punto ove è questa incontrata dalla tangente di un'altra linea piana, fa con quest'altra un angolo, la cui derivata aggiunta a quella del complesso degli angoli di contingenza della seconda linea eguaglia la derivata del complesso degli angoli di contingenza della prima; adunque sarà

$$\psi'=\phi'+\Delta',\ \text{e per tanto}\ \psi'=\frac{s'}{\beta x'}\left(\left(\frac{y'}{s'}\right)'+u\left(\frac{z'}{s'}\right)'\right),\ \text{ed anco}$$

$$\psi'(x)=\frac{s'}{\beta}\left(\left(\frac{y'}{s'}\right)'+u\left(\frac{z'}{s'}\right)'\right),\ \text{e}\ \psi'(s)=\frac{1}{\beta x'}(y''+uz'')$$

ove le derivate siano rispetto alla x od alla s.

Corollario. Si chiami D il raggio di curvatura corrispondente all's della linea *piana*. Essendo come è noto, $s'(x)=D\psi'(x)$, sarà $D=\beta:\left(\left(\frac{y'}{s'}\right)'+u\left(\frac{z'}{s'}\right)'\right)$.

Osservazione. Denomininsi r, v le coordinate rettangole della medesima linea piana anzidetta: evidentemente avranno luogo le due equazioni seguenti

$$s'^2=r'^2+v'^2,\ \beta:\left(\left(\frac{y'}{s'}\right)'+u\left(\frac{z'}{s'}\right)'\right)=s'^3:(v'r''-v''r'),$$

colle quali si potrà scoprire la equazione fra le r, v, quando si conoscano le due $z=F(x,y)$, $y=f(x)$; e reciprocamente, si potrà scoprire la $y=f(x)$, quando conoscasi la $z=F(x,y)$ e quella fra le coordinate r, v.

Per lo sviluppo di queste ricerche, leggansi le ultime pagine del Tomo I.° del *Trattato di calcolo differenziale ed integrale* del benemerito Lacroix.

« Trovare la sfera, che ha un contatto di second'ordine con una curva esi-
« stente in una superficie qualsivoglia ed il centro nel piano tangente la su-
« perficie medesima nello stesso suo punto di contatto colla curva? »

Si denomini R il raggio della sfera, ed A, B, C le coordinate rettangole del suo centro; e la curva sia la stessa di contatto fra la superficie qualsivoglia e la sviluppabile replicatamente contemplata.

Per il contatto di second'ordine tra la sfera e la curva si hanno le tre equazioni

$$(x-A)^2+(y-B)^2+(z-C)^2=R^2,$$
$$x-A+(y-B)y'+(z-C)z'=0,$$
$$s'^2+(y-B)y''+(z-C)z''=0,$$

ove le derivate sì delle ordinate y, z che dell'arco s sono rispetto alla x; e per

la proprietà, che il centro della sfera dev' essere un punto del piano tangente la superficie qualsivoglia, si ha anco la

$$z-C-t(x-A)-u(y-B)=0.$$

Sostituendo nella seconda e terza di queste equazioni il valore di $z-C$ dato dalla quarta, risultano le due

$$(1+tz')(x-A)+(y'+uz')(y-B)=0,$$
$$z''t(x-A)+(y''+uz'')(y-B)=-s'^2,$$

le quali danno le

$$\left(z''t(y'+uz')-(1+z't)(y''+uz'')\right)(y-B)=(1+z't)s'^2,$$
$$\left(z''t(y'+uz')-(1+z't)(y''+uz'')\right)(x-A)=-(y'+uz')s'^2,$$

ossia $(B-y)\left(\left(\frac{y'}{s'}\right)'+u\left(\frac{z'}{s'}\right)'\right)s'=1+tz'$,

e $(A-x)\left(\left(\frac{y'}{s'}\right)'+u\left(\frac{z'}{s'}\right)'\right)s'=-y'-uz'$, che riducono la quarta stessa alla

$$(C-z)\left(\left(\frac{y'}{s'}\right)'+u\left(\frac{z'}{s'}\right)'\right)s'=u-ty'.$$

E sommando fra loro i quadrati dei membri corrispondenti di queste tre equazioni ottenute, e ponendo nella risultante in luogo del trinomio $(A-x)^2+(B-y)^2+(C-z)^2$ il quadrato R^2, ottiensi la seguente

$$R^2\left(\left(\frac{y'}{s'}\right)'+u\left(\frac{z'}{s'}\right)'\right)^2 s'^2=(1+tz')^2+(y'+uz')^2+(u-ty')^2$$

ossia $R\left(\left(\frac{y'}{s'}\right)'+u\left(\frac{z'}{s'}\right)'\right)=\beta$, per essere

$$(1+tz')^2+(y'+uz')^2+(u-ty')^2=\beta^2 s'^2.$$

Quindi, per la sfera richiesta, sarà

$$R=\beta:\left(\left(\frac{y'}{s'}\right)'+u\left(\frac{z'}{s'}\right)\right),$$
$$A=x-(y'+uz'):\left(\left(\frac{y'}{s'}\right)'+u\left(\frac{z'}{s'}\right)'\right)s',$$
$$B=y+(1+tz'):\left(\left(\frac{y'}{s'}\right)'+u\left(\frac{z'}{s'}\right)'\right)s',$$
$$\text{e } C=z+(u-ty'):\left(\left(\frac{y'}{s'}\right)'+u\left(\frac{z'}{s'}\right)'\right)s'.$$

Il valore del raggio R è visibilmente lo stesso di quello del D trovato nel corollario della proposizione antecedente, come era facile a prevedersi, che ciò sarebbe accaduto.

Eccomi allo scopo principale di questa breve Memoria cioè alla contemplazione del contorno della figura dell'area massima o minima tra le isoperimetre ed

esistenti tutte in una superficie qualsivoglia: e siccome coll'unire due punti del contorno, qualsivogliono, quando sia esso continuo, od i termini di un suo lato, quando sia discontinuo, con una linea individuata esistente anch'essa nella superficie, si racchiude colla parte corrispondente del contorno medesimo una figura, che ha essa pure proprietà di massimo o minimo analoghe a quelle della figura intera; così mi limiterò alla trattazione delle proposizioni seguenti.

« Fra le linee esistenti in una data superficie ed aventi lunghezze eguali ed i « termini nei medesimi due punti, trovare quella, che insieme ad una già « individuata nella medesima superficie, racchiude la figura della massima o « minima area?

Si riferiscano i punti, le linee e la superficie a tre piani fra loro perpendicolari, uno dei quali passi pei due punti termini dati della linea richiesta; e sia $F(x, y, z) = 0$ la equazione della superficie data ed $y = f(x)$ quella di una projezione della linea pure data: e l'ordinata y sia quella perpendicolare al piano, che passa pei due punti termini comuni delle linee. Così, si denomini b la lunghezza data di questa linea ed a, c i valori della x corrispondenti ai medesimi due termini di esse.

Ora, si immagini nella superficie una qualunque di quelle linee, che passano pei due punti dati, e siano x, y, z le sue coordinate rettangole; e la lunghezza di quella sua parte, che è compresa fra questi medesimi due punti sarà

$$\int_c^a \sqrt{(1 + y'^2 + z'^2)}\, dx.$$

Similmente, l'area di quella figura, che è racchiusa con questa linea e colla data, sarà $\int_c^a dx \int^{f(x)} \sqrt{(1 + t^2 + u^2)}\, dy$.

Si supponga trovata una primitiva particolare rispetto alla y della $\sqrt{(1 + t^2 + u^2)}$, e denominisi $\xi(x, y)$; cioè sia identica l'equazione

$\xi'(y) = \sqrt{(1 + t^2 + u^2)}$; e si avrà

$$\int^{f(x)} \sqrt{(1 + t^2 + u^2)}\, dy = \xi(x, y) - \xi(x, f(x));$$

e conseguentemente la primitiva duplicata sopra esposta ridurrassi alla semplice

$$\int_c^a \Big(\xi(x, y) - \xi\big(x, f(x)\big)\Big)\, dx.$$

Si tratta adesso di trovare le funzioni della x, valori delle y, z, che hanno la proprietà di soddisfare le due equazioni

$$F(x, y, z) = 0, \quad \int_c^a \sqrt{(1 + y'^2 + z'^2)}\, dx = b,$$

e di rendere massima o minima la primitiva definita

$$\int_c^a \Big(\xi(x, y) - \xi\big(x, f(x)\big)\Big)\, dx.$$

Dalla teorica dei massimi e minimi risulta, che i valori richiesti delle y, z saranno tra quelli soddisfacenti la equazione $F(x,y,z)=0$, e la risultante della eliminazione della quantità μ dalle due seguenti

$$0=\mu F'(y)+\xi'(y)-\lambda\left(\frac{y'}{s'}\right)',$$

$$0=\mu F'(z)-\lambda\left(\frac{z'}{s'}\right)',$$

ove la λ esprime una costante arbitraria, e la s l'arco della linea richiesta.

Eliminando effettivamente la funzione μ da queste ultime due equazioni, si ottiene la $F'(z)\xi'(y)-\lambda F'(z)\left(\frac{y'}{s'}\right)'+\lambda F'(y)\left(\frac{z'}{s'}\right)'=0$,

la quale si riduce alla $\left(\frac{y'}{s'}\right)'+u\left(\frac{z'}{s'}\right)'-\frac{\beta}{\lambda}=0$,

per essere $F'(y)=-uF'(z)$, e $\sqrt{(1+t^2+u^2)}=\beta$.

Quindi la linea richiesta apparterrà alla famiglia rappresentata colle primitive complete delle due equazioni

$$F(x,y,z)=0,\ \left(\frac{y'}{s'}\right)'+u\left(\frac{z'}{s'}\right)'-\frac{\beta}{\lambda}=0;$$

e propriamente sarà quella, per la quale, la costante λ e le due portate dalla integrazione di queste equazioni saranno determinate in modo da rendere la $\int_c^a \sqrt{(1+y'^2+z'^2)}dx$ *eguale* a b, e che passi pei due punti, per i quali si hanno $x=a$, $y=f(a)$, e $z=F\big(a,f(a)\big)$; ed $x=c$, $y=f(c)$, e $z=F\big(c,f(c)\big)$.

Nell'ultima equazione esposta pongasi m in vece di $\frac{1}{\lambda}$, e sostituiscansi anco i valori delle t, u cavati dalla penultima, i quali sono $-F'(x):F'(z)$, $-F'(y):F'(z)$; e si avrà la

$$(1)\cdots F'(z)\left(\frac{y'}{s'}\right)'-F'(y)\left(\frac{z'}{s'}\right)'-m\sqrt{\big(F'(x)^2+F'(y)^2+F'(z)^2\big)}=0.$$

La superficie data sia piana anzi lo stesso piano degli assi delle x, y; e sarà $F=z$, $F'(x)=0$, $F'(y)=0$, $F'(z)=1$; e la equazione (1) ridurrassi alla $\left(\frac{y'}{s'}\right)'-m=0$ ossia $y'-(mx+A)s'=0$, ovvero $(my+B)^2+(mx+A)^2-1=0$, dove A, B esprimono le costanti introdotte dalle due integrazioni eseguite.

Questa equazione visibilmente esprime la nota proprietà cioè che la linea richiesta, in questo caso, dev'essere circolare.

In secondo luogo, sia $F=z^2+y^2+x^2-n^2=0$, vale a dire la superficie data sia la sferica di raggio n ed avente il centro nella origine delle coordinate.

Questo valore della F dà $F'(x)=2x$, $F'(y)=2y$, $F'(z)=2z$, per cui $\sqrt{\big(F'(x)^2+F'(y)^2+F'(z)^2\big)}=2n$; e però la equazione (1) somministra la

$$z\left(\frac{y'}{s'}\right)'-y\left(\frac{z'}{s'}\right)'-mn=0,\ \text{ossia}\ zy'-yz'-(mnx+A)s'=0$$

sua primitiva completa del prim' ordine, ove A indica una costante arbitraria, e la variabile principale può essere qualunque.

La superficie sferica essendo situata rispetto ai piani degli assi delle $z, x; x, y$ come lo è rispetto a quello degli assi delle y, z, avranno evidentemente luogo anco le due equazioni seguenti

$$xz' - zx' - (mny + B)s' = 0, \quad yx' - xy' - (mnz + C)s' = 0,$$

dove le B, C sono due costanti.

Moltiplicando i membri di queste tre ultime equazioni ordinatamente per x, y, z, e sommando i corrispondenti delle risultanti, si ottiene la

$$mn(x^2 + y^2 + z^2)s' + (Ax + By + Cz)s' = 0, \text{ ovvero } Ax + By + Cz + mnr^2 = 0,$$

la quale insegna, che la linea richiesta dev' essere piana e però circolare.

In terzo luogo, la superficie data sia la cilindrica, che ha le caratteristiche parallele all'asse delle ordinate y e per equazione $z - \phi(x) = 0$.

Essendo $F = z - \phi(x)$, si hanno $F'(x) = -\phi'(x)$, $F'(y) = 0$, $F'(z) = 1$; e però la equazione (1) per questo esempio sarà

$$\left(\frac{y'}{s'}\right)' - m\sqrt{(1 + \phi'^2)} = 0.$$

Chiamisi v l'arco della curva avente per equazione $z = \phi(x)$, cioè l'arco della traccia della stessa superficie cilindrica: sarà $\sqrt{(1 + \phi'^2)} = v'$; e però, la equazione trovata equivarrà alla $\left(\frac{y'}{s'}\right)' - mv' = 0$, la quale somministra la $y' - (mv + A)s' = 0$, ed anco

$$y'(v) - (mv + A)s'(v) = 0,$$

dove A esprime la costante voluta dalla integrazione eseguita.

Dalla rettificazione delle curve si ha

$$s'(v) = \sqrt{\left(x'(v)^2 + y'(v)^2 + z'(v)^2\right)}, \text{ e però sarà } s'(v) = \sqrt{\left(1 + y'(v)^2\right)},$$

giacchè $x'(v)^2 + z'(v)^2 = 1$; e per tanto, l'ultima equazione ridurrassi alla

$$y'(v) = (mv + A)\sqrt{\left(1 + y'(v)^2\right)},$$

la quale somministra evidentemente la

$$(my + B)^2 + (mv + A)^2 - 1 = 0$$

dove B esprime un'altra costante arbitraria.

Quest' ultima equazione trovata o la sua equivalente

$$(y + B\lambda)^2 + (v + A\lambda)^2 - \lambda^2 = 0$$

insegna che, la linea richiesta si trasformerà in una circonferenza o in una porzione di circonferenza, qualora la superficie cilindrica si distenda in un piano: proprietà che era facile a prevedersi, e che ha sempre luogo, quando la superficie data sia sviluppabile.

Per ultimo esempio, la superficie data sia di rotazione, ed $F = z^2 + y^2 - \phi(x)^2 = 0$ cioè l' asse delle ordinate x sia lo stesso della superficie.

Questo valore della F dà $F'(x) = -2\phi\phi'$, $F'(y) = 2y$, $F'(z) = 2z$, e però $\sqrt{\left(F'(x)^2 + F'(y)^2 + F'(z)^2\right)}$ *eguale* a $2\sqrt{(\phi^2\phi'^2 + y^2 + z^2)}$ ossia a $2\phi\sqrt{(1+\phi'^2)}$; per cui la equazione (1) somministra la seguente

$$z\left(\frac{y'}{s'}\right)' - y\left(\frac{z'}{s'}\right)' - m\phi\sqrt{(1+\phi'^2)} = 0,$$

una cui primitiva completa del primo ordine è evidentemente

$$zy' - yz' - Q\sqrt{(1+y'^2+z'^2)} = 0:$$

la Q è posta per semplicità in vece della quantità

$$m\int\phi\sqrt{(1+\phi'^2)}\,dx,$$

e contiene la costante arbitraria voluta dalla primitiva eseguita.

La equazione $z^2 + y^2 - \phi(x)^2 = 0$, fra le x, y, z coordinate della curva richiesta, somministra

$$z = \sqrt{(\phi^2 - y^2)},\ z' = \frac{1}{z}(\phi\phi' - yy');\ \text{e però sarà}$$

$$zy' - yz' = \frac{\phi}{z}(\phi y' - y\phi'),\ \text{e}$$

$$\sqrt{(1+y'^2+z'^2)} = \sqrt{\left((\phi y' - \phi' y)^2 + (\phi^2 - y^2)(1+\phi'^2)\right)} : z;$$

e per tanto l' ultima equazione trovata equivarrà alla seguente

$$\phi(\phi y' - y\phi') = Q\sqrt{\left((\phi y' - y\phi')^2 + (\phi^2 - y^2)(1+\phi'^2)\right)},$$

la quale dà

$$(\phi^2 - Q^2)(\phi y' - y\phi')^2 = Q^2(\phi^2 - y^2)(1+\phi'^2),$$

$$\text{ossia}\ \frac{\phi y' - y\phi'}{\sqrt{(\phi^2 - y^2)}} = Q\sqrt{\frac{1+\phi'^2}{\phi^2 - Q^2}};$$

e conseguentemente sarà

$$\text{Ang. sen.}\,\frac{y}{\phi} = \int\frac{Q}{\phi}\sqrt{\frac{1+\phi'^2}{\phi^2 - Q^2}}\,dx,$$

$$\text{ovvero}\ y = \phi\,\text{sen.}\int\frac{Q}{\phi}\sqrt{\frac{1+\phi'^2}{\phi^2 - Q^2}}\,dx:$$

la costante arbitraria, voluta dalla integrazione, si suppone contenuta nella primitiva tuttora indicata rispetto alla x.

Sostituendo questo valore della y nella equazione $y^2 + z^2 = \phi^2(x)$, si ha evidentemente

$$z = \phi\cos.\int\frac{Q}{\phi}\sqrt{\frac{1+\phi'^2}{\phi^2 - Q^2}}\,dx.$$

Concludiamo pertanto, che, la conoscenza della famiglia delle linee alla quale

appartiene l'attuale richiesta, è ridotta a trovare le primitive rispetto alla x delle due funzioni

$$\phi\sqrt{(1+\phi'^2)},\ \frac{Q}{\phi}\sqrt{\frac{1+\phi'^2}{\phi^2-Q^2}},$$

per cui si dà per conoseiuta.

Osservazione. Se nelle due equazioni, qui trovate, si supporrà la quantità Q costante, esse rappresenteranno evidentemente la Geodetica esistente nella superficie di rotazione avente per equazione $z^2+y^2-\phi(x)^2=0$.

« Fra le figure isoperimetre esistenti nella stessa superficie ordinaria, trovare « quella la cui area è maggiore dell'area di ogni altra di esse?

Siano $y=\phi(x,\lambda,A,B)$, $z=\psi(x,\lambda,A,B)$ le primitive complete delle equazioni

$$F(x,y,z)=0,\ \left(\frac{y'}{s'}\right)'+u\left(\frac{z'}{s'}\right)'-\frac{\beta}{\lambda}=0,$$

ove le A, B esprimono le due costanti arbitrarie introdotte dalle integrazioni.

Evidentemente il contorno della figura richiesta sarà una delle linee appartenenti alla famiglia rappresentata colle due equazioni

$$y=\phi(x,\lambda,A,B),\ z=\psi(x,\lambda,A,B);$$

e però la proposta proposizione si riduce a trovare gli opportuni valori delle costanti λ, A, B atti ad individuarla.

Si determinino le due primitive

$$\int\sqrt{\left(1+\phi'(x)^2+\psi'(x)^2\right)}\,dx,\ \iint\sqrt{(1+t^2+u^2)}\,dx\,dy$$

talmente, che la prima rappresenti l'intero contorno della figura, e la seconda l'area di essa, e rieseiranno due quantità formate colle λ, A, B: siano esse $\alpha(\lambda,A,B)$, $\vartheta(\lambda,A,B)$.

Fatto ciò, si trovino i valori delle λ, A, B, che rendono massima la funzione $\vartheta(\lambda,A,B)$ e che sono tra quelli soddisfaeenti la equazione $\alpha(\lambda,A,B)=L$, ove L esprime la lunghezza del perimetro della figura richiesta; cioè trovinsi i valori delle λ, A, B soddisfacenti quest'ultima equazione e le due seguenti

$$\vartheta'(\lambda)\,\alpha'(A)-\vartheta'(A)\,\alpha'(\lambda)=0,$$
$$\vartheta'(\lambda)\,\alpha'(B)-\vartheta'(B)\,\alpha'(\lambda)=0$$

e si pongano nelle due equazioni $y=\phi(x,\lambda,A,B)$, $z=\psi(x,\lambda,A,B)$, e si avranno le equazioni del contorno della figura richiesta e però essa medesima.

« Se la superficie sviluppabile tangente una qualsivoglia lungo una parte « continua del contorno di una figura della massima o minima area, fra le iso- « perimetre esistenti nella medesima superfieie qualsivoglia, si distenderà in un « piano, la linea di contatto si trasfigurerà in una circolare.

Si ritengano tutte le denominazioni usate nella proposizione penultima, e le coordinate della linea di contatto di cui si parla soddisfarà la equazione

$$\left(\frac{y'}{s'}\right)' + u\left(\frac{z'}{s'}\right)' - \frac{\beta}{\lambda} = 0,$$

la quale dà $\lambda = \beta : \left(\left(\frac{y'}{s'}\right)' + u\left(\frac{z'}{s'}\right)'\right)$.

Ma dal corollario della proposizione terza risulta, che il secondo membro di questa equazione cioè la quantità

$$\beta : \left(\left(\frac{y'}{s'}\right)' + u\left(\frac{z'}{s'}\right)'\right),$$

esprime il raggio di curvatura della linea, nella quale si trasforma o trasfigura quella di contatto tra la superficie qualunque e la sviluppabile, quando questa sia distesa in un piano; adunque per la linea attuale, questo raggio sarà eguale alla λ, che è quantità *costante*, e conseguentemente la linea stessa alla quale esso compete sarà circolare: come si è dichiarato nella proposta proposizione.

Osservazione I. Quando esista effettivamente la superficie rigida, nella quale dev'essere la figura della massima o minima area fra le isoperimetre, ogni parte del contorno di questa figura analoga alla considerata in queste ultime tre proposizioni, si potrà tracciare sulla medesima superficie con facilità; giacchè, determinate, come si è detto nelle due proposizioni antecedenti, la costante λ e le funzioni della x valori individuati delle y, z, e descritto in un piano un arco, o circonferenza, di raggio eguale a λ e di lunghezza b, basterà adattare il medesimo alla superficie rigida col metodo usato in altre analoghe circostanze, avuto riguardo che la retta tangente ad esso nel suo principio coincida colla toccante la curva richiesta, che è determinata coi valori delle $y'(x)$, $z'(x)$ corrispondenti alla $x = a$ ovvero alla $x = c$, e che dirigasi convenientemente, onde l'altro termine di esso cada nel punto altro dei due dati nella superficie qualunque.

Osservazione II. Tutte le sfere, che hanno un contatto di secondo ordine colla linea considerata in queste ultime tre proposizioni ed i centri nei piani tangenti la superficie qualsivoglia nei medesimi punti di contatto di esse, saranno *tutte tra loro eguali*: ciò discende evidentemente dalle due proposizioni, che precedono le due antecedenti, combinate fra loro.

Finalmente osservisi, che, le proprietà esposte per la figura della massima area fra le isoperimetre esistenti in qualunque superficie, si estendono evidentemente a quella del minimo contorno fra le aventi aree fra loro eguali.

NOTA

SOPRA UNA TRASFORMAZIONE DELLA PRIMITIVA TRIPLICATA FONDAMENTALE PER LA STEREOMETRIA.

Si denominino x, y z, le coordinate rettangole di un punto qualunque di una superficie data, λ la lunghezza di una retta tirata da questo punto, ed a, b, c i coseni degli angoli fatti da essa cogli assi delle x, y, z; e le λ, a, b, c siano funzioni date delle x, y.

Evidentemente, eliminando le x, y dalle tre equazioni

$$P = x + a\lambda, \quad Q = y + b\lambda, \quad R = z + \lambda c$$

combinate con quella della superficie data, si avrebbe quella fra le P, Q, R coordinate rettangole della superficie luogo degli altri termini delle rette λ; ed eliminando λ, si hanno visibilmente le due seguenti

$$bP - aQ = bx - ay, \quad bR - cQ = bz - cy,$$

fra le P, Q, R coordinate rettangole di un punto qualsivoglia di quella retta della quale è parte la λ stessa.

Così si denominino p, q, r le coordinate rettangole di quel punto della retta λ, che ha dalla superficie data la distanza t; e V il volume del corpo compreso fra le due superficie, nelle quali vi sono i termini delle rette λ e la porzione intercetta tra queste medesime due di una qualunque di quelle altre superficie, che sono generabili da rette a seconda delle quali cadano delle λ particolari.

Essendo $V = \iiint dp\,dq\,dr$,

purchè le primitive parziali siano convenientemente estese, e

$$p = x + at, \quad q = y + bt, \quad r = z + ct,$$

dove le x, y, t sono tre variabili indipendenti l'una dall'altra, il volume stesso V sarà eguale anco alla primitiva

$$\iiint \left\{ \begin{array}{l} \quad p'(t)\big(q'(x)r'(y) - q'(y)r'(x)\big) \\ + q'(t)\big(p'(y)r'(x) - p'(x)r'(y)\big) \\ + r'(t)\big(p'(x)q'(y) - p'(y)q'(x)\big) \end{array} \right\} dx\,dy\,dt,$$

purchè i suoi limiti siano i medesimi della antecedente.

I valori delle p, q, r dianzi esposti danno

$$\begin{array}{lll} p'(x) = 1 + ta', & p'(y) = ta_{,}, & p'(t) = a, \\ q'(x) = tb', & q'(y) = 1 + tb_{,}, & q'(t) = b, \\ r'(x) = tc' + z', & r'(y) = tc_{,} + z_{,}, & r'(t) = c, \end{array}$$

dove le derivate z', a', b', c' sono rispetto alla x, e le $z_{,}$, $a_{,}$, $b_{,}$, $c_{,}$ rispetto alla y, le quali somministrano

$$p'(t)\big(q'(x)r'(y) - q'(y)r'(x)\big) = a\big(-z' + (b'z_{,} - b_{,}z' - c')t + (b'c_{,} - b_{,}c')t^2\big),$$
$$q'(t)\big(p'(y)r'(x) - p'(x)r'(y)\big) = b\big(-z_{,} + (a_{,}z' - a'z_{,} - c_{,})t + (a_{,}c' - a'c_{,})t^2\big),$$
$$r'(t)\big(p'(x)q'(y) - p'(y)q'(x)\big) = c\big(1 + (a' + b_{,})t + (a'b_{,} - a_{,}b')t^2\big);$$

e però il sestinomio sotto la primitiva ultima esposta sarà

$$A + Bt + Ct^2,$$

ammesso $A = c - az' - bz_i$,

$$B = cd' - ac' + cb_i - bc_i + (ab' - a'b)z_i + (ba_i - b_i a)z',$$

e $C = a(b'c_i - b_i c') + b(a_i c' - a'c_i) + c(a'b_i - a_i b')$.

Ma insieme alla equazione nota $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ sussistono le due

$$aa' + bb' + cc' = 0, \quad aa_i + bb_i + cc_i = 0,$$

le quali, combinate opportunamente colla prima, danno le

$$b(a'b - ab') + c(ca' - ac') = a', \quad a(ab_i - ba_i) + c(cb_i - bc_i) = b_i,$$

$$\text{cioè } ca' - ac' = \frac{a'}{c} + \frac{b}{c}(ab' - ba'),$$

$$cb_i - bc_i = \frac{b_i}{c} + \frac{a}{c}(ba_i - ab_i);$$

e combinate fra loro somministrano le due

$$b(a_i b' - a'b_i) + c(a_i c' - a'c_i) = 0, \quad a(a'b_i - a_i b') + c(c'b_i - b'c_i) = 0,$$

$$\text{cioè } a_i c' - a'c_i = \frac{b}{c}(a'b_i - b'a_i), \quad b'c_i - c'b_i = \frac{a}{c}(a'b_i - b'a_i);$$

adunque sarà $B = \frac{1}{c}\left(a' + b_i + (ab' - a'b)(b + cz_i) + (ba_i - ab_i)(a + cz')\right)$,

e $C = \frac{1}{c}(a'b_i - b'a_i)$.

Della primitiva triplicata

$$\iiint (A + Bt + Ct^2)\,dx\,dy\,dt,$$

eseguendo la parziale rispetto alla variabile t, ed estendendola dalla $t = 0$ alla $t = \lambda$, si ottiene la seguente

$$\iint \left(A\lambda + \frac{1}{2}B\lambda^2 + \frac{1}{3}C\lambda^3\right)dx\,dy.$$

Corollario I. Se il corpo non terminasse alla superficie data, ma ad un'altra per la quale fosse $t = \lambda_i$ funzione anch'essa delle x, y o costante, il volume del corpo evidentemente sarebbe

$$\iint \left((\lambda - \lambda_i)A + \frac{1}{2}(\lambda^2 - \lambda_i^2)B + \frac{1}{3}(\lambda^3 - \lambda_i^3)C\right)dx\,dy;$$

e se fosse anco $\lambda_i = -\lambda$ cioè il corpo fosse segato dalla superficie data talmente, che le rette λ, λ_i fossero fra loro eguali e l'una da una banda e l'altra dall'altra di questa superficie, il volume di esso sarebbe semplicemente

$$2\iint \left(\lambda A + \frac{1}{3}\lambda^3 C\right)dx\,dy.$$

Corollario II. La superficie data e quella nella quale vi sono le altre estremità delle rette λ siano *cilindriche* e perpendicolari ambedue al piano degli assi delle ordinate x, z; e le direzioni delle rette λ incontrino tutte l'asse delle z, più quelle che incontrano una qualunque posizione della retta generatrice dell'una o dell'altra superficie passino tutte per un medesimo punto dello stesso asse delle z.

Chiaminsi, u l'angolo fatto dall'asse delle z col piano passante per la λ e perpendicolare a quello degli assi delle x, z, e v la distanza delle due rette comuni a questo medesimo piano ed alle due superficie cilindriche.

Evidentemente si hanno

$$a=\frac{x}{n}\,\text{sen.}u,\quad b=\frac{y}{n}\,\text{sen.}u,\quad c=\frac{x}{n}\cos.u,\quad \lambda=\frac{n}{x}v,$$

dove $n=\sqrt{(x^2+y^2\,\text{sen.}^2u)}$; e però sarà $z_{,}=0,\ u_{,}=0$,

$$a'=\frac{1}{n^3}(y^2\,\text{sen.}^3u+x^3u'\cos.u),\quad a_{,}=-\frac{xy}{n^3}\,\text{sen.}^3u,$$

$$b'=\frac{1}{n^3}(x^2yu'\cos.u-xy\,\text{sen.}u),\quad b_{,}=\frac{x^2}{n^3}\,\text{sen.}u,$$

$$a'+b_{,}=\frac{1}{n}\,\text{sen.}u+\frac{x^3}{n^3}u'\cos.u,\quad ab'-a'b=-\frac{y}{n^2}\,\text{sen.}^2u,$$

$$ba_{,}-ab_{,}=-\frac{x}{n^2}\,\text{sen.}^2u,\ \text{e conseguentemente}$$

$$A=\frac{x}{n}(\cos.u-z'\,\text{sen.}u),\quad C=\frac{x^2}{n^3}u'\,\text{sen.}u,$$

$$\text{e}\ B=\frac{x}{n^2}(xu'+\text{sen.}u\cos.u-z'\,\text{sen.}^2u).$$

Sostituendo questi valori degli A, B, C e quello della λ nel trinomio

$$A\lambda+\frac{1}{2}B\lambda^2+\frac{1}{3}C\lambda^3,$$

si ottiene con facilità il seguente polinomio

$$v(\cos.u-z'\,\text{sen.}u)+\frac{v^2}{2x}(xu'+\text{sen.}u\cos.u-z'\,\text{sen.}^2u)+\frac{v^3}{3x}u'\,\text{sen.}u$$

la cui primitiva rispetto alla y, estesa dalla $y=0$ alla $y=mx$, ove l'm esprime una costante, risulta

$$\frac{mv}{6}\left(6(\cos.u-z'\,\text{sen.}u)x+3v(xu'+\text{sen.}u\cos.u-z'\,\text{sen.}^2u)+2v^2u'\,\text{sen.}u\right)\ \text{ovvero}$$

$$\frac{mv}{6}\left(3(\cos.u-z'\,\text{sen.}u)(2x+v\,\text{sen.}u)+v(3x+2v\,\text{sen.}u)u'\right):$$

formula utile per la cubatura delle volte a spicchi, ed anco per istabilire le loro condizioni di equilibrio.

Corollario III. La superficie data sia quella, che ha per equazione $z^2+y^2-\phi(x)^2=0$, cioè sia di rotazione ed abbia per suo asse lo stesso delle ordinate x; ed un prolungamento della retta nella quale vi è t passi per questo medesimo asse, ed il coseno a sia funzione della sola x.

Siccome la direzione della λ passa per l'asse delle x, così si avrà la equazione $cy-bz=0$, che combinata colla $a^2+b^2+c^2=1$ dà

$$b=\frac{m}{\phi}y,\ \text{e}\ c=\frac{m}{\phi}z,$$

dove m esprime $\sqrt{(1-a^2)}$ cioè il seno dell'angolo avente a per coseno.

Questi valori delle b, c, insieme a quelli delle z', z, che sono $\frac{\phi}{z}\phi'$, $-\frac{y}{z}$, evidentemente danno $c - az' - bz_{,} = \frac{\phi}{z}(m - a\phi')$,

$$a' + b_{,} = \frac{1}{\phi}(m + a'\phi),\ b + cz_{,} = 0,$$

$$a + cz_{,} = a + m\phi',\ \text{ed}$$

$$a_{,}b - ab_{,} = -\frac{am}{\phi},\ a'b_{,} - a_{,}b' = \frac{ma'}{\phi};$$

e per tanto per questo esempio sarà $A + Bt + Ct^2$ *eguale* ad

$$\frac{1}{z}\left((m - a\phi')\phi + \left(1 + \frac{a'}{m}\phi - a^2 - am\phi'\right)t + a't^2\right),$$

cioè $A + Bt + Ct^2 = \frac{1}{z}\left(m - a\phi' + \frac{t}{m}a'\right)(mt + \phi)$.

Questo valore del trinomio $A + Bt + Ct^2$, contenendo la sola y contenuta nel suo fattore $\frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{(\phi^2 - y^2)}}$, ha quella sua primitiva rispetto alla y, che annullasi colla y medesima, che è

$$\left(m - a\phi' + \frac{t}{m}a'\right)(mt + \phi)\xi,$$

dove ξ esprime l'angolo, che ha $\frac{y}{\phi}$ per seno.

Così, ordinando quest'ultima quantità secondo la variabile t, e trovando quella sua primitiva rispetto alla t, che comincia colla $t = 0$, si ottiene

$$\left((m - a\phi')\phi t + \frac{1}{2}\left(m^2 - am\phi' + \frac{a'}{m}\phi\right)t^2 + \frac{a'}{3}t^3\right)\xi,$$

la quale, denominato μ l'angolo che ha per seno m e per coseno *meno* a, si riduce alla seguente

$$\frac{1}{2}\xi\left((2\phi + t\,\text{sen.}\,\mu)(\text{sen.}\,\mu + \phi'\cos.\,\mu)t + \mu'\cdot\left(\phi + \frac{2}{3}t\,\text{sen.}\,\mu\right)t^2\right):$$

espressione, che è visibilmente quella, trovata per lo stesso soggetto dai signori Gratognini Giuseppe, Masetti, Conti, ed anco da me sempre con metodi speciali per essa.

Corollario IV. La direzione della retta λ sia quella della normale la superficie data; cioè siano $a = -\frac{z'}{\alpha}$, $b = -\frac{z_{,}}{\alpha}$, $c = \frac{1}{\alpha}$, dove $\alpha = \sqrt{(1 + z'^2 + z_{,}^2)}$; e si avranno anco $b + cz_{,} = 0$, $a + cz' = 0$; e però sarà

$$A = \alpha,\ B = \frac{1}{c}(a' + b_{,}) = \frac{1}{\alpha^2}\left(2z'z_{,}z'_{,} - (1 + z'^2)z_{,,} - (1 + z_{,}^2)z''\right),$$

e $C = \frac{1}{\alpha^3}(z''z_{,,} - z'^2_{,})$, ossia

$$A = \alpha,\ B = \alpha\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right),\ \text{e}\ C = \frac{\alpha}{rR},$$

dove r, R esprimono i raggi delle curvature sferiche della superficie data; e conseguentemente sarà

$$V=\iint\left(t+\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3rR}\right)\alpha\, dx\, dy$$

ossia $V=\iiint\left(1+\frac{t}{r}\right)\left(1+\frac{t}{R}\right)dc\,dC\,dt$

ove c, C significano gli archi delle linee delle medesime curvature sferiche: tutto come trovai replicatamente in altre occasioni.

Si chiami ϖ l'arco di quella curva, che è parallela, corrispondente e distante dalla c di t; ξ il raggio della sua curvatura ordinaria, e ψ il complesso dei suoi angoli di contingenza di prima specie.

Dai paragrafi duecentoquattro e duecentosei delle mie lezioni si hanno

$$1+\frac{t}{r}=\left(\frac{d\varpi}{dc}\right) \text{ e } \left(\frac{d\varpi}{dc}\right)=\xi\psi'(c);\text{ e però sarà}$$

$$V=\iiint\left(1+\frac{t}{R}\right)\xi\psi'(c)dC\,dc\,dt,\text{ ossia } V=\int d\psi\iint\left(1+\frac{t}{R}\right)\xi\, dC\,dt.$$

Da questa relazione se ne possono desumere varie altre come casi particolari di essa. Per esempio, la superficie data sia sviluppabile e la C sua caratteristica e però $\frac{t}{R}=0$; e si avrà la particolare relazione seguente $V=\int d\psi\iint\xi\, dC\,dt$, la quale appuntino equivale alla relazione o regola pubblicata in questo anno dal sig. Mainardi; giacchè le C, t sono coordinate rettangole di un punto qualunque del piano normale la superficie sviluppabile data e però tangente la superficie pure sviluppabile luogo dei centri delle curvature sferiche ordinarie della data medesima, ξ la perpendicolare tirata da questo punto alla caratteristica della seconda superficie sviluppabile, e ψ il complesso degli angoli diedri successivamente descritti dal piano suddetto nel muoversi, conservandosi o normale la prima superficie sviluppabile ovvero toccante la seconda di esse.

Corollario V. Se la superficie data alla quale sono normali le direzioni delle rette λ fosse sviluppabile, come dianzi, e segasse il corpo come si è supposto alla fine del corollario primo, per cui $\lambda_1=-\lambda$, il volume di esso sarebbe semplicemente $2\iint\lambda\alpha\, dx\, dy$; dimodochè, se la λ fosse anco costante, questo volume sarebbe $2\lambda\iint\alpha\, dx\, dy$, cioè il prodotto dell'area della corrispondente superficie data per 2λ grossezza del corpo medesimo.

Osservazione. Approfitto della occasione qui sopra occorsa della superficie sviluppabile luogo dei centri delle curvature sferiche di un'altra superficie pure sviluppabile per esporre alcune sue interessanti proprietà.

« Data la curva spigolo di regresso di una superficie sviluppabile, trovare « quella che è lo spigolo di regresso dell'altra superficie pure sviluppabile, « nella quale vi sono i centri delle curvature sferiche della prima?

Si denominino x, y, z le coordinate rettangole di un punto qualunque della curva data ed s l'arco di essa.

Il piano tangente la seconda superficie sviluppabile passerà per la retta toccante lo spigolo di regresso della prima, e sarà perpendicolare alla normale ordinaria di questo spigolo medesimo; e però le P, Q, R coordinate di un punto qualunque di esso avranno la relazione

$$(P-x)\left(\frac{x'}{s'}\right)' + (Q-y)\left(\frac{y'}{s'}\right)' + (R-z)\left(\frac{z'}{s'}\right)' = 0,$$

ovvero (1) - - - $(P-x)a' + (Q-y)b' + (R-z)c' = 0,$

supposto $x' = as'$, $y' = bs'$, $z' = cs'$, essendo a, b, c i coseni degli angoli fatti cogli assi delle x, y, z dalla retta toccante la curva data.

Per i significati delle a, b, c si ha la equazione $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, qualunque sia la x; e però avrassi anco la $aa' + bb' + cc' = 0$ e la seguente

$$aa'' + bb'' + cc'' + a'^2 + b'^2 + c'^2 = 0 \text{ ossia } aa'' + bb'' + cc'' + \mu'^2 = 0,$$

ove μ' esprime la derivata del complesso degli angoli di contingenza di prima specie della curva data.

Le P, Q, R coordinate rettangole della caratteristica della seconda superficie sviluppabile soddisfaranno la equazione (1) e la sua derivata, la quale sarebbe

$$(P-x)a'' + (Q-y)b'' + (R-z)c'' - x'a' - y'b' - z'c' = 0,$$

ma riducesi alla

(2) - - - $(P-x)a'' + (Q-y)b'' + (R-z)c'' = 0,$

per essere $x'a' + y'b' + z'c' = (aa' + bb' + cc')s'$ e però *zero*.

Così, le P, Q, R coordinate della curva spigolo di regresso della medesima seconda superficie sviluppabile soddisfaranno le due (1), (2) ed anco la seguente

$$(P-x)a''' + (Q-y)b''' + (R-z)c''' - x'a'' - y'b'' - z'c'' = 0,$$

derivata della (2), cioè la

(3) - - - $(P-x)a''' + (Q-y)b''' + (R-z)c''' + s'\mu'^2 = 0;$

giacchè si ha $x'a'' + y'b'' + z'c'' = (aa'' + bb'' + cc'')s' = -s'\mu'^2$.

Le equazioni (1), (2), (3) equivalgono evidentemente alle tre

$$(P-x)U = (b''c' - b'c'')s'\mu'^2,$$
$$(Q-y)U = (a'c'' - a''c')s'\mu'^2,$$
$$(R-z)U = (a''b' - a'b'')s'\mu'^2,$$

dove $U = a'b''c''' + c'a''b''' + b'c''a''' - b'a''c''' - c'b''a''' - a'c''b'''$,

le quali somministrano immediatamente le P, Q, R, coordinate della curva richiesta, formate con quelle della data e loro derivate.

Corollario. Si chiami D quella porzione della caratteristica della seconda superficie sviluppabile, che è intercetta tra il suo spigolo di regresso e quello dell' altra.

Essendo $D^2 = (P-x)^2 + (Q-y)^2 + (R-z)^2$,

le ultime tre equazioni esposte danno

$$U^2D^2 = \left((b''c' - b'c'')^2 + (a'c'' - a''c')^2 + (a''b' - a'b'')^2\right)s'^2\mu'^4;$$

e però sarà $D = \frac{s' \mu'^3}{U} V(a''^2 + b''^2 + c''^2 - \mu''^2)$,

per essere $(b''c' - b'c'')^2 + (a'c'' - a''c')^2 + (a''b' - a'b'')^2$ *eguale* ad

$(a'^2 + b'^2 + c'^2)(a''^2 + b''^2 + c''^2 - \mu''^2)$ cioè a $\mu'^2(a''^2 + b''^2 + c''^2 - \mu''^2)$.

« Trovare la derivata del complesso degli angoli di contingenza di prima « specie dello spigolo di regresso determinato nella proposizione antecedente?

La derivata richiesta si chiami ξ'.

Siccome la retta caratteristica della seconda superficie è toccante del suo spigolo di regresso, così le P, Q, R coordinate di questa toccante avranno le relazioni (1), (2); e però le equazioni di due sue projezioni saranno

$$(Q - y)m = (P - x)n, \quad (R - z)m = (P - x)h,$$

dove $m = b'c'' - b''c'$, $n = a''c' - a'c''$, ed $h = a'b'' - a''b'$.

Questa retta fa cogli assi delle x, y, z angoli i coseni dei quali sono $\frac{m}{t}, \frac{n}{t}, \frac{h}{t}$ dove $t = V(m^2 + n^2 + h^2)$; e però sarà

$$\xi'^2 = \left(\frac{m}{t}\right)'^2 + \left(\frac{n}{t}\right)'^2 + \left(\frac{h}{t}\right)'^2$$

$$\text{ossia } \xi'^2 = \frac{1}{t^2}(m'^2 + n'^2 + h'^2 - t'^2),$$

$$\text{ed anco } \xi'^2 = \frac{1}{t^4}\left((m n' - n m')^2 + (h m' - m h')^2 + (n h' - h n')^2\right).$$

Ma si ha $mn' - nm' = (b'c'' - b''c')(a'''c' - a'c''') - (b'c''' - b'''c')(a''c' - a'c'')$ cioè $mn' - nm' = Uc'$; e similmente si hanno

$$hm' - mh' = Ub', \quad nh' - hn' = Ua', \text{ ed anco}$$

$(b'c'' - b''c')^2 + (a''c' - a'c'')^2 + (b''a' - b'a'')^2$ cioè $t^2 = (a''^2 + b''^2 + c''^2 - \mu''^2)\mu'^2$;

$$\text{adunque sarà } \xi'^2 = (a'^2 + b'^2 + c'^2)U^2 : (a''^2 + b''^2 + c''^2 - \mu''^2)^2 \mu'^4,$$

e però $\xi' = U : (a''^2 + b''^2 + c''^2 - \mu''^2)\mu'$.

« Trovare la derivata del complesso degli angoli di contingenza di seconda « specie del medesimo spigolo di regresso considerato nelle due proposizioni « antecedenti?

La derivata qui richiesta chiamisi φ'.

Siccome il complesso degli angoli di contingenza di seconda specie di una curva è quello delle successive deviazioni *diedre* dei piani osculatori di essa, e però lo stesso delle successive deviazioni delle rette perpendicolari a questi piani; e le normali ordinarie dello spigolo di regresso della superficie sviluppabile data sono appunto perpendicolari ai piani osculatori dello spigolo di regresso della seconda superficie; così, la derivata richiesta sarà quella del complesso delle deviazioni di queste medesime normali ordinarie. Ma le p, q, r coordinate rettangole di una qualunque di queste normali soddisfanno le equazioni

$$(q - y)a' = (p - x)b', \quad (r - z)a' = (p - x)c'$$

per cui i coseni degli angoli, che essa fa cogli assi delle coordinate, sono evidentemente $\frac{a'}{\mu'}$, $\frac{b'}{\mu'}$, $\frac{c'}{\mu'}$; adunque sarà

$$\varphi'^2 = \left(\frac{a'}{\mu'}\right)'^2 + \left(\frac{b'}{\mu'}\right)'^2 + \left(\frac{c'}{\mu'}\right)'^2,$$

ossia $\varphi'^2 = \frac{1}{\mu'^4}\left((a''\mu' - a'\mu'')^2 + (b''\mu' - b'\mu'')^2 + (c''\mu' - c'\mu'')^2\right)$,

cioè $\varphi'^2 = \frac{1}{\mu'^2}(a''^2 + b''^2 + c''^2 - \mu''^2)$ e conseguentemente

$$\varphi' = \frac{1}{\mu'}\sqrt{(a''^2 + b''^2 + c''^2 - \mu''^2)}.$$

« Trovare il coseno dell' angolo compreso da quelle caratteristiche delle due « superficie sviluppabili, che passano per lo stesso punto dello spigolo di « regresso della prima?

Si denominino p, q, r le coordinate rettangole della caratteristica della prima superficie, e P, Q, R le analoghe della corrispondente caratteristica della seconda; e ψ l'angolo compreso da esse.

Le equazioni delle due caratteristiche sono evidentemente

$$(q-y)a = (p-x)b,\ (r-z)a = (p-x)c,$$
$$(Q-y)m = (P-x)n,\ (R-z)m = (P-x)h;$$

e però sarà $\cos.\psi = (am + bn + ch) : \sqrt{(m^2 + n^2 + h^2)}$,

cioè $\cos.\psi = S : \mu'\sqrt{(a''^2 + b''^2 + c''^2 - \mu''^2)}$,

dove $S = ab'c'' + ca'b'' + bc'a'' - ba'c'' - cb'a'' - ac'b''$.

Corollario. Essendo $\text{sen.}^2\psi = 1 - (am + bn + ch)^2 : (m^2 + n^2 + h^2)$, ed $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, si ha

$$\text{sen.}^2\psi = \frac{1}{t^2}\left((bm - an)^2 + (ah - cm)^2 + (cn - bh)^2\right).$$

Ma $bm - an = \mu'^2 c'$, $ah - cm = \mu'^2 b'$, $cn - bh = \mu'^2 a'$, e $t^2 = \mu'^2(a''^2 + b''^2 + c''^2 - \mu''^2)$; adunque sarà $\text{sen.}\psi = \mu'^2 : \sqrt{(a''^2 + b''^2 + c''^2 - \mu''^2)}$, e conseguentemente

$$\text{tang.}\psi = \frac{\mu'^3}{S} \text{ cioè } \text{tang.}\psi = \mu' : \frac{S}{\mu'^2}.$$

Vale a dire, la tangente dell'angolo ψ eguale ad una frazione, il cui numeratore è μ', derivata del complesso degli angoli di contingenza di prima specie dello spigolo di regresso della prima superficie sviluppabile, ed il denominatore $\frac{S}{\mu'^2}$ è la derivata del complesso degli angoli di contingenza di seconda specie di questo medesimo spigolo di regresso.

Osservazione. Non espongo le espressioni delle coordinate del centro della curvatura sferica corrispondente ad un punto dato della prima superficie sviluppabile, nè il raggio di essa, perchè facilissime a costituirsi stante la conoscenza dell' angolo ψ e del piano toccante la superficie medesima.

NOTA (*)

SOPRA DI UNA PROPRIETÀ CHE HA LUOGO TRA LA CARATTERISTICA DI UNA SUPERFICIE INVILUPPANTE E LA LINEA INDIVIDUATA LUNGO LA QUALE LE SUE INVILUPPATE HANNO UN CONTATTO DI UN ORDINE QUALUNQUE CON UNA SUPERFICIE DATA.

La equazione $z = \phi(x, y)$ rappresenti la superficie data, e la $y = \psi(x)$ sia l'altra della linea individuata esistente in essa; e la $r = f(p, q, a, b, \text{---})$, dove p, q, r sono coordinate analoghe alle x, y, z e le $a, b, \text{---} \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ arbitrarie, rappresenti la famiglia delle superficie inviluppate.

Evidentemente le $a, b, \text{---}$ saranno quelle funzioni della x, che si avranno col porre $\psi(x)$ in vece della y nelle funzioni delle x, y valori delle stesse quantità $a, b, \text{---}$ determinati col soddisfare le $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ equazioni seguenti

$$z = f(x, y, a, b, \text{---}); \; z' = f'(x), \; z_{,} = f_{,}; \; z'' = f'', \; z'_{,} = f'_{,}, \; z_{,,} = f_{,,}; \text{---}$$
$$\text{---}; \; z^{(n)} = f^{(n)}, \; z_{,}^{(n-1)} = f_{,}^{(n-1)}, \; z_{,,}^{(n-2)} = f_{,,}^{(n-2)}, \text{---} \; z'_{(n-1)} = f'_{(n-1)}, \; z_{(n)} = f_{(n)}.$$

Così, la equazione della superficie inviluppante sarà la risultante della eliminazione della x dalle due

$$r - f(p, q, a, b, \text{---}) = 0, \quad f'(a)a' + f'(b)b' + \text{ecc.} = 0,$$

dove $a', b' \text{---}$ esprimono $a'(x) + a'(\psi)\psi'(x)$, $b'(x) + b'(\psi)\psi'(x)$, ---; e queste due equazioni rappresenteranno la caratteristica di essa.

La seconda di queste equazioni cioè la $\left(\frac{df(p, q, a, b, \text{---})}{dx}\right) = 0$, la quale per semplicità scriverassi $f' = 0$, esprime evidentemente la projezione nel piano degli assi delle p, q o delle x, y della caratteristica medesima.

La superficie inviluppante tocca la superficie data lungo la linea rappresentata colle equazioni

$$z = \phi(x, y), \quad y = \psi(x);$$

e tocca una sua inviluppata lungo quell' altra linea, che è rappresentata colle

$$r = f(p, q, a, b, \text{---}), \; f' = 0:$$

la proprietà, che forma lo scopo di questa nota, è una singolare relazione, che

(*) Era già stampata la precedente memoria quando l'Autore ha desiderato che questa sua nota vi fosse qui aggiunta per la ragione da lui esposta in fine di essa.

Avvertenza dell' Editore.

ha luogo fra le due tangenti trigonometriche $\psi'(x)$, $\left(\frac{dq}{dp}\right)$ corrispondenti al punto comune di queste medesime due linee.

Se nelle equazioni $\left(\frac{df'}{dp}\right)+\left(\frac{df'}{dq}\right)\left(\frac{dq}{dp}\right)=0$,

$$\left(\frac{d^2f'}{dp^2}\right)+2\left(\frac{d^2f'}{dp\,dq}\right)\left(\frac{dq}{dp}\right)+\left(\frac{d^2f'}{dq^2}\right)\left(\frac{dq}{dp}\right)^2+\left(\frac{df'}{dq}\right)\left(\frac{d^2q}{dp^2}\right)=0,$$

- -

derivate esatte della $f'=0$ degli ordini primo, secondo, - - - $(n-1)$ *esimo* si pone x in vece della p, e $\psi(x)$ in vece della q, le risultanti riescono affatto identiche in forza dei valori delle a, b, - - -; e quella dell'ordine *n esimo* si riduce alla seguente

$$(f^{(n)})'+n(f_{\prime}^{(n-1)})'\lambda'+\frac{n(n-1)}{2}(f_{\prime\prime}^{(n-2)})'\lambda'^2+----+n(f'_{(n-1)})'\lambda'^{n-1}+f_{(n)})'\lambda'^n=0,$$

dove λ' esprime il valore della $\left(\frac{dq}{dp}\right)$ corrispondente alla $p=x$, le $f^{(n)}$, $f_{\prime}^{(n-1)}$, - - - i valori corrispondenti alla stessa $p=x$ delle

$$\left(\frac{d^nf(p,q,a,b,---)}{dp^n}\right),\ \left(\frac{d^nf(p,q,a,b,---)}{dp^{n-1}dq}\right),---$$

ossia le derivate parziali seguenti

$$\left(\frac{d^nf(x,\psi,a,b,---)}{dx^n}\right),\ \left(\frac{d^nf(x,\psi,a,b,---)}{dx^{n-1}d\psi}\right),---;$$

e le $(f^{(n)})'$, $(f_{\prime}^{(n-1)})'$, - - - esprimono le derivate totali rispetto a quella sola x, che è nelle componenti $a\big(x,\psi(x)\big)$, $b\big(x,\psi(x)\big)$, - - - delle stesse $f^{(n)}$, $f_{\prime}^{(n-1)}$, - - -.

Ma dalle equazioni

$$z^{(n)}=f^{(n)},\ z_{\prime}^{(n-1)}=f_{\prime}^{(n-1)},\ z_{\prime\prime}^{(n-2)}=f_{\prime\prime}^{(n-2)},\ ---,\ z_{(n)}=f_{(n)}$$

identiche si hanno, pel caso di $y=\psi(x)$, le seguenti

$$z^{(n+1)}+z_{\prime}^{(n)}\psi'(x)=f^{(n+1)}+f_{\prime}^{(n)}\psi'(x)+(f^{(n)})',$$
$$z_{\prime}^{(n)}+z_{\prime\prime}^{(n-1)}\psi'(x)=f_{\prime}^{(n)}+f_{\prime\prime}^{(n-1)}\psi'(x)+(f_{\prime}^{(n-1)})',$$
$$z_{\prime\prime}^{(n-1)}+z_{\prime\prime\prime}^{(n-2)}\psi'(x)=f_{\prime\prime}^{(n-1)}+f_{\prime\prime\prime}^{(n-2)}\psi'(x)+(f_{\prime\prime}^{(n-2)})',$$

- -

$$z'_{(n)}+z_{(n+1)}\psi'(x)=f'_{(n)}+f'_{(n+1)}\psi'(x)+(f_{(n)})',$$

le quali danno, posto $z-f=\xi$,

$$(f^{(n)})'=\xi^{(n+1)}+\xi_{\prime}^{(n)}\psi'(x),$$
$$(f_{\prime}^{(n-1)})'=\xi_{\prime}^{(n)}+\xi_{\prime\prime}^{(n-1)}\psi'(x),$$
$$(f_{\prime\prime}^{(n-2)})'=\xi_{\prime\prime}^{(n-1)}+\xi_{\prime\prime\prime}^{(n-2)}\psi'(x),$$

- - - - - - - - - - - - - - - -

$$(f_{(n)})'=\xi'_{(n)}+\xi_{(n+1)}\psi'(x);$$

adunque la equazione trovata sopra equivarrà alla

$$\xi^{(n+1)} + n\,\xi_{,}^{(n)}\lambda' + \frac{n(n-1)}{2}\,\xi_{,,}^{(n-1)}\lambda'^{2} + \cdots + \xi'_{(n)}\lambda'^{n}$$

$$+\left(\xi_{,}^{(n)} + n\,\xi_{,,}^{(n-1)}\lambda' + \frac{n(n-1)}{2}\,\xi_{,,,}^{(n-2)}\lambda'^{2} + \cdots + \xi_{(n+1)}\lambda'^{n}\right)\psi'(x) = 0,$$

la quale esprime la richiesta relazione delle tangenti λ', $\psi'(x)$.

Pel caso dell'$n=1$ cioè che le superficie inviluppate abbiano colla data un contatto del solo primo ordine, la relazione qui trovata si riduce alla

$$\xi'' + \xi'_{,}\lambda' + (\xi'_{,} + \xi_{,,}\lambda')\psi' = 0$$

cioè $z'' - f'' + (z'_{,} - f'_{,})(\lambda' + \psi') + (z_{,,} - f_{,,})\lambda'\psi' = 0$;

ed è appunto questa, che dovrebbe costituire le linee 18 e 20 della pagina 326 *esima* del primo tomo delle mie lezioni, e non quella che vi è attualmente per inavvertenza; anzi è per togliere la difficoltà incontrata nella lettura di questo passo da giovini anco esperti nel calcolo, che io mi sono determinato di pubblicare sin d'ora la nota presente, sebbene compilata per altro mio lavoro.

Quando la equazione $r = f(p, q, a, b, \ldots)$

sia di primo grado, cioè che le superficie da essa rappresentate siano piane, essendo evidentemente $f'' = f'_{,} = f_{,,} = 0$, l'ultima relazione esposta si riduce

$$z'' + z'_{,}(\lambda' + \psi') + z_{,,}\lambda'\psi' = 0,$$

che è la fondamentale per la teorica delle tangenti chiamate conjugate dal sig. Dupin scopritore di essa.

RIFLESSIONI

SULLA LEGGE DELL'ATTRAZIONE MOLECOLARE

MEMORIA

DI GIUSEPPE BELLI

I.

Io aveva procurato di dimostrare in una memoria inserita già nel Giornale di Fisica di Pavia (1), che l'attrazione alle minime distanze, detta molecolare, non segue la medesima legge della universale secondo che opinava Buffon (2) e più recentemente Laplace (3), ma bensì, come credette il medesimo Newton scopritore di questa forza, e poscia sostenne il Clairaut (4), decresce all'aumentarsi delle distanze con una legge di gran lunga più rapida, cioè ch'ella segue, secondo che mi parve poter dedurre da diversi fenomeni, una legge più rapida di quella delle quarte potenze reciproche delle distanze, o anche delle quinte. Avendo però fatto uso di calcoli semplicemente approssimativi, la cui legittimità non bene potevasi da tutti sentire, n'è venuto che parecchi Fisici, sebbene avessero avuto sott'occhio quel mio lavoro, continuarono ad attenersi alle idee di Buffon, o a quelle di Laplace, parendo loro più consentanee alla semplicità delle operazioni della natura (5). Per la qual cosa avendo io sempre tenuto presente al pensiero questo punto controverso della fisica speculativa, e paren-

(1) Volume dell'anno 1814, pag. 110 *e* 169.

(2) Atti dell'Accademia di Parigi pel 1745, pag. 493 *e* seg.; pag. 551 e 580. Veggasi anche nella Storia Naturale di quest'autore l'articolo intitolato: *De la Nature seconde vue,* Paris chez Dufart, Tom. XXIII, pag. 385, il quale articolo nell'edizione milanese del Galeazzi dell'anno 1771 trovasi al Tom. XIII, pag. XXXIII e seg.

(3) Veggasi il passo della sua *Exposition du Sistéme du Monde,* citato in questa Memoria al num. X.

(4) Atti di Parigi pel 1745, pag. 529 *e* 529, *e* principalmente alle pag. 577, 578 e 583. Alla pag. 585 viene da esso Clairaut citata l'opinione di Newton, il quale pei fenomeni *della rifrazione, della rotondità delle goccie, della salita dei liquidi nei tubi capillari,* ecc. ammetteva una legge più rapida della ragione inversa dei *cubi* delle distanze.

(5) Veggasi una Memoria del cav. Leopoldo Nobili *Sulla identità dell' attrazione molecolare coll'astronomica,* inserita nel citato Giornale di Fisica di Pavia l'anno 1817, e riprodotta

domi di aver trovato delle dimostrazioni rigorose in appoggio dell' opinione da me abbracciata, mi sono creduto in debito verso il pubblico di darle alla luce, affine di rischiarare e forse terminare interamente una tale questione. Ed è questo appunto l' oggetto della presente memoria; nella quale io esamino primieramente la questione nell' ipotesi della continuità della materia; quindi procuro di estendere le trovate conclusioni alle diverse ipotesi della materia discontinua, cercando in ispecie di dimostrare l'inutilità del ripiego di Laplace, cioè del supporre una grandissima distanza fra le molecole dei corpi; osservo in terzo luogo se vi abbiano ipotesi sulla costituzione della materia, colle quali possano conciliarsi le due attrazioni, e a quali difficoltà queste ipotesi vadano soggette; e in fine accenno brevemente a quali leggi di attrazione si debba ricorrere per conservare su tale costituzione della materia le ipotesi più ricevute.

ARTICOLO PRIMO

Insufficienza dell' attrazione astronomica per produrre la coesione e l' adesione dei corpi, nell' ipotesi della continuità della materia.

II.

Io comincerò a dimostrare il mio assunto per ipotesi che i corpi si suppongano formati di materia continua, vale a dire di materia distribuita in modo da riempire interamente lo spazio contenuto sotto la loro superficie senza lasciare interruzioni o spazii vani, supponendo altresì che la densità ne' diversi punti di un medesimo corpo o sia uniforme o almeno non presenti differenze molto grandi. Non è questo a vero dire il caso della natura, mostrandoci le sperienze che tutti i corpi sono porosi e perciò formati di materia discontinua. È però questa l' ipotesi più semplice e che più facilmente si presta all' uso de' calcoli. Le conseguenze poi che da essa si ottengono si possono, colle modificazioni opportune, estendere ad altri casi più complicati e più conformi allo stato reale delle cose.

Ammessa una tale ipotesi, e bramando di dimostrare la cosa con maggiore evidenza di quello che fecero già chiarissimi autori, il mezzo che a quest' uopo mi sembra il migliore si è di determinare in numeri la forza colla quale in vir-

---

con qualche aggiunta dalla Società Tipografica di Modena nel 1818. Si veggano inoltre le *Ricerche sul moto molecolare de' solidi* del conte Domenico Paoli, Pesaro 1825, alla pag. 52. Un'estesa enumerazione degli Autori che ne' varii tempi si dichiararono per l'una o per l'altra delle due opposte opinioni può vedersi nel *Gehler's Physikalisches Worterbuch neu bearbeitet*, Lipsia 1825 e seg. agli articoli *Anziehung* e *Cohasion*. Ad onta però degli sforzi di tanti Fisici, il sig. Muncke estensore di que' due articoli riguarda la questione come non ancora pienamente risoluta (Tom. I, pag. 324; Tom. II, pag. 127).

tù dell' attrazione astronomica terrebbonsi uniti due corpi di materia continua di data densità e di data forma, posti a combaciamento per una parte della loro superficie, e di far conoscere così la estrema piccolezza di questa forza, in confronto di quella con cui secondo le sperienze tendono effettivamente a stare insieme uniti due corpi naturali di quella forma e di quella densità. Io avrei desiderato di ciò fare nella mia prima memoria; ma non avendo saputo trovar forme di corpi le quali si prestassero interamente a calcoli rigorosi, ho dovuto contentarmi di approssimazioni. Ho poi ritrovato diverse forme a ciò idonee, e fra le altre quella di due parallelepipedi rettangoli aventi le facce parallele l' uno coll' altro. Il perchè io prenderò a considerare due corpi di tale figura, i quali per maggiore facilità de' calcoli supporrò essere due cubi uguali, posti a combaciamento per una delle loro facce.

Abbiansi adunque due cubi AE, ae (fig. 1) uguali in grandezza, e posti a combaciamento per la comune faccia aE, i quali riferiti a tre assi ortogonali coll' origine in A abbiano gli spigoli Aa, ab paralleli alle x, gli AC, ac paralleli alle y, e gli AD, ad alle z, ammesso che queste coordinate crescano rispettivamente pei versi da A verso a, da A verso C, e da A verso D. Suppongasi che la materia che separatamente compone ciascuno di essi vi sia distribuita uniformemente per tutta la di lui estensione solida, senza che vi abbiano vacui nè diversa densità dall' un punto all' altro, potendo però esservi differenza di densità dall'uno all'altro cubo. E inoltre si supponga che questi cubi si attraggano vicendevolmente in ragione inversa de' quadrati delle distanze, e con quella energia che è voluta dall' attrazione astronomica in corpi collocati in quelle posizioni e dotati di quelle masse e figure.

Chiamisi

h la lunghezza di ciascuno spigolo de' due cubi;

Δ la densità del cubo AE riferito all'acqua distillata al massimo di densità;

δ quella del cubo ae;

μ la massa di un corpo che abbia il volume 1 e la densità 1; riguardo alla qual massa, adottando noi il sistema metrico de'pesi e misure, vale a dire il metro lineare, il metro quadrato e il metro cubico per unità, rispettivamente, di lunghezza, di superficie e di volume, e il chilogrammo per unità di massa, sarà $\mu = 1000$; giacchè un metro cubico di acqua distillata al massimo di densità ha la massa di 1000 chilogrammi. Si denomini

K la forza colla quale in virtù della gravitazione si attraggono due chilogrammi di materia, supposti concentrati ciascuno in un punto, e situati alla vicendevole distanza di un metro; vale a dire sia K la quantità di moto che uno di questi corpi della massa d'un chilogrammo acquisterebbe durante un minuto secondo, per un'azione continua ed uniforme uguale all'attrazione ch'esso sente dall' altro corpo; nel qual caso sarà

$\frac{K}{g}$ il numero de' chilogrammi al cui peso equivale una tal forza in un luogo ove la gravità, cioè più precisamente la velocità acquistata dai gravi in un se-

condo di libera caduta, sia g (1). Chiamisi

P la forza totale con cui i due cubi si attraggono a vicenda, cioè la forza con cui il cubo AE è sollecitato verso l'aumento delle x, e il cubo ae secondo la diminuzione delle x medesime;

X, Y, Z le coordinate di un punto M preso nel cubo AE;

x, y, z quelle di un punto m preso nell'altro cubo ae. Si avrà

$$[1] \quad P = K\Delta\partial\mu^2 \iiiint\!\!\iint dx \cdot dy \cdot dz \cdot dX \cdot dY \cdot dZ \cdot \frac{(x-X)}{\left\{(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

venendo estese le integrazioni fra i limiti

$$x=h,\ 2h;\quad y=0,\ h;\quad z=0,\ h;$$
$$X=0,\ \ h;\quad Y=0,\ h;\quad Z=0,\ h;$$

e la difficoltà consisterà nella determinazione del secondo membro di questa equazione.

In fatti se noi immaginiamo che ne' due punti M, m sieno concentrate tali quantità di materia, quali sono contenute in una unità di volume colle densità Δ, ∂ rispettivamente, queste masse avranno rispettivamente per misura le quantità

$$\mu\Delta, \quad \mu\partial,$$

per vicendevole distanza la quantità

$$\left\{(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

e per vicendevole attrazione la quantità

$$\frac{K\Delta\partial\mu\mu}{(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2}.$$

(1) Per comodità de' lettori stimo qui utile qualche schiarimento. È noto che le forze continuate dette *motrici* si sogliono misurare dalla quantità di moto che esse sono atte a comunicare ai corpi liberi in una unità di tempo di azione uniforme. Ora, prendendo il minuto secondo ad unità dei tempi, e chiamando g la velocità che in un dato paese acquistano i corpi liberamente cadenti per un minuto secondo, se n è il numero de' chilogrammi o delle unità di massa di un corpo, acquista questo dopo un secondo di libera caduta la quantità di moto ng. Ma questa egli acquisterebbe pure quando, cessata in esso l'azione della gravità, venisse spinto all'ingiù con una forza esterna uguale al suo peso. Dunque una forza uguale al peso, in quel paese, di n chilogrammi è atta a comunicare al corpo supposto (e per le dottrine delle forze il può a un corpo qualsivoglia), mediante un'azione continuata per un secondo, la quantità di moto ng, ed ha perciò per sua misura ng. Dunque, fatta $ng=K$, ossia $n=\frac{K}{g}$, si ha che una forza uguale al peso di chilogrammi $\frac{K}{g}$, quando venga misurata dalla quantità di moto, ha per misura K; e viceversa una forza avente per misura K equivale al peso di chilogrammi $\frac{K}{g}$.

E però decomponendo la forza con cui la massa in M è sollecitata verso il punto m, in tre parallele ai tre assi ortogonali, la componente secondo l'aumento delle x sarà

$$\frac{K\Delta\partial\mu\mu(x-X)}{\left\{(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2\right\}^{\frac{3}{2}}};$$

e per le comuni regole del calcolo integrale, la total forza con cui il cubo AE è attratto dalla massa in m secondo le x crescenti, sarà

$$\iiint dX\cdot dY\cdot dZ\cdot\frac{K\Delta\partial\mu\mu(x-X)}{\left\{(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2\right\}^{\frac{3}{2}}},$$

prendendo gli integrali fra i limiti già indicati; e la forza in fine con cui il cubo AE è attratto dall' intero cubo ae secondo le x crescenti, sarà

$$\iiiiiint dx\cdot dy\cdot dz\cdot dX\cdot dY\cdot dZ\cdot\frac{K\Delta\partial\mu\mu(x-X)}{\left\{(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2\right\}^{\frac{3}{2}}},$$

estendendo gli integrali come si è già accennato. La quale espressione, mettendo fuori del segno d' integrazione la quantità costante

$$K\Delta\partial\mu\mu,$$

e postone il valore uguale a P, ci somministra la formola [1] qui sopra esposta.

III.

Incominciando dalla determinazione del coefficiente K, noi potremo ottenerla dai seguenti dati:

1.° Le dimensioni del globo terrestre, il quale secondo Laplace (1) ha il semiasse minore di metri legali

6356215,

e il semiasse maggiore di metri legali

6376606.

2.° La densità media del medesimo. Questa, prendendo per unità la densità dell' acqua distillata, secondo le sperienze e i calcoli di Cavendish (2) è espressa da 5,48

Secondo le sperienze medesime, fatta la revisione de' calcoli da Hutton (3), è 5,31

Secondo le osservazioni e i calcoli di Maskelyne e di Hutton, riveduti da Playfair (4), ... 4,71

(1) *Exposition du Système du Monde*, Paris 1824, pag. 63.

(2) *Philosophical Transactions*, 1798.

(3) *Ibid.* 1821, pag. 291.

(4) Gehler's *Physikalisches Wörterbuch neu bearbeitet*, Tom. III, pag. 948. *Phil. Trans.* 1811, pag. 347.

Secondo le osservazioni e i calcoli medesimi, prima della revisione di Playfair, ella veniva stimata circa 4,5

Prendendo perciò una media fra i risultamenti corretti di Cavendish e di Maskelyne, possiamo ritenere che questa densità sia prossimamente (1) 5,01

3.° L'attrazione che la massa terrestre eserciterebbe su di un corpo s'ella fosse tutta condensata nel suo centro di figura. Osserva Laplace (2) che verso i corpi situati alla superficie del globo ad una latitudine che abbia per seno $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (cioè ad una latitudine di gradi *sessagesimali* 35° 15′ 52″ prossimamente), ove corrisponde una distanza dal centro terrestre di metri 6369809, questa attrazione non varierebbe sensibilmente quando la massa della terra venisse tutta a raccogliersi nel centro di figura. Ora i corpi liberamente cadenti a quella latitudine percorrono nel primo minuto secondo centesimale metri 3,65631; e però aggiungendo a questa quantità una sua 432.ª parte, affine di aver l'intero effetto dell'attrazione terrestre cioè non scemato dalla forza centrifuga, è atta tale attrazione a quella latitudine a far discendere i corpi nel primo secondo centesimale di metri 3,66477, che danno metri 4,909296 per un minuto secondo sessagesimale; e quindi nella durata di uno di questi ultimi secondi può essa attrazione comunicar loro la velocità

9,81859.

E questa è la misura dell'*accelerazione* del moto che può essere prodotta dall'attrazione della massa della terra ad una distanza di metri

6369809.

Combinando insieme questi dati, e indicando con

δ'

la densità media della terra, avremo

$$\frac{K\delta'\mu\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot6356215\cdot[6376606]^2}{[6369809]^2}=9,81859,$$

essendo π la semiperiferia di raggio 1. Perocchè dall'un lato, essendo K l'attrazione fra due chilogrammi di materia alla distanza vicendevole di un metro, sarà quella esercitata su di un chilogrammo di materia da tutta la massa terrestre alla ragguagliata distanza di metri 6369809, espressa da

$$K\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot6356215\cdot[6376606]^2\cdot\delta'\mu\cdot\frac{1}{[6369809]^2};$$

e dall'altro lato questa forza attrattiva trovasi per mezzo della sperienza essere uguale a 9,81859×1,

(1) Questa densità venne calcolata recentemente, in un modo però semplicemente approssimativo, anche dal sig. Carlini, deducendola dalle accurate osservazioni da lui fatte sulla lunghezza del pendolo semplice a secondi a grande elevazione sopra il livello del mare; e il risultamento fu prossimo a quelli dedotti dalle osservazioni di Maskelyne. Vedi le *Effemeridi Astronomiche di Milano* per l'anno 1824, nell'Appendice a pag. 28 e seg.

(2) *Exposition* ecc. pag. 190.

esprimendosi col primo fattore (cioè con 9,81859) la velocità che questa forza può comunicare in un minuto secondo, e col secondo fattore la massa posta in moto.

Dalla precedente equazione, ricavando K, si ha

$$[2] \qquad K = 0{,}000000\ 000367\ 990 \cdot \frac{1}{\delta'}.$$

E però ponendo

$$\delta' = 5{,}31$$
$$= 4{,}71$$
$$= 5{,}01$$

si avrà rispettivamente

$$[3] \qquad K = 0{,}000000\ 000069\ 30,$$
$$[4] \qquad K = 0{,}000000\ 000078\ 13,$$
$$[5] \qquad K = 0{,}000000\ 000073\ 45.$$

Osservazione I. Se si volesse il numero dei chilogrammi al cui peso equivale la forza attrattiva di cui si tratta, non si avrebbe che a dividere il valore di K per 9,8088 trattandosi di chilogrammi pesati a Parigi, e in generale pel valore di g quando questi chilogrammi sieno pesati in altri luoghi.

Osservazione II. La quantità $K\delta'$, misurata con grande approssimazione dal numero

$$0{,}000000\ 000367\ 990$$

esprime l'attrazione esercitata sulla massa di un chilogrammo da un decimetro cubico di materia che abbia per densità la densità media della terra, supposte queste masse concentrate in due punti alla distanza di un metro.

Osservazione III. Noteremo in fine che i superiori valori numerici di K sarebbero stati alcun poco più esatti, se in luogo di dedurli dalla densità terrestre conclusa dai citati autori, si fossero immediatamente ricavati calcolando le loro osservazioni; poichè avendo essi misurate le effettive attrazioni esercitate da determinate masse, sarebbe stato questo un più breve e più diretto cammino, nè si sarebbero introdotte nei calcoli le dimensioni e la gravità terrestre (come si è necessariamente da essi dovuto fare onde ottenere δ'), per ritoglierle poscia nuovamente con grandezze verisimilmente un po' diverse. Ma sono queste delle differenze ben leggiere, e da non porsi a confronto colle inesattezze inerenti alle osservazioni suddette. D'altronde quei valori di δ' sono già conosciuti dagli scienziati, e, con quel grado di confidenza che meritano, da loro approvati.

IV.

Veniamo ora alla ricerca della quantità

$$[6] \qquad \iiiiiint dx \cdot dy \cdot dz \cdot dX \cdot dY \cdot dZ \cdot \frac{(x - X)}{\left\{(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

estesa fra i limiti già nominati.

Cominceremo dall' osservare essere indifferente l' ordine delle integrazioni, e potersi esse eseguire ordinatamente per riguardo alle variabili y, Y, z, Z, x, X; il che senza altre considerazioni analitiche puossi riconoscere dal solo esame della questione; giacchè seguendo quest' ordine si va estendendo l' attrazione che ha luogo secondo le x fra due punti materiali (cioè fra masse concentrate in due punti) e che è misurata dall' espressione

$$\frac{(x-X)}{\left\{(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

moltiplicata per un coefficiente costante,

1.° a tutta una retta del cubo ae parallela alle y, con un punto del cubo AE;
2.° a due rette parallele alle y l' una in ae e l' altra in AE;
3.° a un piano di ae parallelo alle y, z, con una retta di AE parallela alle y;
4.° a due piani paralleli alle y, z, l' uno in AE e l' altro in ae;
5.° a tutto il cubo ae, con un piano di AE parallelo alle y, z;
6.° a tutto il cubo AE con tutto il cubo ae.

Eseguiremo adunque le operazioni suddette secondo l' ordine indicato dall' espressione

[7] $$\int_0^h dX \int_h^{2h} dx\cdot(x-X) \int_0^h dZ \int_0^h dz \int_0^h dY \int_0^h dy \cdot \frac{1}{\left\{(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Ponghiamo per comodità

[8] $$\frac{1}{\left\{(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}=F$$

$$x-X=p$$
$$y-Y=q$$
$$z-Z=r;$$

avremo, eseguendo la prima integrazione,

[9] $$\int dy\cdot F=\frac{1}{p^2+r^2}\cdot\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}+\text{Cost.}$$

come non è difficile a trovarsi, e come la *derivazione* immediatamente convince. Perciò estendendo l'integrale fra i suoi limiti, si avrà

[10] $$\int_0^h dy\cdot F=\frac{1}{p^2+r^2}\cdot\frac{h-Y}{\sqrt{p^2+r^2+(h-Y)^2}}+\frac{1}{p^2+r^2}\cdot\frac{Y}{\sqrt{p^2+r^2+Y^2}}.$$

La seconda integrazione ci dà immediatamente

[11] $$\int dY\int_0^h dy\cdot F=-\frac{1}{p^2+r^2}\cdot\sqrt{p^2+r^2+(h-Y)^2}+\frac{1}{p^2+r^2}\cdot\sqrt{p^2+r^2+Y^2}+\text{Cost.}$$

e però

[12] $$\int_0^h dY\int_0^h dy\cdot F=\frac{2}{p^2+r^2}\sqrt{p^2+r^2+h^2}-\frac{2}{\sqrt{p^2+r^2}}.$$

Venendo alla terza integrazione, avremo

$$\int dz \int_0^h dY \int_0^h dy \cdot F = \int dz \cdot \left\{ \frac{2}{p^2+r^2} \sqrt{p^2+r^2+h^2} - \frac{2}{\sqrt{p^2+r^2}} \right\}$$

$$= \int dz \left(\frac{dr}{dz}\right) \cdot \frac{2}{\left(\frac{dr}{dz}\right)} \left\{ \frac{p^2+r^2+h^2}{(p^2+r^2)\sqrt{p^2+r^2+h^2}} - \frac{1}{\sqrt{p^2+r^2}} \right\}$$

$$= \int dr \cdot 2 \left\{ -\frac{1}{\sqrt{p^2+r^2}} + \frac{1}{\sqrt{p^2+r^2+h^2}} + \frac{h^2}{(p^2+r^2)\sqrt{p^2+r^2+h^2}} \right\}$$

$$= -2 \log.\left(r + \sqrt{p^2+r^2}\right) + 2 \log.\left(r + \sqrt{p^2+r^2+h^2}\right)$$

$$+ 2h^2 \int dr \cdot \frac{1}{(p^2+r^2)\sqrt{p^2+r^2+h^2}} \ (1),$$

Per ridurre razionale l' espressione che rimane ancora sotto il segno d' integrazione si presentano due maniere, cioè

1.° di porre

$$\sqrt{p^2+r^2+h^2} = \sqrt{p^2+h^2} + ru$$

essendo u una nuova variabile; con che si ha

$$r = 2\sqrt{p^2+r^2} \cdot \frac{u}{1-u^2}$$

$$\int dr \cdot \frac{1}{p^2+r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{p^2+r^2+h^2}} = \int du \cdot \left(\frac{dr}{du}\right) \frac{1}{(p^2+r^2)\sqrt{p^2+r^2+h^2}}$$

$$= \int du \cdot \frac{2(1-u^2)}{p^2(1-u^2)^2 + 4(p^2+h^2)u^2};$$

2.° di fare

$$\sqrt{p^2+r^2+h^2} = r + t\sqrt{p^2+h^2},$$

essendo similmente t una nuova variabile; donde si ha

$$r = \frac{1-t^2}{2t}\sqrt{p^2+h^2}$$

$$\sqrt{p^2+r^2+h^2} = \frac{1+t^2}{2t}\sqrt{p^2+h^2}$$

$$p^2+r^2 = \left(\sqrt{p^2+r^2+h^2}\right)^2 - h^2 = \frac{(p^2+h^2)(1+t^2)^2 - 4h^2t^2}{4t^2}$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right) = -\frac{(1+t^2)}{2t^2}\sqrt{p^2+h^2},$$

---

(1) Serve l'abbreviazione log., e talora la semplice l., per simbolo (come è di costume) de' logaritmi iperbolici. Occorrerà più innanzi di far uso de' logaritmi tavolari; e questi noi gli indicheremo col simbolo Log., ovvero con la semplice L., come si avvertirà a suo luogo.

e perciò $\int dr \cdot \frac{1}{(p^2+r^2)\sqrt{p^2+r^2+h^2}} = \int dt \cdot \left(\frac{dr}{dt}\right) \frac{1}{(p^2+r^2)\sqrt{p^2+r^2+h^2}}$

$$= -4\int dt \cdot \frac{t}{(p^2+h^2)(1+t^2)^2 - 4h^2t^2}.$$

Di queste due maniere noi preferiremo la seconda, siccome quella che facilmente permette di ridurre l'espressione da integrarsi ad avere un denominatore di secondo grado. Ponendo adunque

$$t^2 = s, \quad \text{e poscia} \quad s + \frac{p^2-h^2}{p^2+h^2} = \omega, \quad \text{si avrà}$$

$$\int dr \cdot \frac{1}{(p^2+r^2)\sqrt{p^2+r^2+h^2}} = -4\int dt \cdot \frac{t}{(p^2+h^2)(1+s)^2 - 4h^2s}$$

$$= -2\int ds \cdot \frac{1}{p^2+h^2+2(p^2-h^2)s+(p^2+h^2)s^2}$$

$$= -2\int d\omega \cdot \frac{1}{(p^2+h^2)\left\{\omega^2 + \frac{4p^2h^2}{(p^2+h^2)^2}\right\}}$$

$$= -\frac{1}{ph}\,\text{Arc.tan.}\left\{\frac{(p^2+h^2)\omega}{2ph}\right\} + \text{Cost.}$$

$$= -\frac{1}{ph}\,\text{Arc.tan.}\left\{\frac{(p^2+h^2)s+p^2-h^2}{2ph}\right\} + \text{Cost.}$$

$$= -\frac{1}{ph}\,\text{Arc.tan.}\left\{\frac{(p^2+h^2)t^2+p^2-h^2}{2ph}\right\} + \text{Cost.}$$

$$= -\frac{1}{ph}\,\text{Arc.tan.}\left\{\frac{p^2-h^2+(\sqrt{p^2+h^2+r^2}-r)^2}{2ph}\right\} + \text{Cost.}$$

$$= -\frac{1}{ph}\left\{\text{Arc.tan.}\frac{p\sqrt{p^2+h^2+r^2}}{hr} - \text{Arc.tan.}\frac{h}{p}\right\} + \text{Cost.}$$

$$= +\frac{1}{ph}\left\{\text{Arc.tan.}\frac{hr}{p\sqrt{p^2+h^2+r^2}} - \frac{\pi}{2} + \text{Arc.tan.}\frac{h}{p}\right\} + \text{Cost.}$$

E siccome la quantità

$$\frac{1}{ph}\left(\text{Arc. tan. }\frac{h}{p} - \frac{\pi}{2}\right)$$

per riguardo alla r si può considerare come costante, così sarà in fine

[13] $$\int dr \cdot \frac{1}{(p^2+r^2)\sqrt{p^2+h^2+r^2}} = \frac{1}{ph}\,\text{Arc. tan.}\,\frac{hr}{p\sqrt{p^2+h^2+r^2}} + \text{Cost.}$$

Pertanto sarà

[14] $$\int dz \int_0^h dY \int_0^h dy \cdot F = -2\log.(r+\sqrt{p^2+r^2}) + 2\log.(r+\sqrt{p^2+r^2+h^2})$$
$$+ \frac{2h}{p}\,\text{Arc. tan.}\,\frac{hr}{p\sqrt{p^2+h^2+r^2}} + \text{Cost.};$$

ed estendendo l'integrale fra i suoi limiti,

$$[15]\ \int_0^h dz\int_0^h dY\int_0^h dy\cdot F = -2\,\mathrm{l.}\left(h-Z+\sqrt{p^2+(h-Z)^2}\right)+2\,\mathrm{l.}\left(h-Z+\sqrt{p^2+h^2+(h-Z)^2}\right)$$

$$+\frac{2h}{p}\,\mathrm{Arc.tan.}\frac{h(h-Z)}{p\sqrt{p^2+h^2+(h-Z)^2}}+2\,\mathrm{l.}\left(-Z+\sqrt{p^2+Z^2}\right)$$

$$-2\,\mathrm{l.}\left(-Z+\sqrt{p^2+h^2+Z^2}\right)-\frac{2h}{p}\,\mathrm{Arc.tan.}\frac{-hZ}{p\sqrt{p^2+h^2+Z^2}},$$

dove i due archi si prenderanno entrambi fra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$; imperciocchè non potendo la tangente

$$\frac{hr}{p\sqrt{p^2+h^2+r^2}}$$

col variare della r passare per valori infiniti, se noi prenderemo fra quei limiti l'arco che le corrisponde per un dato valore di z (come ne abbiamo l'arbitrio), dovremo contenerci fra i limiti medesimi per un altro valore di z qualsivoglia.

Venendo alla quarta integrazione avremo

$$[16]\ \int dZ\int_0^h dz\int_0^h dY\int_0^h dy\cdot F = Z\int_0^h dz\int_0^h dY\int_0^h dy\cdot F - \int dZ\cdot Z\left[\frac{d\left(\int_0^h dz\int_0^h dY\int_0^h dy\cdot F\right)}{dZ}\right]$$

$$= A + B$$

indicando con A e B i due termini del secondo membro presi co' loro segni. Lasciando per ora da banda la A siccome facilissima ad aversi, facciamoci a ricercare il valore di B.

È ovvio il vedere che può farsi

$$\int_0^h dz\int_0^h dY\int_0^h dy\cdot F = \psi(h-Z)-\psi(o-Z),$$

essendo la forma della funzione ψ data dall' equazione

$$\psi(r) = -2\,\mathrm{l.}\left(r+\sqrt{p^2+r^2}\right)+2\,\mathrm{l.}\left(r+\sqrt{p^2+h^2+r^2}\right)+\frac{2h}{p}\,\mathrm{Arc.tan.}\frac{hr}{p\sqrt{p^2+h^2+r^2}}.$$

Ora

$$\left(\frac{d\psi(r)}{dr}\right) = \int_0^h dY\int_0^h dy\cdot F = \frac{2\sqrt{p^2+h^2+r^2}}{p^2+r^2}-\frac{2}{\sqrt{p^2+r^2}},$$

e però

$$\left(\frac{d\psi(h-Z)}{dZ}\right) = \left[\frac{d\psi(h-Z)}{d(h-Z)}\right]\left[\frac{d(h-Z)}{dZ}\right] = -\left[\frac{d\psi(h-Z)}{d(h-Z)}\right]$$

$$= -\frac{2\sqrt{p^2+h^2+(h-Z)^2}}{p^2+(h-Z)^2}+\frac{2}{\sqrt{p^2+(h-Z)^2}}$$

$$\left(\frac{d\psi(o-Z)}{dZ}\right) = -\left[\frac{d\psi(o-Z)}{d(o-Z)}\right] = -\frac{2\sqrt{p^2+h^2+Z^2}}{p^2+Z^2}+\frac{2}{\sqrt{p^2+Z^2}}.$$

Sarà dunque

$$B=-\int dZ\cdot Z\left\{-\frac{2\sqrt{p^2+h^2+(h-Z)^2}}{p^2+(h-Z)^2}+\frac{2}{\sqrt{p^2+(h-Z)^2}}+\frac{2\sqrt{p^2+h^2+Z^2}}{p^2+Z^2}-\frac{2}{\sqrt{p^2+Z^2}}\right\}$$

$$=\int dZ\cdot\frac{2Z}{\sqrt{p^2+Z^2}}-\int dZ\cdot\frac{2Z\sqrt{p^2+h^2+Z^2}}{p^2+Z^2}-\int dZ\cdot\frac{2Z}{\sqrt{p^2+(h-Z)^2}}$$

$$+\int dZ\cdot\frac{2Z\sqrt{p^2+h^2+(h-Z)^2}}{p^2+(h-Z)^2},$$

essendosi nell'ultimo de' due secondi membri rovesciato l'ordine de' termini per lasciare in fine il più difficile ad integrarsi. Indicando rispettivamente questi termini presi co' loro segni per mezzo delle lettere C, D, E, F, sarà

$$B=C+D+E+F.$$

Ora

$$C=\int dZ\cdot\frac{2Z}{\sqrt{p^2+Z^2}}=2\sqrt{p^2+Z^2}+\text{Cost.}$$

$$D=-\int dZ\cdot\frac{2Z\sqrt{p^2+h^2+Z^2}}{p^2+Z^2}=-2\int dZ\cdot\frac{Z(p^2+h^2+Z^2)}{(p^2+Z^2)\sqrt{p^2+h^2+Z^2}}$$

$$=-2\int dZ\cdot\frac{Z}{\sqrt{p^2+h^2+Z^2}}-2h^2\int dZ\cdot\frac{Z}{(p^2+Z^2)\sqrt{p^2+h^2+Z^2}}$$

$$=-2\sqrt{p^2+h^2+Z^2}-h\log.(p^2+Z^2)+2h\log.\left(h+\sqrt{p^2+h^2+Z^2}\right)+\text{Cost.}$$

$$E=-\int dZ\cdot\frac{2Z}{\sqrt{p^2+(h-Z)^2}}=-2\int dZ\cdot\frac{h-h+Z}{\sqrt{p^2+(h-Z)^2}}$$

$$=-2h\int dZ\cdot\frac{1}{\sqrt{p^2+(h-Z)^2}}+2\int dZ\cdot\frac{h-Z}{\sqrt{p^2+(h-Z)^2}}$$

$$=2h\log.\left(h-Z+\sqrt{p^2+(h-Z)^2}\right)-2\sqrt{p^2+(h-Z)^2}+\text{Cost.}$$

$$F=\int dZ\cdot\frac{2Z\sqrt{p^2+h^2+(h-Z)^2}}{p^2+(h-Z)^2}=2\int dZ\cdot\frac{(Z+h-h)\sqrt{p^2+h^2+(h-Z)^2}}{p^2+(h-Z)^2}$$

$$=-2\int dZ\cdot\frac{(h-Z)\sqrt{p^2+h^2+(h-Z)^2}}{p^2+(h-Z)^2}+2h\int dZ\cdot\frac{\sqrt{p^2+h^2+(h-Z)^2}}{p^2+(h-Z)^2}$$

$$=-2\int dZ\cdot\frac{(h-Z)\sqrt{p^2+h^2+(h-Z)^2}}{p^2+(h-Z)^2}+2h\int dZ\cdot\frac{p^2+h^2+(h-Z)^2}{[p^2+(h-Z)^2]\sqrt{p^2+h^2+(h-Z)^2}}$$

$$=-2\int dZ\cdot\frac{(h-Z)\sqrt{p^2+h^2+(h-Z)^2}}{p^2+(h-Z)^2}+2h\int dZ\cdot\frac{1}{\sqrt{p^2+h^2+(h-Z)^2}}$$

$$+2h^3\int dZ\cdot\frac{1}{[p^2+(h-Z)^2]\sqrt{p^2+h^2+(h-Z)^2}}$$

$$=L+M+N,$$

indicandosi per ordine con L, M, N i tre termini del penultimo secondo membro presi co' loro segni.

Il primo di questi termini, cioè L, è similissimo a quello indicato poco sopra con D, e per farli coincidere altro non occorrerebbe che porre in D la quantità $(h-Z)$ in luogo di Z, e cangiare il segno a tutto il termine. Sarà dunque

$$L=2\sqrt{p^2+h^2+(h-Z)^2}+h\,\mathrm{l}.[p^2+(h-Z)^2]-2h\,\mathrm{l}.\left(h+\sqrt{p^2+h^2+(h-Z)^2}\right)+\mathrm{Cost.}$$

Venendo al secondo, dalle più note formole si ha

$$M=2h\int dZ\cdot\frac{1}{\sqrt{p^2+h^2+(h-Z)^2}}=-2h\int dZ\cdot\left[\frac{d(h-Z)}{dZ}\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{p^2+h^2+(h-Z)^2}}$$

$$=-2h\int d(h-Z)\cdot\frac{1}{\sqrt{p^2+h^2+(h-Z)^2}}$$

$$=-2h\log.\left(h-Z+\sqrt{p^2+h^2+(h-Z)^2}\right)+\mathrm{Cost.}$$

Finalmente la N si assomiglia al primo membro dell'equazione [13]; perciò si avrà

$$N=-2h^3\int dZ\cdot\left[\frac{d(h-Z)}{dZ}\right]\cdot\frac{1}{[p^2+(h-Z)^2]\sqrt{p^2+h^2+(h-Z)^2}}$$

$$=-\frac{2h^2}{p}\mathrm{Arc.tan.}\frac{h(h-Z)}{p\sqrt{p^2+h^2+(h-Z)^2}}+\mathrm{Cost.}$$

dove similmente l'arco si prenderà sempre fra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$ per la medesima ragione detta più sopra, cioè che la sua tangente non passa mai pel valore infinito.

Adunque raccogliendo i tre termini L, M, N sarà

$$F=2\sqrt{p^2+h^2+(h-Z)^2}+h\log.[p^2+(h-Z)^2]-2h\log.\left(h+\sqrt{p^2+h^2+(h-Z)^2}\right)$$
$$-2h\log.\left(h-Z+\sqrt{p^2+h^2+(h-Z)^2}\right)-\frac{2h^2}{p}\mathrm{Arc.tan.}\frac{h(h-Z)}{p\sqrt{p^2+h^2+(h-Z)^2}}+\mathrm{Cost.}$$

e riunendo i quattro C, D, E, F formanti il valore di B, si avrà

$$B=2\sqrt{p^2+Z^2}-2\sqrt{p^2+h^2+Z^2}-h\log.(p^2+Z^2)+2h\log.\left(h+\sqrt{p^2+h^2+Z^2}\right)$$
$$+2h\log.\left(h-Z+\sqrt{p^2+(h-Z)^2}\right)-2\sqrt{p^2+(h-Z)^2}+2\sqrt{p^2+h^2+(h-Z)^2}$$
$$+h\log.[p^2+(h-Z)^2]-2h\log.\left(h+\sqrt{p^2+h^2+(h-Z)^2}\right)$$
$$-2h\log.\left(h-Z+\sqrt{p^2+h^2+(h-Z)^2}\right)-\frac{2h^2}{p}\mathrm{Arc.tan.}\frac{h(h-Z)}{p\sqrt{p^2+h^2+(h-Z)^2}}+\mathrm{Cost.};$$

ed essendo

$$A = -2Z\log.\left(h-Z+\sqrt{p^2+(h-Z)^2}\right)+2Z\log.\left(h-Z+\sqrt{p^2+h^2+(h-Z)^2}\right)$$
$$+\frac{2hZ}{p}\text{Arc. tan.}\frac{h(h-Z)}{p\sqrt{p^2+h^2+(h-Z)^2}}+2Z\log.\left(-Z+\sqrt{p^2+Z^2}\right)$$
$$-2Z\log.\left(-Z+\sqrt{p^2+h^2+Z^2}\right)-\frac{2hZ}{p}\text{Arc. tan.}\frac{-hZ}{p\sqrt{p^2+h^2+Z^2}}$$

si ha

$$[17]\ \int dZ\int_0^h dz\int_0^h dY\int_0^h dy\cdot F = 2\sqrt{p^2+Z^2}-2\sqrt{p^2+h^2+Z^2}-2\sqrt{p^2+(h-Z)^2}$$
$$+2\sqrt{p^2+h^2+(h-Z)^2}-h\,\text{l.}(p^2+Z^2)+2h\,\text{l.}\left(h+\sqrt{p^2+h^2+Z^2}\right)$$
$$+2(h-Z)\,\text{l.}\left(h-Z+\sqrt{p^2+(h-Z)^2}\right)$$
$$+h\,\text{l.}[p^2+(h-Z)^2]-2h\,\text{l.}\left(h+\sqrt{p^2+h^2+(h-Z)^2}\right)$$
$$-2(h-Z)\,\text{l.}\left(h-Z+\sqrt{p^2+h^2+(h-Z)^2}\right)$$
$$+2Z\,\text{l.}\left(-Z+\sqrt{p^2+Z^2}\right)-2Z\,\text{l.}\left(-Z+\sqrt{p^2+h^2+Z^2}\right)$$
$$-\frac{2h(h-Z)}{p}\text{Arc. tan.}\frac{h(h-Z)}{p\sqrt{p^2+h^2+(h-Z)^2}}$$
$$-\frac{2hZ}{p}\text{Arc. tan.}\frac{-hZ}{p\sqrt{p^2+h^2+Z^2}}+\text{Cost.}$$

Ed estendendo l' integrazione fra i dovuti limiti, e facendo la riduzione de' termini simili, sarà

$$[18]\ \int_0^h dZ\int_0^h dz\int_0^h dY\int_0^h dy\cdot F = -4p+8\sqrt{p^2+h^2}-4\sqrt{p^2+2h^2}$$
$$+4h\,\text{l.}p-2h\,\text{l.}(p^2+h^2)-6h\,\text{l.}\left(h+\sqrt{p^2+h^2}\right)$$
$$+2h\,\text{l.}\left(-h+\sqrt{p^2+h^2}\right)+6h\,\text{l.}\left(h+\sqrt{p^2+2h^2}\right)$$
$$-2h\,\text{l.}\left(-h+\sqrt{p^2+2h^2}\right)+\frac{4h^2}{p}\text{Arc. tan.}\frac{h^2}{p\sqrt{p^2+2h^2}}$$

e siccome si ha

$$4\log.p = 2\log.p^2 = 2\log.\left(h+\sqrt{p^2+h^2}\right)+2\log.\left(-h+\sqrt{p^2+h^2}\right)$$
$$-2\log.(p^2+h^2) = -2\log.\left(h+\sqrt{p^2+2h^2}\right)-2\log.\left(-h+\sqrt{p^2+2h^2}\right)$$

sarà finalmente

$$[19]\ \int_0^h dZ\int_0^h dz\int_0^h dY\int_0^h dy\cdot F = -4p+8\sqrt{p^2+h^2}-4\sqrt{p^2+2h^2}+4h\,\text{l.}\left(-h+\sqrt{p^2+h^2}\right)$$
$$-4h\,\text{l.}\left(h+\sqrt{p^2+h^2}\right)+4h\,\text{l.}\left(h+\sqrt{p^2+2h^2}\right)$$
$$-4h\,\text{l.}\left(-h+\sqrt{p^2+2h^2}\right)+\frac{4h^2}{p}\text{Arc.tan.}\frac{h^2}{p\sqrt{p^2+2h^2}}.$$

Ci rimangono le due ultime integrazioni, vale a dire ci resta a ridurre a comune forma algebraica la quantità

$$\int_0^h dX \int_h^{2h} dx \cdot \left\{ (x-X) \int_0^h dZ \int_0^h dz \int_0^h dY \int_0^h dy \cdot F \right\}$$

ossia, rimettendo $(x-X)$ in luogo di p nel secondo membro della [19], la quantità

$$[20] \int_0^h dX \int_h^{2h} dx \cdot \Big\{ -4(x-X)^2 + 8(x-X)\sqrt{h^2+(x-X)^2} - 4(x-X)\sqrt{2h^2+(x-X)^2}$$
$$+4h(x-X)\,\mathrm{l.}\left(-h+\sqrt{h^2+(x-X)^2}\right) - 4h(x-X)\,\mathrm{l.}\left(h+\sqrt{h^2+(x-X)^2}\right)$$
$$+4h(x-X)\,\mathrm{l.}\left(h+\sqrt{2h^2+(x-X)^2}\right) - 4h(x-X)\,\mathrm{l.}\left(-h+\sqrt{2h^2+(x-X)^2}\right)$$
$$+4h^2 \cdot \text{Arc. tan.} \frac{h^2}{(x-X)\sqrt{2h^2+(x-X)^2}} \Big\}.$$

Indichiamo la quantità contenuta sotto le grandi parentesi con

$\Pi(x-X)$; si tratterà di trovare $\int_0^h dX \int_h^{2h} dx \cdot \Pi(x-X)$.

Facendo a tal uopo nuovamente $(x-X)=p$, avremo

$$\int dx \cdot \Pi(x-X) = \int dx \cdot \left(\frac{dp}{dx}\right) \cdot \Pi(p) = \int dp \cdot \Pi(p) = {}'\Pi(p) + \text{Cost.}$$

dove con $'\Pi(p)$ si vuol indicare una funzione primitiva particolare di $\Pi(p)$ formata semplicemente di p e di costanti. Ora essendo

$$[21] \quad \Pi(p) = -4p^2 + 8p\sqrt{p^2+h^2} - 4p\sqrt{p^2+2h^2} + 4ph \cdot \log.\left(-h+\sqrt{p^2+h^2}\right)$$
$$-4ph \cdot \log.\left(h+\sqrt{p^2+h^2}\right) + 4ph \cdot \log.\left(h+\sqrt{p^2+2h^2}\right)$$
$$-4ph \cdot \log.\left(-h+\sqrt{p^2+2h^2}\right) + 4h^2 \cdot \text{Arc. tan.} \frac{h^2}{p\sqrt{p^2+2h^2}},$$

colla integrazione per parti si avrà, previe alcune riduzioni sull'ultimo termine,

$$'\Pi(p) = -\frac{4}{3}p^3 + \frac{8}{3}(p^2+h^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}(p^2+2h^2)^{\frac{3}{2}}$$
$$+2p^2h \cdot \log.\left(-h+\sqrt{p^2+h^2}\right) - \int dp \cdot \left(2p^2h \cdot \frac{1}{-h+\sqrt{p^2+h^2}} \cdot \frac{p}{\sqrt{p^2+h^2}}\right)$$
$$-2p^2h \cdot \log.\left(h+\sqrt{p^2+h^2}\right) + \int dp \cdot \left(2p^2h \cdot \frac{1}{h+\sqrt{p^2+h^2}} \cdot \frac{p}{\sqrt{p^2+h^2}}\right)$$
$$+2p^2h \cdot \log.\left(h+\sqrt{p^2+2h^2}\right) - \int dp \cdot \left(2p^2h \cdot \frac{1}{h+\sqrt{p^2+2h^2}} \cdot \frac{p}{\sqrt{p^2+2h^2}}\right)$$
$$-2p^2h \cdot \log.\left(-h+\sqrt{p^2+2h^2}\right) + \int dp \cdot \left(2p^2h \cdot \frac{1}{-h+\sqrt{p^2+2h^2}} \cdot \frac{p}{\sqrt{p^2+2h^2}}\right)$$
$$+4ph^2 \cdot \text{Arc. tan.} \frac{h^2}{p\sqrt{p^2+2h^2}} + \int dp \cdot \left(4ph^2 \cdot \frac{2h^3}{(p^2+h^2)\sqrt{p^2+2h^2}}\right).$$

Unendo insieme i primi due de' termini che ancora trovansi sotto il simbolo d' integrazione, se ne ha

$$-\int dp \cdot \frac{4ph^2}{\sqrt{p^2+h^2}},$$

e dagli altri tre dopo qualche riduzione si ha

$$\int dp \cdot \frac{4ph^2}{\sqrt{p^2+2h^2}} + \int dp \cdot \frac{4ph^4}{(p^2+h^2)\sqrt{p^2+2h^2}};$$

perciò questi cinque termini, fatta la integrazione, danno

$$-4h^2\sqrt{p^2+h^2}+4h^2\sqrt{p^2+2h^2}+4h^4\left\{\frac{1}{2h}\,\mathrm{l.}(p^2+h^2)-\frac{1}{h}\,\mathrm{l.}\left(h+\sqrt{p^2+2h^2}\right)\right\}+\text{Cost.}$$

ossia, fatta una facile riduzione,

$$-4h^2\sqrt{p^2+h^2}+4h^2\sqrt{p^2+2h^2}+2h^3\,\mathrm{l.}\left(-h+\sqrt{p^2+2h^2}\right)-2h^3\,\mathrm{l.}\left(h+\sqrt{p^2+2h^2}\right)+\text{Cost.}$$

In conseguenza di che si avrà

$$[22] \quad {}'\Pi(p)=-\frac{4}{3}p^3+\frac{8}{3}(p^2+h^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{3}(p^2+2h^2)^{\frac{3}{2}}-4h^2\sqrt{p^2+h^2}+4h^2\sqrt{p^2+2h^2}$$
$$+2p^2h\left\{\log.\left(-h+\sqrt{p^2+h^2}\right)-\log.\left(h+\sqrt{p^2+h^2}\right)\right\}$$
$$+(2p^2h-2h^3)\left\{\log.\left(h+\sqrt{p^2+2h^2}\right)-\log.\left(-h+\sqrt{p^2+2h^2}\right)\right\}$$
$$+4ph^2\cdot\text{Arc.tan.}\frac{h^2}{p\sqrt{p^2+2h^2}},$$

dalla quale equazione si potrà avere il quinto integrale definito, essendo

$$\int_h^{2h} dx\cdot(x-X)\int_0^h dZ\int_0^h dz\int_0^h dY\int_0^h dy\cdot F=\int_h^{2h} dx\cdot\Pi(x-X)={}'\Pi(2h-X)-{}'\Pi(h-X).$$

Ma senza trattenerci ad effettuare questa sostituzione, passiamo all' ultima integrazione. Cominciamo dall' osservare che

$$\int dX\int_h^{2h} dx\int_0^h dZ\int_0^h dz\int_0^h dY\int_0^h dy\cdot\frac{(x-X)}{\left\{(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$
$$=\int dX\cdot{}'\Pi(2h-X)-\int dX\cdot{}'\Pi(h-X)$$
$$=-\int dX\cdot\left(\frac{d(2h-X)}{dX}\right)\cdot{}'\Pi(2h-X)+\int dX\cdot\left(\frac{d(h-X)}{dX}\right)\cdot{}'\Pi(h-X)$$
$$=-\int d(2h-X)\cdot{}'\Pi(2h-X)+\int d(h-X)\cdot{}'\Pi(h-X)$$
$$=-{}''\Pi(2h-X)+{}''\Pi(h-X)+\text{Cost.},$$

indicandosi con $''\Pi(2h-X)$, e $''\Pi(h-X)$ ciò che si otterrebbe prendendo la funzione primitiva di $'\Pi(p)$ per rispetto a p, cioè determinando la funzione $''\Pi(p)$, e sostituendovi rispettivamente la quantità $(2h-X)$ e la $(h-X)$ in luogo di p; ben inteso che in $''\Pi(p)$ non si trovi contenuta la X esplicitamente, ma solo vi sia la p e delle costanti. Estendendo poi l' integrale fra i

suoi limiti sarà

$$\int_0^h dX\int_h^{2h} dx\int_0^h dZ\int_0^h dz\int_0^h dY\int_0^h dy\cdot\frac{(x-X)}{\left\{(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-''\Pi(h)+''\Pi(0)+''\Pi(2h)-''\Pi(h)$$

$$=''\Pi(0)+''\Pi(2h)-2''\Pi(h).$$

Converrà adunque ricercare $''\Pi(p)$.

Richiamando l'equazione [22] e integrando per parti i termini trascendenti noi avremo

$$''\Pi(p)=-\frac{1}{3}p^4+\int dp\cdot\frac{8}{3}(p^2+h^2)^{\frac{3}{2}}-\int dp\cdot\frac{4}{3}(p^2+2h^2)^{\frac{3}{2}}-\int dp\cdot 4h^2\sqrt{p^2+h^2}$$
$$+\int dp\cdot 4h^2\sqrt{p^2+2h^2}+\frac{2}{3}p^3h\left\{\log.\left(-h+\sqrt{p^2+h^2}\right)-\log.\left(h+\sqrt{p^2+h^2}\right)\right\}$$
$$-\int dp\cdot\frac{2}{3}p^3h\left\{\frac{1}{-h+\sqrt{p^2+h^2}}\cdot\frac{p}{\sqrt{p^2+h^2}}-\frac{1}{h+\sqrt{p^2+h^2}}\cdot\frac{p}{\sqrt{p^2+h^2}}\right\}$$
$$+\left(\frac{2}{3}p^3h-2ph^3\right)\left\{\log.\left(h+\sqrt{p^2+2h^2}\right)-\log.\left(-h+\sqrt{p^2+2h^2}\right)\right\}$$
$$-\int dp\cdot\left(\frac{2}{3}p^3h-2ph^3\right)\left\{\frac{1}{h+\sqrt{p^2+2h^2}}\cdot\frac{p}{\sqrt{p^2+2h^2}}-\frac{1}{-h+\sqrt{p^2+2h^2}}\cdot\frac{p}{\sqrt{p^2+2h^2}}\right\}$$
$$+2p^2h^2\cdot\text{Arc.tan.}\frac{h^2}{p\sqrt{p^2+2h^2}}+\int dp\cdot\frac{4p^2h^4}{(p^2+h^2)\sqrt{p^2+2h^2}};$$

e potendo l'ultimo de' termini che trovansi sotto il simbolo d'integrazione, unito col penultimo de' medesimi, ridursi a

$$\int dp\cdot\frac{4}{3}h^2\cdot\frac{p^2-h^2}{\sqrt{p^2+2h^2}}+\int dp\cdot\frac{4}{3}h^6\cdot\frac{1}{(p^2+h^2)\sqrt{p^2+2h^2}},$$

e il terzultimo preso col suo segno a $-\int dp\cdot\frac{4}{3}p^2h^2\cdot\frac{1}{\sqrt{p^2+h^2}}$, sarà anche

$$''\Pi(p)=-\frac{1}{3}p^4+\frac{2}{3}p^3h\left\{\log.\left(-h+\sqrt{p^2+h^2}\right)-\log.\left(h+\sqrt{p^2+h^2}\right)\right\}$$
$$+\left(\frac{2}{3}p^3h-2ph^3\right)\left\{\log.\left(h+\sqrt{p^2+2h^2}\right)-\log.\left(-h+\sqrt{p^2+2h^2}\right)\right\}$$
$$+2p^2h^2\cdot\text{Arc. tan.}\frac{h^2}{p\sqrt{p^2+2h^2}}$$
$$+\int dp\cdot\left\{\frac{8}{3}(p^2+h^2)^{\frac{3}{2}}-4h^2\sqrt{p^2+h^2}-\frac{4}{3}p^2h^2\cdot\frac{1}{\sqrt{p^2+h^2}}\right\}$$
$$+\int dp\cdot\left\{-\frac{4}{3}(p^2+2h^2)^{\frac{3}{2}}+4h^2\sqrt{p^2+2h^2}+\frac{4}{3}h^2\cdot\frac{p^2-h^2}{\sqrt{p^2+2h^2}}\right\}$$
$$+\int dp\cdot\frac{4}{3}h^6\cdot\frac{1}{(p^2+h^2)\sqrt{p^2+2h^2}}.$$

Ora in quest' ultima equazione, per riguardo al primo termine da integrarsi, noi abbiamo

$$\int dp \cdot \left\{\frac{8}{3}(p^2+h^2)^{\frac{3}{2}} - 4h^2\sqrt{p^2+h^2} - \frac{4}{3}p^2h^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{p^2+h^2}}\right\}$$

$$= \int dp \cdot \left(\frac{8}{3}p^4 - \frac{4}{3}h^4\right)\frac{1}{\sqrt{p^2+h^2}}$$

$$= \left(\frac{2}{3}p^3 - ph^2\right)\sqrt{p^2+h^2} - \int dp \cdot \frac{h^4}{3\sqrt{p^2+h^2}}$$

$$= \left(\frac{2}{3}p^3 - ph^2\right)\sqrt{p^2+h^2} - \frac{1}{3}h^4 \cdot \log.\left(p+\sqrt{p^2+h^2}\right) + \text{Cost.}$$

Il secondo de' termini da integrarsi si può decomporre in due parti, cioè si può mettere sotto la forma

$$\int dp \cdot \left\{-\frac{4}{3}(p^2+2h^2)^{\frac{3}{2}} + 4h^2\sqrt{p^2+2h^2} + \frac{4}{3}p^2h^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{p^2+2h^2}}\right\} - \int dp \cdot \frac{4}{3}h^4 \cdot \frac{1}{\sqrt{p^2+2h^2}},$$

dove la prima parte è la stessa cosa che l'integrale or ora trattato, moltiplicato per $-\frac{1}{2}$, e postovi $2h^2$ in luogo di h^2. Perciò esso secondo termine da integrarsi sarà uguale a

$$-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{2}{3}p^3 - 2ph^2\right)\sqrt{p^2+2h^2} - \frac{4}{3}h^4 \log.\left(p+\sqrt{p^2+2h^2}\right)\right\} - \frac{4}{3}h^4 \log.\left(p+\sqrt{p^2+2h^2}\right) + \text{Cost.}$$

ossia a $\left(-\frac{1}{3}p^3 + ph^2\right)\sqrt{p^2+2h^2} - \frac{2}{3}h^4 \log.\left(p+\sqrt{p^2+2h^2}\right) + \text{Cost.}$

Finalmente per rispetto al terzo termine avremo, come già si è trovato poco sopra (veggasi l'equazione [13], e vi si cangino la r e la p rispettivamente in p, h),

$$\int dp \cdot \frac{4}{3}h^6 \cdot \frac{1}{(p^2+h^2)\sqrt{p^2+2h^2}} = \frac{4}{3}h^4 \cdot \text{Arc.tan.}\frac{p}{\sqrt{p^2+2h^2}} + \text{Cost.},$$

intendendo che l'arco venga preso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$, come più sopra all'equazione [15]. Sarà pertanto

[23] $$''\Pi(p) = -\frac{1}{3}p^4 + \left(\frac{2}{3}p^3 - ph^2\right)\sqrt{p^2+h^2} - \left(\frac{1}{3}p^3 - ph^2\right)\sqrt{p^2+2h^2}$$
$$+ \frac{2}{3}p^3h \log.\left(\frac{-h+\sqrt{p^2+h^2}}{h+\sqrt{p^2+h^2}}\right) + \left(\frac{2}{3}p^3h - 2ph^3\right)\log.\left(\frac{h+\sqrt{p^2+2h^2}}{-h+\sqrt{p^2+2h^2}}\right)$$
$$- \frac{1}{3}h^4 \log.\left(p+\sqrt{p^2+h^2}\right) - \frac{2}{3}h^4 \cdot \log.\left(p+\sqrt{p^2+2h^2}\right)$$
$$+ 2p^2h^2 \cdot \text{Arc.tan.}\frac{h^2}{p\sqrt{p^2+2h^2}} + \frac{4}{3}h^4 \cdot \text{Arc.tan.}\frac{p}{\sqrt{p^2+2h^2}} + \text{Cost.}$$

Mettiamo ora successivamente in luogo di p le quantità *zero*, h, $2h$. Cominciando dalla determinazione di $''\Pi(0)$ noi incontriamo una difficoltà, la quale consiste nell' assegnare il valore al termine

$$\frac{2}{3}p^3h \cdot \log.\left(\frac{-h+\sqrt{p^2+h^2}}{h+\sqrt{p^2+h^2}}\right)$$

allorquando si fa $p=0$. Essendo questa espressione uguale a

$$\frac{2}{3}hp^2\cdot p\left\{\log.p^2-\log.\left(h+\sqrt{p^2+h^2}\right)-\log.\left(h+\sqrt{p^2+h^2}\right)\right\},$$

ossia a $\frac{4}{3}hp^2\cdot p\left\{\log.p-\log.\left(h+\sqrt{p^2+h^2}\right)\right\}$,

ridurrassi la difficoltà alla determinazione della quantità

$$p\log.p$$

pel caso che sia $p=0$. Facciamo perciò

$$p=e^{-\omega}$$

essendo e la base de' logaritmi iperbolici; avremo

$$\log.p=-\omega$$

$$p\log.p=-\frac{\omega}{e^{\omega}}$$

$$=-\frac{\omega}{1+\omega+\frac{\omega^2}{2}+\frac{\omega^3}{2\cdot3}+\frac{\omega^4}{2\cdot3\cdot4}+\text{ecc.}}$$

$$=-\frac{1}{\frac{1}{\omega}+1+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega^2}{2\cdot3}+\frac{\omega^3}{2\cdot3\cdot4}+\text{ecc.}}$$

intendendo co' denominatori de' due ultimi secondi membri di rappresentare i limiti a cui si vanno accostando le due serie a proporzione che si prende un maggior numero di termini. Ed è ovvio il vedere che le due serie, dopo un sufficiente numero di termini si rendono sempre convergenti qualunque sia la ω, e che perciò hanno sempre de' limiti determinati. Per avere ora il bramato valore di

$$p\log.p$$

pel caso di $p=0$, converrà porre nell'ultimo di que' secondi membri

$$\omega=\infty;$$

vale a dire converrà cercare il limite a cui si va gradatamente accostando il valore di quella frazione a proporzione che si aumenta la ω supposta di valor positivo. Osserveremo adunque che il denominatore di una tal frazione è formato di due parti, cioè

$$\frac{1}{\omega},\quad 1+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega^2}{2\cdot3}+\frac{\omega^3}{2\cdot3\cdot4}+\text{ecc.}$$

delle quali coll'aumentarsi dell'ω la prima diminuisce sino a potere divenir minore di qualsivoglia quantità data, e la seconda invece cresce fino a poter superare qualsivoglia assegnata grandezza. La lor somma perciò è di tale natura, che con un sufficiente ingrandimento della ω può divenir maggiore di ogni dato. La frazione adunque che ha questa somma per denominatore, è tale che a valori di ω sufficientemente grandi, ossia a valori positivi di p sufficien-

temente piccoli, avrà valori negativi i quali, prescindendo dal segno, potranno essere minori di qualsivoglia quantità data; ed avrà perciò per limite lo zero, cui si andrà continuamente accostando. E incomincerà la diminuzione quando ω superi 1, come si può vedere prendendo la derivata prima di

$$\omega e^{-\omega}$$

e osservando quando ella sia negativa. Ora se, mentre una data variabile si va accostando a un limite l, noi veggiamo che una funzione di questa variabile va continuamente avvicinandosi a un altro limite L, in tal caso noi concludiamo che fatta la variabile uguale a l, dee la funzione avere il valore L. Quando adunque si ha $p=0$, sarà

$$p \log. p = 0,$$

$$\text{e} \quad \frac{2}{3} p^3 h \log.\left(\frac{-h+\sqrt{p^2+h^2}}{h+\sqrt{p^2+h^2}}\right) = 0.$$

Avremo adunque

$$''\Pi(0) = -h^4 \log. h - \frac{1}{3} h^4 \log. 2 + \text{Cost.}$$

E sostituendo prima h e poi $2h$ in luogo di p nella equazione [23] avremo

$$''\Pi(h) = h^4 \Big\{ -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{2}{3}\log.\left(\frac{-1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right) - \frac{4}{3}\log.\left(\frac{1+\sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}}\right)$$
$$- \frac{1}{3}\log. h - \frac{1}{3}\log.(1+\sqrt{2}) - \frac{2}{3}\log. h - \frac{2}{3}\log.(1+\sqrt{3})$$
$$+ 2 \text{ Arc. tan. } \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3} \text{ Arc. tan. } \frac{1}{\sqrt{3}} \Big\} + \text{Cost.}$$

$$''\Pi(2h) = h^4 \Big\{ -\frac{16}{3} + \left(\frac{16}{3} - 2\right)\sqrt{5} - \left(\frac{8}{3} - 2\right)\sqrt{6} + \frac{16}{3}\log.\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)$$
$$+ \left(\frac{16}{3} - 4\right)\log.\left(\frac{1+\sqrt{6}}{-1+\sqrt{6}}\right) - \frac{1}{3}\log. h - \frac{1}{3}\log.(2+\sqrt{5}) - \frac{2}{3}\log. h$$
$$- \frac{2}{3}\log.(2+\sqrt{6}) + 8 \text{ Arc. tan. } \frac{1}{2\sqrt{6}} + \frac{4}{3} \text{ Arc. tan. } \frac{2}{\sqrt{6}} \Big\} + \text{Cost.},$$

essendo la costante tutte e tre le volte la medesima. Perciò, fatte le necessarie riduzioni, avremo

$$''\Pi(0) + ''\Pi(2h) - 2\,''\Pi(h)$$

ossia

$$\int_0^h dX \int_h^{2h} dx \int_0^h dZ \int_0^h dz \int_0^h dY \int_0^h dy \cdot \frac{(x-X)}{\left\{(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

uguale a

$$[24] \quad + \frac{1}{3} h^4 \Big\{ -14 + 2\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 10\sqrt{5} - 2\sqrt{6} + 23\,\text{l.}\,2 - 4\,\text{l.}\,5$$
$$+ 10\,\text{l.}(1+\sqrt{2}) + 20\,\text{l.}(1+\sqrt{3}) - 32\,\text{l.}(1+\sqrt{5}) + 8\,\text{l.}(1+\sqrt{6}) - \text{l.}(2+\sqrt{5})$$
$$- 2\,\text{l.}(2+\sqrt{6}) - 20 \text{ Arc. tan. } \frac{1}{\sqrt{3}} + 4 \text{ Arc. tan. } \frac{2}{\sqrt{6}} + 24 \text{ Arc. tan. } \frac{1}{2\sqrt{6}} \Big\}.$$

V.

Non rimangono ora a farsi che delle riduzioni numeriche, le quali io porrò qui sotto distesamente, affinchè men nojosa riesca la fatica a quei lettori che le vorranno rifare. Calcolando adunque dapprima le quantità algebraiche avremo

$$
\begin{array}{l|rl}
\sqrt{2}=1,41421356 & +\;2\sqrt{2}= & 2,8284271 \\
\sqrt{3}=1,73205081 & +10\sqrt{5}= & 22,3606798 \\
\sqrt{5}=2,23606798 & & +25,1891069 \\
\sqrt{6}=2,44948974 & -14\;\;= & -14 \\
 & -\;4\sqrt{3}= & -\;\;6,9282032 \\
 & -\;2\sqrt{6}= & -\;\;4,8989795 \\
 & & -25,8271827 \\
 & & +25,1891069 \\
 & & -\;\;0,6380758
\end{array}
$$

$$-14+2\sqrt{2}-4\sqrt{3}+10\sqrt{5}-2\sqrt{6}=\text{- - - - - - - - -}-0,6380758.$$

Indicando con λ il logaritmo iperbolico del 10, avremo

$$
\begin{array}{r|rl}
\lambda=2,30258509 & +23\log.2= & 6,9236900\cdot\lambda \\
\log.2=0,3010300\cdot\lambda & 10\log.(1+\sqrt{2})= & 3,8277570\cdot\lambda \\
\log.5=0,6989700\cdot\lambda & 20\log.(1+\sqrt{3})= & 8,7297760\cdot\lambda \\
\log.(1+\sqrt{2})=0,3827757\cdot\lambda & 8\log.(1+\sqrt{6})= & 4,3020392\cdot\lambda \\
\log.(1+\sqrt{3})=0,4364888\cdot\lambda & & +23,7832622\cdot\lambda \\
\log.(1+\sqrt{5})=0,5100176\cdot\lambda & -\;4\log.5= & -\;\;2,7958800\cdot\lambda \\
\log.(1+\sqrt{6})=0,5377549\cdot\lambda & -32\log.(1+\sqrt{5})= & -16,3205632\cdot\lambda \\
\log.(2+\sqrt{5})=0,6269630\cdot\lambda & -\;\;\log.(2+\sqrt{5})= & -\;\;0,6269630\cdot\lambda \\
\log.(2+\sqrt{6})=0,6483102\cdot\lambda & -\;2\log.(2+\sqrt{6})= & -\;\;1,2966204\cdot\lambda \\
 & & -21,0400266\cdot\lambda \\
 & & +23,7832622\cdot\lambda \\
 & & +\;\;2,7432356\cdot\lambda
\end{array}
$$

$$23\log.2-4\log.5+10\log.(1+\sqrt{2})+20\log.(1+\sqrt{3})-32\log.(1+\sqrt{5})$$
$$+8\log.(1+\sqrt{6})-\log.(2+\sqrt{5})-2\log.(2+\sqrt{6})=2,7432356\times2,30258509$$
$$=\text{- - - - - - - - - - - - -}+6,3165334.$$

Finalmente, adottando la divisione sessagesimale della periferia del cerchio, e ponendo

$$180° = 3,14159265,$$

sarà

$\text{Arc.tan.}\frac{1}{\sqrt{3}} = 30°\cdot\ 0',0000$	$4\,\text{Arc.tan.}\frac{2}{\sqrt{6}} = 156°\cdot 55',5648$
$\text{Arc.tan.}\frac{2}{\sqrt{6}} = 39°\cdot 13',8912$	$24\,\text{Arc.tan.}\frac{1}{2\sqrt{6}} = 276°\cdot 53',2224$
$\text{Arc.tan.}\frac{1}{2\sqrt{6}} = 11°\cdot 32',2176$	$+433°\cdot 48',7872$
	$-20\,\text{Arc.tan.}\frac{1}{\sqrt{3}} = -600°\cdot\ 0',0000$
	$-166°\cdot 11',2128$

$$-20\,\text{Arc.tan.}\frac{1}{\sqrt{3}} + 4\,\text{Arc.tan.}\frac{2}{\sqrt{6}} + 24\,\text{Arc.tan.}\frac{1}{2\sqrt{6}}$$
$$= -166°\cdot 11',2128 = -2,9005082.$$

Adunque sarà

[25] $$''\Pi(o) + ''\Pi(2h) - 2\,''\Pi(h) = \frac{1}{3}h^4(-0,6380758 + 6,3165334 - 2,9005082)$$
$$= h^4\cdot 0,9259831$$
$$= h^4\cdot 0,925983\ ,$$

tralasciando in quest'ultimo secondo membro la settima decimale, di cui non si può assicurare l'esattezza. E perciò, sostituendo questo valore nell'equazione [1], sarà

[26] $$P = K\Delta\partial\mu\mu h^4\cdot 0,925983$$

e ponendo $\mu = 1000$

$$K = 0,000000\ 000367\ 990\cdot\frac{1}{\partial'}$$

come si ha dall'equazione [2], si otterrà

[27] $$P = \frac{\Delta\partial h^4}{\partial'}\cdot 0,000340753\,.$$

E se vorremo la forza rappresentata da P espressa in chilogrammi, vale a dire se vorremo il numero de' chilogrammi di materia, i quali in un determinato luogo hanno un peso uguale a quella forza, indicato un tal numero con

$$\chi,$$

avremo

[28] $$\chi = \frac{P}{g} = 0,000340753\ \frac{\Delta\partial h^4}{\partial' g}$$

dove, come si è già veduto più sopra, le lettere

Δ, δ esprimono le densità de' due cubi che si attraggono,
δ' esprime la densità media del globo terrestre,
h la lunghezza de' lati di essi cubi misurata in metri,
g la velocità che viene acquistata in un minuto secondo sessagesimale da' corpi liberamente cadenti in quel luogo, misurata similmente in metri.

VI.

Veniamo ad un esempio numerico. Supponiamo che i due cubi sieno di ferro ed abbiano il lato di un centimetro, e che si voglia la forza colla quale si attraggono al contatto in conseguenza della gravitazione, espressa questa forza in chilogrammi pesati a Parigi. Ammettendo per densità terrestre la media aritmetica de' risultamenti corretti di Cavendish e di Maskelyne, avremo

$$\Delta = 7,800$$
$$\delta = 7,800$$
$$\delta' = 5,01$$
$$h = 0,01$$
$$g = 9,8088,$$

e però fatte le opportune riduzioni sarà

$$[29] \qquad \chi = 0,000000\ 000004\ 21867,$$

vale a dire sarà la ricercata forza uguale a quattro bilionesimi di chilogrammo e 21867 centomillesimi di un bilionesimo.

Paragoniamo questa forza colla effettiva tenacità che questi due cubi manifestano al vicendevole contatto. Egli è noto per le sperienze di Rumford che una barra di buon ferro lavorato della sezione di un centimetro quadrato può sostenere prima di rompersi un peso di 4470 chilogrammi (1). E a questa tenacità è uguale la forza con cui terrebbonsi effettivamente uniti i due cubi messi ad esatto combaciamento, vale a dire saldati insieme; giacchè è noto che la tenacità di una barra non dipende punto dalla sua lunghezza. Si chiami adunque T la forza colla quale si tengono attaccati i due cubi, espressa in chilogrammi; avremo

$$T = 4470;$$

e fatto paragone con χ, sarà

$$\chi : T :: 0,000000\ 000004\ 21867 : 4470$$
$$:: 1 : 1059\ 570000\ 000000$$

da cui

$$[30] \qquad \chi = \frac{1}{1059\ 570000\ 000000}\, T;$$

(1) Venturoli, *Meccanica*, Milano 1817, Tom. I, pag. 238.

donde apparisce chiarissimamente quanto poca parte avrebbe l'attrazione universale nella coesione de'corpi, se questi potessero riguardarsi come formati di materia continua.

VII.

Osservazione I. Se i due cubi, in luogo di ferro, si fossero supposti di altra sostanza solida più pesante, e la media densità terrestre si fosse presa quale vien data da Playfair, sarebbesi in tal caso ritrovato per X, ossia (ciò che torna allo stesso) per P, un valore alquanto maggiore, ed anche otto o dieci volte più grande, ma però sempre senza paragone più piccolo della tenacità che si manifesterebbe fra quei due cubi insieme saldati.

Osservazione II. E finalmente queste conclusioni varrebbero se anche i due cubi di ferro si fossero assunti assai maggiori, purchè di grandezza non sterminata. Quando per esempio fossero del lato di un decimetro, la loro vicendevole attrazione al contatto, procedente dalla gravitazione, sarebbe di grammi

$$0,000042\ 1867;$$

e quando essi avessero i lati di un metro, questa loro attrazione sarebbe di grammi

$$0,421867.$$

Potrebbe nulladimeno in cubi grandissimi l'effetto della gravitazione essere uguale ed anche maggiore della tenacità: perciocchè questo effetto cresce in ragione delle quarte potenze dei lati dei cubi, mentre la tenacità si aumenta come i soli quadrati. Ma, ripetiamo, ciò avrebbe luogo solamente a dimensioni enormi. Per esempio, trattandosi di due cubi di ferro, avrebbesi l'uguaglianza solo allorquando i lati superassero la lunghezza di trecento mila metri, cioè fossero di metri

$$325510.$$

Osservazione III. La conclusione precedente si può applicare a corpi di qualsivoglia forma; vale a dire che in qualsivoglia corpo il quale non sia grandissimo, quando si riguardi formato di materia continua, non può l'attrazione universale essere ammessa come causa della coesione. Si concepisca infatti che il corpo venga distinto da un piano in due parti, e che a queste venga aggiunta altra materia della stessa natura di quella del corpo, in guisa da averne due uguali cubi circoscritti ad esse due parti, i quali si combacino in quel piano al modo considerato più sopra (num. II). Sarebbe ben piccola la forza con cui l'attrazione universale tenderebbe a tenere uniti questi due cubi; ma più piccolo ancora sarebbe l'effetto di tale attrazione fra le due parti del corpo; è dunque affatto inefficace questa per essere cagione della coesione.

La densità del corpo l'abbiamo tacitamente considerata uniforme; s'ella fosse diversa dall'un punto all'altro, perchè reggesse la dimostrazione basterebbe assumere per densità de' cubi circoscritti la massima densità che abbia luogo nel corpo.

Osservazione IV. Supponiamo che la materia di ciascuno de' due cubi, conservando la medesima densità e quindi il medesimo volume, prenda la forma di una sfera. Quale sarà l'attrazione delle due sfere al vicendevole contatto?

Cominciando a ricercarne il raggio che indicheremo con ρ, si avrà questo dall'equazione

$$\frac{4}{3}\pi\rho^3 = h^3$$

da cui

$$\rho = h\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}.$$

Continuando a chiamare Δ, ∂ le densità, saranno le loro masse espresse rispettivamente da

$$h^3\Delta\mu,\quad h^3\partial\mu.$$

E la forza con cui si attraggono si avrà richiamando quel Teorema di Newton, che una sfera omogenea in conseguenza della gravitazione attrae i corpi esteriori e n'è attratta precisamente colla medesima forza come se la sua massa fosse tutta concentrata nel centro di figura (1). Converrà dunque supporre che le due masse sieno concentrate in due punti collocati alla distanza 2ρ; con che per misura della cercata attrazione si avrà la quantità

$$\frac{K\cdot h^3\Delta\mu\cdot h^3\partial\mu}{4\rho^2},$$

ossia sostituendo in luogo di ρ il già trovato suo valore, e chiamando S l'attrazione di cui si tratta, sarà

$$S = \frac{K\cdot h^6\Delta\partial\mu^2}{4\cdot h^2\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}},$$

ossia facendo le convenienti riduzioni,

$$S = Kh^4\Delta\partial\mu^2\cdot\sqrt[3]{\frac{\pi\pi}{36}}.$$

Paragonando questo valore col secondo membro dell'equazione [26], esprimente l'attrazione P dei due corpi quando hanno la forma cubica e stanno a mutuo combaciamento, avremo

$$P:S::Kh^4\Delta\partial\mu\mu\cdot 0{,}925983 : Kh^4\Delta\partial\mu\mu\cdot\sqrt[3]{\frac{\pi\pi}{36}}$$

dalla qual proporzione, tolti i fattori comuni ai due ultimi termini, ed eseguita l'estrazione della radice cubica, si avrà

$$[31]\qquad P:S::0{,}925983:0{,}649629.$$

Apparisce di qui che il combaciamento de' due cubi ha bensì qualche van-

(1) *Princip. Mathem.* L. I, *Prop.* 74.

taggio sopra il semplice contatto delle due sfere, ma è affatto lontano dal bastare, come alcuni credettero, a dar ragione dell' adesione de' corpi dotati di faccie piane e messi con queste a combaciare insieme, nel supposto che altra forza attrattiva non vi abbia fra loro che quella della universale gravitazione: la maggiore infatti delle due attrazioni non supera nel nostro caso la minore nemmeno nella ragione di 3 a 2.

ARTICOLO SECONDO

Estensione delle precedenti conseguenze ad altre ipotesi sulla costituzione dei corpi, e insufficienza dell' ipotesi immaginata da Laplace.

VIII.

L' ipotesi della continuità della materia da noi supposta nell' articolo precedente non è la più universalmente abbracciata. Una gran parte de' Fisici ammette con Newton che i corpi sieno formati dall' unione di minime particelle estese, figurate, solide, e, per le attuali forze della natura, incorruttibili; e tiene che queste non si trovino già a mutuo contatto, ma che per l'azione del calorico si mantengano a qualche distanza le une dalle altre, distanza però non molto grande a paragone de' loro diametri. Altri e segnatamente il celebre Laplace, onde agevolare la spiegazione di alcuni fenomeni e in ispecie di quello appunto della coesione de' corpi, ammettono essi pure la materia siccome formata da così fatte molecole, ma però reputano queste situate a distanze incomparabilmente maggiori dei loro diametri. Altri finalmente suppongono che la materia sia nei corpi in continua comunicazione fra se, lasciando però moltissimi intervalli vacui; talchè non si abbiano già particelle disseminate nel vacuo, ma piuttosto de'vacui disseminati nello spazio pieno. Noi esamineremo separatamente queste tre diverse ipotesi, procurando di estendere a ciascuna la già dimostrata conclusione della incapacità della gravitazione ad essere causa della coesione dei corpi; e cominceremo dalla prima, cioè dalla ipotesi atomistica più comune.

Immaginiamo che si abbia un corpo omogeneo cristallizzato, nel quale le molecole integranti, supposte di forma parallelepipeda, sieno disposte in tanti strati paralleli e in guisa che quelle di uno strato stiano a fronte una per una con quelle dello strato sottoposto, rimanendo però fra l' una molecola e l' altra de' piccoli intervalli. Nella quale supposizione nulla vi ha che non sia consentaneo alle dottrine sulla struttura dei corpi cristallizzati. Giacchè secondo Haüy o le molecole dei corpi sono di forma parallelepipeda, o si trovano nei cristalli per cotal modo disposte da poterle distinguere in tanti gruppi parallelepipedi (1), e questi parallelepipedi o semplici o composti sono collocati paral-

(1) Haüy, *Traité de Physique*, Paris 1821, § 133.

lelamente gli uni agli altri e in guisa da formare tanti strati piani e paralleli secondo ciascuna delle tre direzioni delle facce di uno de' parallelepipedi medesimi. Il supposto corpo cristallizzato poi immaginiamolo tagliato di tal maniera che ne risulti un prisma retto a basi quadrate parallele alle superficie che separano gli strati, con un'altezza doppia de' lati delle basi, e tale che diviso in due uguali cubi, riesca il piano di separazione nel mezzo appunto di due strati vicini. Che se nel tagliare le facce laterali alcune particelle dovessero venir segate, queste si levino fuori, e si lasci pure che manchi qualche cosa alla rigorosa perfezione delle facce medesime.

Chiamiamo

Δ la densità effettiva del prisma, cioè quella che si ottiene paragonando la massa di esso con quella di un ugual volume d'acqua distillata presa al suo massimo di densità;

$2h$ l'altezza del prisma medesimo;

α il rapporto dello spazio occupato dai vacui a quello occupato dalla materia delle particelle, talchè quello spazio sia a questo come $\alpha : 1$;

V il valore in chilogrammi della forza colla quale si attraggono a vicenda, in virtù della gravitazione, i due cubi in cui abbiamo supposto divisibile il prisma;

$(1 + \beta)$ il rapporto secondo cui verrebbe ad aumentarsi questa attrazione de' due cubi, quando gli spazii vacui del prisma venissero riempiuti con altrettanta materia della stessa natura e densità di quella che costituisce le particelle; sia cioè la nuova attrazione aumentata espressa da

$$(1 + \beta) V.$$

Procuriamo di assegnare all' attrazione effettiva V un limite, del quale ella sia necessariamente minore.

Venendo per mezzo del riempimento de' vacui aumentata la materia del prisma in maniera che la nuova total massa è alla primitiva come $(1 + \alpha)$ ad 1, ne segue che la nuova densità de' due cubi, cioè quella dopo un tale riempimento, è

$$(1 + \alpha) \Delta.$$

Ora se noi richiamiamo i calcoli precedenti, e riflettiamo che l'attrazione fra due cubi di materia continua ed omogenea della densità

$$(1 + \alpha) \Delta,$$

e co' lati della lunghezza h, è misurata in chilogrammi (equazione [28]) dalla espressione

$$0,000340753 \cdot \frac{(1 + \alpha)^2 \Delta \Delta h^4}{\delta' g},$$

e facciamo questa uguale a

$$(1 + \beta) V,$$

avremo per determinare V l'equazione

$$(1+6)V = 0,000340753 \cdot \frac{(1+a)^2 \Delta \Delta h^4}{\delta' g}$$

da cui

[32] $$V = 0,000340753 \cdot \frac{\Delta \Delta h^4}{\delta' g} \cdot \frac{(1+a)^2}{(1+6)}.$$

La quale equazione attesa la somma piccolezza della quantità

$$0,000340753 \cdot \frac{\Delta \Delta h^4}{\delta' g}$$

resa ancora minore dal divisore $(1+6)$, e non guari aumentata dal fattore $(1+a)^2$, il quale in questa prima ipotesi sulla costituzione dei corpi non ha un valore molto grande, ci mostra che l'attrazione indicata da V è piccolissima e trascurabile in confronto della tenacità che si manifesta fra le due parti del prisma. Ma ciò diverrà più evidente con un esempio.

Sia $h = 0,01$;

$\Delta = 2,7182$,

prendendo per esempio il carbonato di calce cristallizzato (1), siccome quello che assai facilmente si può dividere in lamine parallele. Noi avremo, ammessa la densità terrestre $= 5,01$, e fatta $g = 9,8088$,

$$0,000340753 \cdot \frac{\Delta \Delta h^4}{\delta' g} = \frac{0,000340753\,(0,01)^4 (2,7182)^2}{5,01 \times 9,8088}$$
$$= 0,000000\ 000000\ 512329$$

e però

$$V = 0,000000\ 000000\ 512329 \cdot \frac{(1+a)^2}{(1+6)},$$

dove si scorge chiaramente, che se la a non è grandissima, l'attrazione di cui si tratta non è che una piccolissima frazione di un chilogrammo, anzi di un milligrammo che ne è la milionesima parte, e però è affatto incapace a dare origine alla coesione con cui stanno uniti i due pezzi cubici di carbonato calcare costituenti il prisma retto.

Osservazione. Affinchè la quantità

$$0,000000\ 000000\ 512329\,(1+a)^2$$

arrivi ad essere uguale a $\frac{1}{1000}$, deve aversi

$$a = \frac{1}{\sqrt{0,000000\ 000512\ 329}} - 1 = 44179$$

cioè lo spazio occupato dai pori dev'essere 44179 volte più grande di quello

(1) Haüy, *Minéralogie*, Tom. I, pag. 241, ediz. 1822.

occupato dalla materia. Nè con ciò arriverebbe ancora l'attrazione de' due cubi ad uguagliare un grammo, dovendo la suddetta quantità

$$0,000000\ 000000\ 512329(1+a)^2$$

venir divisa per $(1+\beta)$; il qual divisore è certamente assai grande, non potendo l'attrazione che crescere moltissimo a cagione di un cotanto aumento nella densità.

IX.

Procuriamo, per una maggiore generalità, di estendere la conclusione al caso di una disposizione di molecole meno regolare di quella ora supposta, al caso cioè che esse molecole, riguardate ancora come separate le une dalle altre, però a distanze non molto grandi a paragone de' loro diametri, non formino degli strati piani e paralleli, ma si insinuino le une fra le altre di tale maniera, che volendo condurvi di mezzo una superficie la quale divida in due parti il corpo senza segare veruna di esse, debba questa essere curva e presentare una specie di ondeggiamento come mostra la figura 2. Il quale caso è certamente assai meritevole di considerazione, sì perchè questo si può considerare come lo stato più comune dei corpi non cristallizzati, e sì ancora perchè da alcuni si attribuisce molto effetto a questa vicendevole inserzione o intrecciamento di particelle.

Abbiasi pertanto un piccolo corpo M (fig. 2) della forma di un prisma retto a basi quadrate la cui altezza però ora non stabiliamo, e il quale si trovi nella condizione accennata. Immaginiamovi condotta a traverso una superficie che il separi in due parti

$$A \text{ e } B,$$

senza segare nessuna delle molecole, anzi tenendosi alcun poco discosta dall'assoluto contatto con esse, il che potrà facilmente aver luogo per mezzo di un opportuno incurvamento che abbia essa superficie.

Concepiamo che coll'aggiungere a queste due parti di prisma A e B un'opportuna quantità di materia della stessa densità delle particelle, la quale riempia gli interni spazii voti di esse due parti e le ricopra esteriormente ove occorra, si venga a ridurre ciascuna di cotali due parti a un solido risolubile in tanti prismi retti aventi gli spigoli laterali o longitudinali tutti paralleli fra loro e agli spigoli laterali del prisma primitivo M, combaciantisi fra loro lateralmente, e ne' quali le basi situate dalla banda dove i due pezzi sono stati divisi sieno qual più sporgente e quale meno, essendo poi queste diverse basi o uguali o disuguali dall'uno all'altro piccolo prisma come più torni comodo. Sieno questi due nuovi solidi che noi indicheremo con

$$A',\ B'$$

appena sufficienti a comprendere in se le nominate parti A e B, non superandole sensibilmente di volume, nè arrivando nè l'un nè l'altro fino alla superficie curva dividente.

Chiamisi come poco sopra

Δ la densità di esse parti A e B, ossia più precisamente il rapporto della massa dell'una e dell'altra di esse alla massa dell'acqua che capirebbe nel volume del rispettivo circoscritto aggregato di prismi; e potrà facilmente aversi in entrambe queste parti A e B la densità medesima, bastando allungare all'occorrenza alcun poco i piccoli prismi circoscritti alla parte più densa da quella estremità che serve per una delle basi al corpo M. Si chiami

$(1+\alpha)$ il rapporto dello spazio occupato da ciascuno di tali aggregati di prismi allo spazio occupato dalla materia delle particelle che in esso si contenevano prima del riempimento de' vacui, talchè sia

$(1+\alpha)\Delta$ sì la densità de' due solidi A', B', come anche quella delle molecole componenti il corpo M.

Si concepisca che tutti i prismi appartenenti ad A' si ritirino a livello di quello fra essi che è il meno sporgente verso B', o la cui base rivolta a questo ultimo è situata più indentro degli altri: con che tutte le basi rivolte verso B' verranno a disporsi in una superficie piana perpendicolare ai lati dei piccoli prismi medesimi. E invece i prismi del solido B' si suppongano prolungati verso A' per mezzo di un' aggiunta di materia simile alla loro, tanto da venire in contatto colla nuova superficie di A'. E si chiamino rispettivamente

$$A'', B''$$

i due solidi A' e B' così cangiati di figura.

Ciò premesso si chiami

V la forza con cui in virtù della gravitazione si attraggono i due solidi A e B parallelamente agli spigoli laterali de' prismi, supposta espressa questa forza in chilogrammi;

U, W le forze con cui si attraggono i due solidi medesimi, secondo due altri assi ortogonali, espresse similmente in chilogrammi;

V', U', W' le tre analoghe forze riguardo ad A', B';

V'', U'', W'' quelle rispetto ad A'', B''.

Tenendo conto delle sole V, V', V'', noi considereremo primieramente la relazione che esiste fra V e V', quindi la relazione fra V' e V'', finalmente la grandezza assoluta di V''; dal che potremo trarre qualche cognizione sulla grandezza di V.

In primo luogo adunque essendo la quantità di materia de' solidi A', B' quella medesima che compone i solidi A e B coll' aggiunta di quella che ha riempiuto i vani, egli è evidente che sarà

$$V' > V$$

ossia che si avrà

$$V' = (1+\epsilon)V,$$

essendo ϵ una quantità positiva. Ogni piccola porzione in fatti della materia che si aggiunge al solido A all'oggetto di ridurlo alla forma A' è evidente-

mente attratta dal solido B di tale maniera che decomposta l'attrazione in tre forze analoghe alle V, U, W, la componente analoga alla V opera secondo il medesimo verso di questa, tende cioè anch'essa a far muovere i due solidi A e B l'un contro l'altro e non nella direzione contraria: perciocchè noi non consideriamo qui que' modi stravaganti di disposizione di molecole ne' quali per avventura potesse aver luogo qualche eccezione, potesse cioè qualche porzione della materia aggiunta ad A essere attratta con tale energia da quelle molecole di B le quali maggiormente sporgono e si insinuano fra i piccoli prismi di A, da dare la componente analoga alla V diretta in verso contrario alla V medesima; questo caso verrà compreso nelle dimostrazioni che daremo nel terzo articolo. Ogni porzione poi della materia che si aggiunge a B onde ridurlo alla forma B' serve evidentemente e in ogni caso ad aumentare quella componente dell'attrazione fra A' e B la quale opera secondo il verso stesso della V.

Paragonando in seguito fra loro le V', V'', noi non veggiamo in vero chiaramente se si abbia V'' maggiore o minore di V', ma però possiamo dimostrare che sicuramente si ha

$$V' < 2\, V''.$$

Il che apparirà esaminando separatamente le variazioni di attrazione che hanno luogo ne' diversi casi fra i piccoli prismi di A' e quelli di B', nel passaggio di questi A', B' alla forma A'', B''.

a) Può avvenire per un primo caso che un prisma al (fig. 3) appartenente ad A', e un prisma $b\,n$ appartenente a B', posti l'uno rispetto all'altro come mostra la figura, passino alle posizioni $a'l'$, $b'n'$, rimanendo il secondo al suo posto, e ritirandosi il primo fino a che le due basi a, n siano in uno stesso piano, nelle posizioni a', n'. In questo caso chiamata v' l'attrazione primitiva dei prismi secondo i loro spigoli laterali, v'' quella che ha luogo di poi, si ha

$$v' < 2\, v''.$$

Perciocchè segato $a\,l$ in k col piano prolungato della base n dell'altro prisma bn, e similmente segato bn in m col prolungamento della base a, noi potremo riguardare l'attrazione v' come uguale alla somma di altre due attrazioni, l'una della parte di prisma bm con tutto il prisma al, la quale è minore evidentemente di v''; l'altra della parte mn verso kl (non essendovi veruna attrazione fra ak ed mn parallelamente ai suddetti spigoli de' prismi), e questa è pur minore di v''; dunque sommando sarà

$$v' < 2\, v''.$$

b) Può avvenire che due prismi al, bn situati l'uno rispetto all'altro come i precedenti, col ritirarsi di al prendano l'uno per riguardo all'altro le posizioni $a'l'$, $b'n'$ (fig. 4), e quindi il secondo si prolunghi sino in p', essendo questa nuova base p' situata nel prolungamento della a. Ora chiamate anche

qui v', v'' le due attrazioni che hanno luogo prima e dopo fra i due prismi parallelamente agli spigoli laterali, e segati *al* in *k*, *bn* in *m* come precedentemente, avremo ancora la v' composta di due parti; la prima fra *bm* ed *al*, e questa minore di v''; la seconda fra *mn* e *kl*, e questa pure minore di v''. E però sarà tuttavia

$$v' < 2\,v''.$$

c) Può in terzo luogo accadere che essendo le basi *a*, *n* in un medesimo piano, si ritiri il prisma *al* in guisa che ne risulti la posizione rispettiva *a'l'*, *b'n'* (fig. 5), e quindi si estenda il *b'n'* sino in *p'* situato nel piano prolungato della *a'*. Continuando a ritenere le denominazioni precedenti, avremo evidentemente $v' < v''$, e a maggior ragione

$$v' < 2\,v''.$$

d) Può accadere che la base *a*, trovandosi già al di sotto della base *n* (fig. 6), rimanga a suo luogo, e soltanto si estenda il prisma *bn* sino al piano di cotal base *a*. In tal caso avremo ancora evidentemente $v' < v''$, e quindi altresì

$$v' < 2\,v''.$$

e) In fine può avvenire che i due prismi *al*, *bn* dalle posizioni che si veggono indicate nella fig. 7, dove il *bn* trovasi, come qui sopra, lontano dal piano della base *a*, passino alle posizioni *a'l'*, *b'n'* nelle quali la distanza fra quel piano e quel prisma sia ancor maggiore, e che quindi il *b'n'* si estenda fino in *p'* situato sul detto piano prolungato della base *a'*. Anche qui sarà $v' < v''$, e però

$$v' < 2\,v''.$$

Paragonando adunque tutte le attrazioni che hanno luogo fra i prismi di A' e quelli di B', colle attrazioni de' prismi di A'' con quelli di B'', noi troviamo che ciascuna di quelle è minore del doppio della corrispondente di queste. Perciò chiamando

$\Sigma\,v'$ la somma delle prime

$\Sigma\,v''$ la somma delle seconde

si ha

$$\Sigma\,v' < 2\,\Sigma\,v''.$$

Ma $\Sigma\,v' = V'$, $\Sigma\,v'' = V''$; perciò

$$V' < 2\,V''$$

ossia

$$V' = \frac{2\,V''}{1+\gamma},$$

essendo γ una quantità positiva.

Per trovare un numero del quale il valore di V'' sia minore, gioverà che il corpo primitivo dalla cui divisione si hanno le due parti A e B, venga preso di tale altezza (sulla quale altezza il lettore rammenterà non essersi nulla finora stabilito) che il più lungo prisma del solido A'' e i prismi del B'' non superino in lunghezza i lati delle basi quadrate del corpo stesso. Con ciò si avrà V'' minore dell'attrazione fra due cubi, le cui facce uguaglino le basi quadrate del corpo primitivo, e la cui densità sia quella di A'', B''; vale a dire, indicando con χ la forza con cui si attraggono cotali cubi posti a combaciamento, si avrà

$$V'' < \chi$$

ossia

$$V'' = \frac{1}{1+\varepsilon}\chi$$

essendo ε una quantità positiva.

Sostituendo ora opportunamente i ritrovati valori, avremo

$$V = \frac{1}{1+6}V'$$

$$= \frac{2}{(1+6)(1+\gamma)}V''$$

$$= \frac{2}{(1+6)(1+\gamma)(1+\varepsilon)}\chi,$$

e infine, sostituendo il valore di χ dato dall'equazione [28], e ponendo $(1+\alpha)\Delta$ sì in luogo di Δ che in luogo di δ, avremo

[33] $$V = \frac{2}{(1+6)(1+\gamma)(1+\varepsilon)} \cdot 0,000340753 \cdot \frac{\Delta^2 h^4 (1+\alpha)^2}{\delta' g},$$

indicandosi anche qui con h la lunghezza dei lati della base del prisma.

Ma abbiamo già veduto precedentemente (num. VIII) che la quantità

$$0,000340753 \cdot \frac{\Delta^2 h^4 (1+\alpha)^2}{\delta' g},$$

quando non sia molto grande la α e si prenda piccola la h, è di un valore estremamente piccolo; perciò sarà piccolissimo in questi casi anche il suo doppio, cioè

$$2 \cdot 0,000340753 \cdot \frac{\Delta^2 h^4 (1+\alpha)^2}{\delta' g},$$

e questo diverrà ancor minore se si dividerà per $(1+6)\cdot(1+\gamma)\cdot(1+\varepsilon)$, talchè sarà tenuissima l'attrazione effettiva V.

Però se anche si prendesse α sì grande da avere di qualche sensibile grandezza la quantità suddetta

$$2 \cdot 0,000340753 \cdot \frac{\Delta^2 h^4 (1+\alpha)^2}{\delta' g},$$

se si ponesse, per es., $a=30000$, ovvero $a=40000$, non perciò potrebbesi ancora asserire che in questo caso fosse sensibile la V; poichè insieme al grande aumento di densità che avrebbe luogo in A e in B nel loro ridursi ad A', B', si produrrebbe altresì fra le medesime parti A e B un grande aumento di attrazione, e però avrebbe un grande valore anche il divisore $(1+\theta)$.

Per rischiarare la cosa con un esempio, cerchiamo qual dovrebbe essere il valore di a, affinchè in un prisma quadrato di ferro co' lati delle basi lunghi un centimetro, e formato internamente secondo l'ipotesi che consideriamo, si abbia

$$2 \cdot 0,000340753 \cdot \frac{\Delta^2 h^4 (1+a)^2}{\delta' g}$$

ugnale all'effettiva tenacità di questo prisma, cioè a 4470 chilogrammi. Fatto

$$2 \cdot 0,000340753 \cdot \frac{\Delta^2 h^4 (1+a)^2}{\delta' g} = 4470$$

e posto $\delta'=5,01$, $g=9,8088$, $\Delta=7,800$, $h=0,01$, avremo

$$(1+a)^2 = \frac{4470}{2} \cdot \frac{\delta' g}{0,000340753 \cdot \Delta^2 h^4}$$

$$= 529\ 788000\ 000000$$

e prossimamente

$$a = 23\ 000000.$$

Dovrebbe adunque esservi ventitre milioni più di voto che di pieno; nè questo basterebbe ancora affinchè la tenacità potesse dipendere dalla gravitazione, specialmente in conseguenza del divisore $(1+\theta)$ di cui abbiamo già parlato.

Rimane adunque provata la nostra tesi anche per questa maniera di disposizione delle particelle, nella quale essendo esse staccate ma non lontanissime, non si trovano unite regolarmente.

Osservazione I. Nella precedente dimostrazione noi abbiamo cercato di valutare la forza necessaria a separare l'uno dall'altro due aggregati di molecole materiali uniti dalla gravitazione in un modo poco regolare, nel supposto che in questa separazione debbano cotali molecole rimanere intatte o senza rottura. Questa condizione ha fatto sì che la dimostrazione risultasse alquanto lunga; ma noi avremo occasione di trarne ancora partito fra poco nell'esame dell'ipotesi di Laplace.

Nel caso però che chi adotta l'identità dell'attrazione molecolare coll'astronomica, ammetta altresì che le molecole de' corpi (supposte estese e occupanti uno spazio che non sia incomparabilmente più piccolo della somma degli spazii vani) abbiano le proprie parti collegate fra se in forza della medesima gravitazione, in tale caso è opera assai facile il dimostrare impossibile la suddetta identità, qualunque si supponga essere la disposizione di esse molecole. Basta a quest' uopo

l'immaginare che un corpo solido di esse formato venga tagliato in due parti mediante un piano, il quale seghi anche molte delle molecole. Coll'immaginare in fatti che sieno riempiuti d'altra simile materia gli intervalli voti che si trovano fra le diverse molecole, si può agevolmente dimostrare piccolissima la forza colla quale si terrebbero unite l'una all'altra le due parti in grazia della gravitazione, e piccolissimo lo sforzo necessario a separarle l'una dall'altra quantunque questa separazione esiga che vengano divise molte molecole, e più piccolo ancora lo sforzo occorrente a rompere il corpo nelle naturali separazioni fra molecola e molecola se mai questa maniera di rottura presentasse minore difficoltà.

Chi poi ammettesse che le molecole stiano unite in se stesse per una forza differente dalla gravitazione la quale tenga insieme legate le parti di ciascuna molecola, perchè ricuserebbe di ammettere che questa forza operi anche fuori dell'assoluto contatto e sia causa del vicendevole legame delle molecole di ciascun corpo solido?

Osservazione II. Si presenta qui un'altra ipotesi, la quale consisterebbe nel considerare le particelle de' corpi come inserite e collegate le une colle altre in guisa che nessuna di esse potesse esser cavata fuori dalle sue vicine senza scomporne l'unione. Di questa parleremo nell'articolo seguente al num. XII. Ora passeremo ad esaminare l'ipotesi di Laplace.

X.

Ma se le molecole dei corpi fossero situate a distanze incomparabilmente maggiori de' loro diametri, essendo in contraccambio densissime, di maniera che il totale volume del corpo non fosse già 50000 nè 100000 volte maggiore dello spazio occupato dalla semplice materia, ma bensì milioni od anche bilioni di volte, in qual modo andrebbe la cosa? Avverrebbe egli mai che quando nel valore di V dell'equazione [32] andasse successivamente crescendo la α, più rapidamente si aumentasse il numeratore $(1+\alpha)^2$ che non il denominatore $(1+\delta)$, talchè a valori di α grandissimi la V avesse valori sensibili? Tale è il sospetto che in altra maniera conceputo venne in pensiero al celebre matematico Laplace. Dubitò egli che quando le particelle stessero collocate a distanze immensamente maggiori dei diametri, potessero i corpi recati al contatto attraersi per la gravitazione con una forza di gran lunga più grande che a distanze appena sensibili, di modo che da una medesima causa dipendessero e i fenomeni astronomici e i molecolari. Ecco le sue parole (1). « La force attrac-

(1) *Exposition du Système du Monde*, Livre IV, Chap. xv, édit. de l'an IV. Veggasi eziandio l'edizione del 1813 a pag. 356, ove è riprodotta in più brevi termini la medesima idea. È però da notarsi che nell'edizione del 1824, pag. 383 e 384 il celebre autore si esprime a questo riguardo in un modo più circospetto, e di questa ipotesi ch'egli aveva immaginato per conciliare le due attrazioni, non fa più parola.

« tive disparait entre les corps d'une grandeur peu considérable; elle reparait « dans leurs élémens sous une infinité de formes différentes. La solidité des « corps, leur cristallisation, la réfraction de la lumière, l'élévation et l'abais-« sement des fluides dans les tubes capillaires, et généralement toutes les « combinaisons chimiques, sont les résultats de forces attractives dont la con-« naissance est un des principaux objets de la physique. Ces forces sont-elles la « gravitation même observée dans les espaces célestes et modifiée sur la terre « par la figure des molécules intégrantes? Pour admettre cette hypothèse il « faut supposer beaucoup plus de vide que de plein dans les corps; ensorte que « la densité des molécules soit incomparablement plus grande que la densité « moyenne de leur ensemble. Une molécule sphérique d'un cent millième de « pied de diamètre, devrait avoir une densité au moins dix mille milliards de « fois plus grande que la moyenne densité de la terre, pour exercer à sa sur-« face une attraction égale à la pesanteur terrestre; or les forces attractives des « corps surpassent considérablement cette pesanteur, puisque elles infléchissent « visiblement la lumière, dont la direction n'est pas changée sensiblement par « l'attraction de la terre; la densité de ces molécules serait donc à celle des « corps dans un rapport de grandeur dont l'imagination est effrayée, si leurs « affinités dépendaient de la loi de la pesanteur universelle. Le rapport des inter-« valles qui séparent ces molécules, à leurs dimensions respectives, serait du « même ordre, que relativement aux étoiles qui forment une nébuleuse, que l'on « pourrait, sous ce point de vue, considérer comme un grand corps lumineux. « Au reste rien n'empêche d'adopter cette manière d'envisager tous les corps; « plusieurs phénomènes, et entre autres l'extrême facilité avec laquelle la lu-« mière traverse dans tous les sens les corps diaphanes, lui sont favorables. « Les affinités dépendraient alors de la forme des molécules intégrantes, et l'on « pourrait par la variété de ces formes, expliquer toute la variété des forces « attractives, et ramener ainsi à une seule loi générale, tous les phénomènes de « la physique et de l'astronomie. Mais l'impossibilité de connaitre les figures « des molécules, rend ces recherches inutiles à l'avancement des sciences. « Quelques géomètres, pour rendre raison des affinités, ont ajouté à la loi de « l'attraction réciproque au carré des distances, de nouveaux termes qui ne « sont sensibles qu'à des distances très-petites; mais ces termes seraient l'ex-« pression d'autant de forces différentes; en se compliquant d'ailleurs avec « la figure des molécules, ils ne feraient que compliquer l'explication des phé-« nomènes. Au milieu de ces incertitudes, le parti le plus sage est de s'attacher « à déterminer par de nombreuses expériences, les lois des affinités,...... »

Ella è certamente acuta una tale riflessione o ipotesi del signor Laplace, e venne da molti Fisici accolta assai favorevolmente (1). Ed io pure non sarei

(1) *Traité de Physique* par M. Haüy, 1821, Tom. I, § 86; *Traité de Cristallographie* dello stesso autore, 1822, Tom. I, pag. 248.

schivo dall' accettarla come un' ipotesi felicissima, nè porrei difficoltà ad ammettere una rarità sì enorme uel tessuto de' corpi, quando per mezzo di questa vedessi potere conciliarsi in una sola, con mirabile semplicità della natura, le due diverse attrazioui. Ma esaminando la cosa davvicino io vi trovo delle gravi difficoltà; e per dirla iu breve io reputo questa ipotesi del tutto inutile allo scopo proposto: il che io mi proverò primieramente di dimostrare per un caso particolare, procurando poscia di venire a una maggiore generalità.

Si ammetta adunque come possibile (col soccorso a cagion d' esempio dell'azione ripulsiva del calorico) che le particelle materiali sieno situate a cotanta vicendevole distanza come suppone Laplace. E per un caso particolare si concepisca uno spazio prismatico retto a basi quadrate con un' altezza doppia dei lati delle basi, il quale perciò si possa distinguere in due spazii cubici eguali; questo si immagini diviso iu tante miuime cellette cubiche; e ue' punti di mezzo di queste si suppongano avere i loro centri altrettante minime ma densissime particelle sferiche simili fra loro in tutto, ed aventi i diametri incomparabilmente minori delle vicendevoli distauze da centro a centro, ossia dei lati delle cellette suddette. E sieno sollecitate le une verso le altre dalla gravitazione, attraendosi vicendevolmente con quella forza che è voluta dalle loro masse e dalle vicendevoli distanze. Noi cercheremo di misurare approssimativamente, con quanta forza totale s'attraggono l'uno coll'altro i due aggregati di molecole esistenti nelle due parti cubiche in cui lo spazio prismatico suddetto si può distinguere, onde vedere se tale forza possa tenere sì fattamente legate quelle particelle da formarne un corpo simile ai corpi solidi della natura.

Chiamiamo

V questa attrazione che si ricerca, espressa in chilogrammi;

h la lunghezza dei lati delle basi del prisma, che è anche quella dei lati de' due cubi; la quale lunghezza noi suppouiamo piccola per es. non maggiore di due o tre centimetri;

Δ la densità media del prisma.

Ciò posto concepiamo che ciascuna particella contenuta nel prisma, senza cangiare di massa ma rendendosi opportunamente men densa, si accresca di volume fino a divenire una sfera che tocchi le facce della piccolissima celletta cubica ove è rinchiusa. Per quello che è stato dimostrato da Newton (1), non si cangerà punto l' attrazione vicendevole di queste particelle, e la forza totale con cui quelle contenute nell' uno de' due spazii cubici attraggono quelle dell'altro, non si troverà alterata, e verrà ancora misurata da V. Giacchè tale forza, tanto nello stato primitivo delle molecole quanto nello stato posteriore, è quella medesima che avrebbe luogo se le masse di esse particelle si trovassero concentrate nei loro centri di figura.

(1) Si vegga più sopra al num. VII, Osserv. IV.

Noi passiamo adunque, mediante questa supposizione, dalla ipotesi di Laplace di una immensa piccolezza e distanza delle molecole, a un'altra di tante sferette a mutuo contatto, senza avere alcuna diversità di attrazione. Rimangono però ancora fra queste degli intervalli, i quali, per venire al caso di due cubi omogenei, conviene immaginar riempiuti. Chiamiamo pertanto

$$(1+\alpha)$$

il numero delle volte che lo spazio totale contiene quello occupato dalla sola materia delle sfere; e sia

$$1:(1+\beta)$$

il rapporto secondo cui cresce l'attrazione delle due masse contenute ne' due spazii cubici per quel riempimento di vacui supposto fatto con materia della medesima densità delle sfere. Avremo da un lato

$$(1+\alpha):1::8:\frac{4}{3}\pi$$

essendo π la semicirconferenza di raggio 1, e però

$$(1+\alpha)=\frac{6}{\pi};$$

e la quantità di materia contenuta ne' due spazii cubici dopo il riempimento sarà a quella che v'era prima come

$$(1+\alpha):1,$$

ossia come

$$\frac{6}{\pi}:1;$$

e la densità sarà divenuta

$$\frac{6\Delta}{\pi}.$$

Da un altro canto la nuova attrazione sarà

$$(1+\beta)V;$$

e questa avendo luogo fra due cubi uguali omogenei a mutuo combaciamento, sarà misurata in chilogrammi (vedi l'equazione [28]) dall'espressione

$$0,000340753\cdot\Delta^2\cdot\frac{36}{\pi^2}\cdot\frac{h^4}{\delta' g}.$$

Perciò avremo

$$V=\frac{0,000340753\cdot 36\cdot\Delta^2 h^4}{\pi^2\delta' g(1+\beta)}.$$

Ma nel secondo membro di questa equazione il fattore

$$0,00034o753 \cdot \Delta^2 h^4 \cdot \frac{1}{\delta' g}$$

per le cose già vedute superiormente è piccolissimo; nè punto divien sensibile coll'essere moltiplicato per $\frac{36}{\pi^2}$ che è quantità minore di 4; e poscia torna a diminuire nel venir diviso per $(1 + 6)$. Dunque noi possiamo conchiudere che la V è quantità piccolissima ed immensamente minore della tenacità che si manifesta in un corpo solido avente quella forma prismatica; e che in questo caso particolare l'ipotesi di Laplace è del tutto inefficace.

Abbiano ora queste molecole una disposizione comunque diversa dalla precedente, essendo però sempre uguali fra loro e di forma sferica e collocate a distanze incomparabilmente maggiori de'diametri. Se è tale questa loro disposizione che, crescendo tutte ugualmente di volume fino a toccarsi senza mutare nè la forma sferica nè i luoghi de'loro centri, non lascino negli intervalli che ancora rimangono dopo l'ingrandimento fra l'una e l'altra, una parte di spazio vota immensamente maggiore della parte piena, anche in questo caso l'ipotesi di Laplace è insufficiente.

Si concepisca in fatti che un corpo, composto di particelle a un cotal modo disposte, abbia una forma prismatica a basi quadrate, con un'altezza leggiermente minore del doppio de' lati delle basi. Vi si immagini condotto attraverso un piano perpendicolare ai lati che il distingua in due parti d'uguale altezza. Si considerino raccolte insieme in un sol corpo tutte le particelle che hanno i centri dall'una banda rispetto a quel piano, e raccolte similmente insieme in un secondo aggregato quelle che hanno i centri dall'altra banda, supponendo unite o alle prime o alle seconde, come più aggrada, quelle che per avventura avessero i centri nel piano dividente; però o tutte unite alle prime o tutte alle seconde e non già parte alle une e parte alle altre; e questi due aggregati si chiamino

$$A, B.$$

Si supponga quindi che stando co' centri ai loro posti e non variando di massa, crescano tali particelle di volume fino a che sieno vicinissime a toccarsi, non mancando a ciò, per un esempio, che l'aumento d'un milionesimo o d'un bilionesimo del volume a cui sono giunte; tanto che fra i due aggregati si possa condurre una superficie o piana o ondeggiata che non le tocchi. E si chiamino questi due nuovi aggregati

$$A', B'.$$

Egli è chiaro, pe' Teoremi di Newton, che questi due solidi A', B', si attrarranno colla medesima forza de' due A, B; di maniera che noi potremo applicare all'attrazione vicendevole di questi le conclusioni che troveremo per ri-

guardo all'attrazione di quelli. Ma per poco che si rifletta, si scorgerà che i due solidi A', B' sono nelle stessissime circostanze di quelli contemplati al num. IX; e che immaginandovi circoscritti de' minimi prismi, e ripetendo anche pel caso presente i medesimi ragionamenti, si arriverà alle stesse conclusioni, cioè che fra A' e B' dee per la gravitazione esercitarsi un'attrazione debolissima. Sarà dunque piccolissima anche l'attrazione fra A e B; e se più poderosa forza non si oppone, basterà un piccolissimo sforzo a disgiungerli; e però la gravitazione non sarà atta a produrre la coesione nel corpo proposto.

Osserverò qui di passaggio che a queste sferette si possono riferire i punti inestesi, dei quali, riguardati come tante sedi di forze, credeva Boscovich costituita la materia (1). Giacchè supponendo che le masse di questi atomi si estendessero e si diffondessero nello spazio di altrettante sferette intorno ad essi come a centri descritte, la loro vicendevole attrazione dipendente dalla gravitazione non si altererebbe punto. Per conseguenza anche nell'ipotesi di Boscovich, la gravitazione non potrebbe dar origine alla coesione. Ma a dire il vero non si accontentava neppur egli della gravitazione, ed anzichè di troppa semplicità, egli peccò piuttosto per una superflua moltiplicità di forze attrattive e ripulsive, le quali secondo lui vanno alternativamente succedendosi ora dell'una specie ed ora dell'altra, a proporzione che si passa a luoghi più e più lontani dai singoli atomi materiali.

Tornando all'ipotesi di Laplace ci rimane da ultimo a considerare il caso che le molecole sieno d'una forma diversa dalla sferica. Abbiano esse pertanto una forma qualsivoglia, ed anche, per una maggiore generalità, non sieno, se piace, uniformemente dense in tutte le loro parti nè simili fra loro di forma; solamente sieno tutte uguali fra loro nella massa e a distanze incomparabilmente maggiori dei diametri. E si supponga che un corpo di esse formato ed avente la stessa forma prismatica come nel caso precedente, venga da un piano parallelo alle basi e condotto attraverso e per mezzo al prisma, distinto in due parti

$$A \text{ e } B,$$

l'una formata dall'aggregato di tutte le particelle che hanno il centro di massa, o come suol dirsi *di gravità*, situato dall'una banda del piano, l'altra dall'aggregato di quelle che hanno un tal centro dalla banda opposta, supponendo unite o tutte alle prime o tutte alle seconde quelle che per avventura avessero il centro di massa nel piano dividente medesimo. E si chiami al solito

V la forza con cui, in virtù della gravitazione, esse due parti A e B si attraggono nella direzione perpendicolare alle basi del prisma, supposta espressa in chilogrammi.

Egli è certo che in ciascuna molecola appartenente alla parte A esiste un punto, dove se tutta la massa di essa molecola si venisse a concentrare, non si

(1) Vedi la sua opera che ha per titolo *Theoria Philosophiæ naturalis*, la quale consiste appunto nello sviluppo e nelle applicazioni di questa sua ipotesi.

altererebbe la sua attrazione verso B, considerando qui pure questa forza nella sola direzione perpendicolare alle basi del prisma. V' è anzi una serie di questi punti disposti in una superficie che passa attraverso alla molecola; in questa superficie però noi non prendiamo che un punto scelto ad arbitrio. Appelliamo questo il punto di *attrazione media*. E supponiamo che tutte le molecole di A, conservando la propria massa e il proprio volume prendano la forma di tante sferette co' centri posti ne' rispettivi punti di attrazione media, e chiamiamo

A' il corpo A così trasformato.

L' attrazione fra A' e B perpendicolarmente alle basi sarà ancora V.

Supponiamo che anche le molecole di B si cangino in altrettante sfere coi centri ne'loro punti di attrazione media verso A', presa quest'attrazione secondo la direzione già detta; e chiamiamo

B' il corpo B così cangiato.

Sarà l' attrazione fra A' e B' presa come sopra, uguale a quella fra A' e B, cioè sarà essa pure V.

Supponiamo in fine che tutte le sferette onde sono composte la A' e la B' crescano di raggio senza cangiare nè massa nè centro; non però al segno che volendo allontanare la A' dalla B' con moto perpendicolare alle basi, restino le sferette di A' impegnate fra quelle di B', ma l' aumento cessi qualche poca cosa prima, tanto che si possa condurre fra A' e B' così modificati una superficie o piana o curva, la quale tenga rivolta ad una delle basi la medesima faccia dappertutto, nè in verun luogo si ripieghi a volgervi la faccia contraria. Noi avremo fra A' e B' così trasformati e che diremo A'', B'' la stessa attrazione V di prima, presa però sempre secondo la direzione già detta. Ma questo ultimo stato di molecole, supposto che il volume occupato dalle sferette ingrossate sia una parte considerevole del volume intero del prisma, è similissimo a quello del num. IX, e si possono ad A'' e B'' circoscrivere degli analoghi prismi, e adattare le stesse dimostrazioni, e cavarne le medesime conclusioni. Dunque è piccolissima l' attrazione fra A'' e B'' parallelamente ai lati del prisma preso primitivamente a considerare; e quindi piccolissima anche quella fra A e B.

Per estendere questa conclusione a un corpo formato di molecole differenti fra loro nelle masse, il che potrebbe stimarsi essere il caso dei corpi misti (ritenuta sempre l' ipotesi di Laplace), converrà prima concepire questo corpo diviso in due pezzi A, B, come si è fatto qui sopra; quindi immaginar le molecole ridotte a tante sferette (quando non sieno di questa forma) co' centri ne' rispettivi punti d'attrazione media e con volumi proporzionali alle masse loro; poi concepir queste molecole cresciute tutte proporzionalmente fino a che manchi pochissimo o al loro vicendevole contatto o al trovarsi le parti A e B vicen-

devolmente impegnate l'una nell'altra. Quando con questo non sia lo spazio totale da esse sfere occupato una parte estremamente piccola del volume totale del corpo, potremo applicar quì pure le dimostrazioni del num. IX, e conchiuderne debolissima ed inefficace l'attrazione dipendente dalla gravitazione.

Osservazione I. In quest'ultimo caso e nei due precedenti noi abbiamo bisogno che le minime sferette possano, rarefacendosi, riempire una notabil parte dello spazio totale. Ora ciò dee necessariamente avverarsi quando le molecole sieno a distanze pressochè uguali l'una dall'altra, cioè quando l'una di esse non sia dalle sue più prossime notabilmente più distante che un'altra similmente dalle sue più vicine. Ed anche quando vi sia sensibile diversità purchè non eccessivamente grande, le nostre conclusioni mantengonsi ferme, non potendo allora essere grandissimo lo spazio che coll'aumentar di volume esse debbono lasciar voto. Che se poi taluno volesse ricorrere a questa estrema diversità fra le distanze, è d'uopo confessare che gli si potrebbe bensì torre molto terreno, ma che non si arriverebbe a scacciarlo interamente dal suo rifugio. Perciò, non volendo ora estenderci in queste sottigliezze, tanto più che lo stesso Laplace non sembra avervi ricorso, intorno a ciò non ci fermeremo, e lasceremo pure che questa modificazione dell'ipotesi si possa riporre fra quelle che possono dubitarsi atte a conciliare le due attrazioni, e delle quali noi parleremo nell'articolo seguente.

Ecco adunque a parer mio dimostrato, che non solo l'ipotesi in questione è lontana dallo spiegar chiaramente il fenomeno della coesione, e lo involge piuttosto in oscurità, ma che, presa nel modo ammesso da Laplace, ella è assolutamente inutile allo scopo pel quale fu proposta; con che io credo di avere soddisfatto a quanto aveva già una volta promesso (1).

Possono vedersi altre difficoltà a questa ipotesi di Laplace nella già citata mia memoria sull'attrazione molecolare (2). Fra queste però piacemi riportare ancora quella che io reputo la più solida, ed è che: « Una sì grande distanza « fra le molecole de' corpi proibirebbe quel grande ravvicinamento delle su« perficie di due corpi, dal quale si fa dipendere il grande aumento dell'attra« zione di gravitazione ». La quale difficoltà essendo stata egregiamente sviluppata dal ch. cavalier Nobili (3), mi si permetta di riferire le sue proprie espressioni. « Nell'ipotesi di Laplace, dice egli, si vuole che le molecole stieno nei « corpi a lunghissimi intervalli le une dalle altre, affinchè la loro densità fatta « superiore d'assai a quella degli aggregati, possa nel contatto di questi stessi « aggregati produrre fra le molecole delle attrazioni molto più grandi di quelle « che han luogo a distanze finite del contatto. Ma noi chiediamo a Laplace con « quale diritto egli pretende che le molecole giungano ad esercitare nel con-

(1) *Giornale di Fisica di Pavia,* anno 1826, pag. 326.

(2) *Idem,* anno 1814, pag. 120.

(3) *Sopra l'identità dell'attrazione molecolare coll'astronomica.* Modena 1818, pag. 57.

« tatto quella preponderanza d'attrazione che proviene dalla loro densità, dal « momento ch'egli ha proscritto il contatto dalla costituzione de' corpi? Egli « vuole ch'entro de'corpi le molecole sieno separate da larghi intervalli, e poi « perchè la densità delle molecole di un corpo possa sopra le molecole d'un « altro corpo esercitare un'attrazione molto energica, pretende che le molecole « dei due corpi pervengano al mutuo contatto; quasi che fosse lecito il supporre « che quella qualunque siasi cagione onde dipendesse la separazione delle mo- « lecole nell'interno de' corpi, cessasse subito d'esistere fuor de' medesimi corpi, « per permettere così fra le molecole esteriori quel contatto ch' essa cagione « da sì lontano impedisce alle molecole abitatrici delle regioni interne. Ma non « si vorrà certo tollerare una simile licenza ..... Coll' ammettere nei corpi « l'architettura di Laplace si ammette necessariamente l'esistenza di un potere « ripulsivo fra le molecole, capace di mantener queste a grande distanza le une « dalle altre. Ora ammesso una volta questo potere, bisogna di forza ricono- « scerlo in tutti i luoghi ove si trovano delle molecole, e riconoscendolo con- « viene lasciargli distaccare le superficie dei corpi ugualmente che le parti più « interne. Non volendo dunque concedere nell' ipotesi in discorso che quanto « permettono le regole della sana filosofia, si vedrà sparire affatto quella pre- « ponderanza di attrazione, che si sperava di conseguire dalla densità delle « molecole; si vedrà che l' idea di Laplace, benchè alquanto ingegnosa, nulla « serve all' oggetto per cui era destinata ».

XI.

Ci sbrigheremo in pochissime parole dell' ultima ipotesi che abbiamo detto essere ammessa da alcuni Fisici rispetto alla costituzione dei corpi, consistente nel riguardarli formati di materia che tutta sia in continua comunicazione con se stessa, senza però riempire totalmente lo spazio occupato da essi corpi, ma lasciando numerosi intervalli, come grossolanamente mostrano le spugne, le pomici, le scorie (1) ecc.

In questa ipotesi le nostre conclusioni continueranno a valere ogni volta che ne' corpi lo spazio pieno non sia piccolissimo in confronto del voto. Chiamisi in fatti al solito

a il numero delle volte che lo spazio vacuo in un corpo così formato, è maggiore dello spazio pieno;

Δ la densità media del corpo medesimo.

V l'attrazione, espressa in chilogrammi, fra due parti in cui il corpo venga diviso da un piano. E sia

$1:(1+6)$ la proporzione secondo cui si aumenta questa attrazione se le due parti divengono di materia continua col riempirsene le cavità d'altra materia

(1) Vedine le citazioni nella dotta opera del conte Paoli rammentata al principio della presente memoria e intitolata *Ricerche sul moto molecolare de' solidi*, alla pagina 50.

della stessa natura, e se si riducono a due cubi di lato h col circoscrivervi opportunamente altra simil materia. Per le cose già dette si avrà

$$(1+\beta)V = 0,000340753 \cdot \frac{\Delta^2 h^4 (1+a)^2}{g' \delta},$$

da cui si trarrà la medesima conseguenza già tante volte dedotta sull'estrema piccolezza di V.

(sarà continuato)

PARTE SECONDA

AI GIOVANI ITALIANI

STUDIOSI DELLE MATEMATICHE

GABRIO PIOLA

In questa seconda parte, come si enunciò nella prefazione, debbono aver luogo notizie, compendj e dichiarazioni risguardanti i progressi delle scienze matematiche ai nostri giorni, nei quali un solo geometra francese, il celebre Cauchy, propose e usò l'algoritmo di due nuovi calcoli. Una riflessione però ritarda la pubblicazione di tali articoli, ed è che la lettura di essi non sarebbe fra noi alla portata del maggior numero degli studiosi, essendo mancanti di opere italiane nelle quali siasi esattamente tenuto dietro agli avanzamenti dell'analisi dopo Eulero e Lagrange, e siano insegnate con metodo le dottrine che immediatamente precedono quelle di cui si tratta. Il calcolo principalmente degli integrali definiti, tanto ingrandito per le scoperte che dopo Eulero vi fecero Laplace, Legendre, Fourier, Poisson, Cauchy ed altri moderni, è fra noi poco conosciuto perchè, quantunque si abbiano varj preziosi teoremi nel corso di calcolo sublime del Brunacci, e nelle famose annotazioni di Mascheroni alla maggior opera di Eulero; e si stimino, come è dovere, alcune interessanti memorie di Bidone, di Plana, di Paoli, di Frullani, di Libri e di qualch'altro, un tal calcolo è ommesso o appena toccato nei trattati destinati all'istruzione. Eppure esso è ormai lo strumento più poderoso con cui si assoggettano all'analisi i più astrusi problemi: e le memorie di maggior peso che presentemente escono in luce riboccano delle sue formole. Pare pertanto che in tale stato di cose il miglior servigio che possa rendersi ai giovani

italiani sia di cominciare a mettere loro nelle mani un trattatello ove venga esposto con ordine e con chiarezza un sunto delle più importanti dottrine spettanti al calcolo degli integrali definiti, e nel quale non si diano per conosciute se non le teoriche matematiche registrate nei corsi in Italia più diffusi. Riempiuta questa lacuna, potrà allora sperarsi che più favorevolmente ed utilmente siano accolti anche gli articoli i quali abbiano per iscopo gli ultimi ritrovamenti di cui la scienza fu arricchita.

Conoscere l'utilità di questa operetta e sapere comporla non è poi la stessa cosa: nè io mi sarei assunto un tale incarico senza il consiglio e la sollecitazione di dotti amici, alcuno dei quali avrebbe potuto assai meglio egli stesso vincere la prova. Ad ogni modo il lavoro è eseguito e sarà pubblicato nei fascicoli di questa raccolta, ove ne porrò alcuni capitoli per volta tenendo una successiva numerazione per maniera che sia poi facile riunirli a formare un solo e piccolo volume. Se questo libretto non corrisponderà perfettamente all'aspettativa ed al bisogno, produrrà almeno il vantaggio di eccitare altri a scriverne uno migliore.

TRATTATO
SUL CALCOLO DEGLI INTEGRALI DEFINITI

INTRODUZIONE

Il ramo d'analisi di cui prendo a dare qualche notizia deve eccitare negli studiosi, forse più d'ogni altro, un particolare interesse per ragioni che verrò sponendo. E primieramente coloro i quali sentono desiderio di farsi innanzi presentando alcun che di loro invenzione possono qui più che altrove sperare di ottenere il loro intento. Studiando l'analisi quale è scritta nelle grandi opere dei Geometri che fiorirono nel passato secolo e sul principio del presente, pare di scorgere un campo percorso e visitato in tutte le parti con tanta diligenza che è quasi meraviglia il trovarvi una benchè piccola novità; non così delle ricerche sinora fatte intorno agli integrali definiti: vedesi una moltitudine di risultati che si accresce continuamente, si ammirano metodi di maggiore o minore generalità ed estensione: ma si conosce chiaramente che siamo ancora lontani da quel tutt'insieme che annunzia una scienza perfetta. Una tale circostanza deve contribuire ad infervorare coloro che si pongono allo studio di questo calcolo: ma molto più la considerazione della sua grandissima utilità. Infatti le principali difficoltà dell'analisi si possono ora riguardare come da esso assorbite, che ne cambia la forma e se tutte non le vince, le riduce così, che se havvi speranza di superarle non è che dietro i suoi avviamenti. È curioso il vedere come ciò si verifica anche di alcune delle principali difficoltà dell'algebra elementare, delle quali la più celebre è la risoluzione generale delle equazioni. Dove però il calcolo degli integrali definiti associato colla teorica delle funzioni discontinue veracemente trionfa è nell'applicazione ai problemi di fisica matematica; l'integrazione delle equazioni a differenze parziali a cui tali problemi conducono, cangia per virtù del medesimo interamente d'aspetto, e le nuove forme d'integrali corredate del conveniente numero di funzioni arbitrarie sono così fatte che si attaccano immediatamente alle viscere delle questioni. Sappiamo da un passo di uno scritto di Fourier inserito nel Tomo VIII delle Memorie dell'Istituto di Francia, che Lagrange sul fine della sua carriera antivide il perfezionamento che per questa parte dovea prendere l'analisi, avendo egli stesso gettato i semi delle nuove teoriche in più luoghi delle sue opere.

Se interessante è lo studio del calcolo degli integrali definiti, non manca poi di avere anche qualche circostanza sfavorevole che allontana e disgusta sulle prime chi si pone al medesimo. Quel doversi in esso percorrere una moltitudine di casi particolari che ad uno ad uno non destano grande interesse, e il cui numero sembra potersi accrescere quanto si vuole, disanima lo studioso il quale dopo molta fatica non capisce ancora bene a qual punto si trovi. Sappia egli però che questo subito giudizio non è retto, e creda che nel progresso egli troverà il guadagno assai maggiore di quanto erasi immaginato. Alcuni casi dei più semplici che possono sembrare capricciosamente costrutti e tali da non doversi mai incontrare nelle questioni indipendenti dal nostro arbitrio, occorrono invece frequentemente; e l' immensa quantità degli integrali definiti di valore assegnabile sembra raccogliersi intorno ad alcuni come a centri, ottenuti i quali, si forma una lunghissima serie di altri ed altri risultati. Questa riflessione però non toglie che s' abbiano a ridurre più che è possibile a punti di vista generali le determinazioni dei valori nei diversi casi: ed io pure mi conformerò a questo metodo. Che anzi è questo il principale scopo del presente lavoro: perocchè sono ben lontano dalla pretesa di raccogliere tutto quanto si conosce relativamente agli integrali definiti, sapendo che a tanta impresa appena basterebbe un' opera assai voluminosa. Mio pensiero si è di toccare i punti più interessanti della teorica, conosciuti i quali non è poi difficile allargare le proprie cognizioni mediante la lettura delle molte memorie scritte in tale argomento. Non voglio esporre un lusso una gran copia di formole: ma piuttosto entrare qua e là in brevi discussioni e riflessioni: credendo ottenere così il doppio vantaggio di spargere di qualche amenità una dottrina per se alquanto arida, e di esercitare l' ingegno onde possa penetrar meglio anche altrove nelle finezze della moderna analisi. Dividerò il Trattato in due Sezioni: nella prima si percorreranno le diverse maniere con cui si ottengono i valori di molti integrali definiti e si parlerà anche di alcuni usi meno importanti della teorica, perchè il lettore si persuada al più presto della sua utilità. Nella seconda Sezione si tratterà l' applicazione della teorica alla trasformazione delle funzioni ed alla integrazione delle equazioni, cioè l' applicazione oggetto primario a cui tende tutto il precedente insegnamento.

SEZIONE PRIMA

SOPRA LA RICERCA DEI VALORI DEGLI INTEGRALI DEFINITI E SOPRA ALCUNI LORO USI.

CAPO PRIMO

Prime nozioni generali.

1. Indicherò per

$$\int d\xi \cdot \phi(\xi)$$

l'integrale indefinito e incompleto o la funzione primitiva di $\phi(\xi)$ senza aggiunta di costante arbitraria: e per

$$\int_a^b d\xi \cdot \phi(\xi)$$

secondo l'uso più ricevuto, l'integrale o la primitiva della stessa funzione definita fra $\xi = a$ e $\xi = b$. Avvertasi non essere necessario che sia $b > a$, quantunque ciò si verifichi di frequente, principalmente nelle applicazioni alle misure delle quantità concrete: in generale si considerano a, b quantità qualunque. Chiamato per comodo $F(\xi)$ l'integrale indefinito, sarà

$$(\alpha) \qquad \int_a^b d\xi \cdot \phi(\xi) = F(b) - F(a).$$

Adunque in un integrale definito la lettera ξ per cui si fa l'integrazione è destinata a sparire, ed entra in un modo puramente istrumentale. Non si avrà quindi alcuna difficoltà a sostituirle, quando torni utile, un'altra lettera qualunque: e si terrà fermo che per tale mutazione il valore dell'integrale definito non soffre alcun cangiamento. L'integrale definito sarà funzione dei limiti a, b: il più sovente però questi limiti non saranno espressi con lettere ma per numeri o grandezze determinate; i più frequenti valori che si danno ai limiti sono

$$zero, \; -1, \; 1, \; -\frac{\pi}{2}, \; \frac{\pi}{2}, \; -\pi, \; \pi, \; -\infty, \; \infty.$$

2. Nel secondo membro della precedente equazione (α) entreranno, generalmente parlando, le altre lettere che si sottintendono concorrere alla composizione della funzione $\phi(\xi)$; sopra alcuna di esse si fissa spesso per circostanze particolari una attenzione non comune alle altre: allora essa è marcata appositamente tanto nella funzione ϕ sottoposta al segno integrale quanto nella espressione dell'integrale definito preso per un'altra lettera. Pongasi

$$(6) \qquad \psi(x) = \int_a^b d\xi \cdot \phi(x, \xi)$$

dove nella ϕ si marca la x come la quantità presa particolarmente di mira, e la ξ come la variabile per cui si eseguisce l'integrazione, e che ad operazione finita non compare più. L'integrale definito si esprime compendiosamente per $\psi(x)$, essendo evidente ch'esso è funzione della x la quale nella integrazione è stata trattata alla maniera di una costante. Tra le funzioni $\phi(x,\xi)$, $\psi(x)$ occorrono alcuni confronti meritevoli di seria considerazione 1.° la forma della funzione ϕ è spesse volte molto semplice, e invece riesce complicata quella della ψ: 2.° la funzione ϕ è sovente algebrica e razionale, e la ψ trascendente: 3.° (e questo è ciò che più rileva) la funzione ϕ è assegnata, e la ψ è molte volte inassegnabile sotto forma algebrica o sotto forma trascendente di logaritmi, esponenziali, e funzioni circolari.

3. Pongasi mente a quest'ultima circostanza, e riflettendo che la funzione $\psi(x)$ quantunque non assegnata, è per la (6) stabilita mediante una operazione di cui si hanno chiarissime idee, si capirà che di qui emerge una nuova maniera assai generale per significare le funzioni, a cui si possono ridurre anche varie espressioni trascendenti antecedentemente usate. Così si prova facilmente essere

$$\log.x=\int_0^1 d\xi\cdot\frac{x-1}{1+(x-1)\xi};$$

e come log.x è una foggia di scrivere inventata per compendio, e adottata per convenzione, si potrebbero similmente immaginare quante si vogliono nuove notazioni onde esprimere funzioni di x eguali a integrali definiti presi relativamente ad un'altra variabile e non riducibili alle espressioni già ricevute. Ciò si è fatto per certe quantità da alcuni chiamate iperlogaritmiche, pei trascendenti ellittici, pei così detti integrali Euleriani ecc., e può ripetersi a piacere; è qui la fonte d'infiniti trascendenti. Si è detto che questo si potrebbe fare, non già che sia necessario: essendo anzi in generale da consigliarsi una certa ritrosìa ad introdurre per compendio nuove lettere simboliche. È certo che con un poco di esercizio si arriva a maneggiare l'espressione fatta coll'integrale definito (la quale ha il notabilissimo vantaggio di una costante uniformità) quasi colla stessa facilità che s'incontrerebbe usando di una caratteristica particolare.

4. Nè si dica essere di poca utilità l'anzidetta maniera di esprimere le funzioni col mezzo di integrali definiti presi relativamente ad un'altra variabile: giacchè le forme significate da $\psi(x)$ non si ponno assegnare. Primieramente la $\psi(x)$ si può calcolare per serie e ridurre a tavole: allora essa è niente meno nota di quello siano le funzioni log.x, sin.x, ecc. le quali, se ben si riflette, non sono note che alle stessa maniera. Così Legendre ha date le tavole dei trascendenti ellittici, e di una funzione $\Gamma(x)$ da lui chiamata *gamma*, le quali presentano vantaggi affatto simili a quelli che si ottengono dalle tavole logaritmiche. In secondo luogo (e qui sta il più) le operazioni a farsi sopra $\psi(x)$ di forma ignota non si possono che accennare, dove nel secondo membro della (6) si possono eseguire il più delle volte passando sotto il segno d'integrazione, che si riferisce ad una

variabile indipendente da quella o da quelle su cui si opera. Accade allora talvolta (non volendo parlare d' altre deduzioni importanti di cui adesso sarebbe troppo anticipata l' idea) che dopo tali operazioni si possano eseguire le integrazioni dapprima non riducibili alle espressioni ordinarie.

5. Si comprende dopo il sin qui detto che una funzione $\psi(x, y)$ di due variabili x, y può essere data mediante un' integrale definito avendosi

$$(\gamma) \qquad \psi(x,y)=\int_a^b d\xi\cdot\varphi(x,y,\xi)$$

e che in generale una funzione di più variabili può essere determinata da un simile integrale che contiene una variabile di più destinata a sparire dopo la integrazione.

6. Quantunque il modo di espressione anzi esposto (equazioni (β), (γ)) sia assai vantaggioso per ridurre gli analisti a considerare e trattare le funzioni φ sotto i segni integrali assai più semplici delle ψ ad integrazioni eseguite, alcune volte non è artifizio che basti, e fa duopo ricorrere a un integrale duplicato o triplicato. Chi però ha ben compreso lo spirito del metodo non durerà fatica ad intendere che anche la $\psi(x)$ data dall' equazione

$$(\delta) \qquad \psi(x)=\int_a^b d\xi\int_m^n d\eta\cdot\varphi(x,\xi,\eta)$$

è una funzione di x che dipende da due invece che da una operazione d'integrazione definita; e che la $\psi(x)$ data dalla

$$(\varepsilon) \qquad \psi(x)=\int_a^b d\xi\int_m^n d\eta\int_h^k d\zeta\cdot\varphi(x,\xi,\eta,\zeta)$$

è una funzione che dipende da tre simili operazioni. Capirà altresì che queste espressioni per integrali duplicati e triplicati presenteranno vantaggi analoghi a quelli osservati nella espressione (β), presentandone spesso de'maggiori, perchè le funzioni φ posto sotto segni d' integrali duplicati o triplicati potranno prestarsi ad operazioni analitiche alle quali non sarebbero atte le simili funzioni poste sotto un solo segno integrale. Vedremo più tardi il bisogno di contemplare la funzione φ in un integrale multiplo formato di n segni integrali, nè ciò avrà difficoltà dopo le esposte riflessioni.

7. *Scolio.* Ed ecco qual è la chiave dei nuovi metodi: invece delle funzioni che risulterebbero ad integrazioni eseguite, considerare le funzioni assai più semplici poste sotto uno o più segni integrali. Queste generalmente parlando sono assai più trattabili, e l' operare su di esse è un ripiego di effetto mirabile come (prendendo un confronto fra le cose più note, che non è però rigorosamente esatto) operando sui logaritmi piuttosto che sopra espressioni di prodotti e potenze. Il vantaggio maggiore poi si è di poter eseguire sopra le accennate funzioni più semplici ciò che non solo difficilmente ma in nessuna maniera può farsi direttamente. Così le funzioni di una o più variabili che ver-

rebbero somministrate dall' integrazione di parecchie sorte di equazioni, non si sapranno spesso assegnare sotto le forme ordinarie, ma si sapranno esprimere sotto forme come le (β), (γ), (δ), (ε). Questa vista è generalissima: i casi in cui le funzioni potranno prodursi sotto le forme ordinarie saranno compresi come casi assai particolari nelle espressioni fatte cogli integrali; quindi con queste ultime dovranno il più delle volte annunciarsi i metodi d' integrazione: anche per la circostanza ch' essi a maggiore generalità uniscono facilità e speditezza.

8. *Scolio.* Le nozioni esposte nei precedenti numeri valgono a persuadere l' importanza della teorica che ho preso ad esporre: ma la loro applicazione è riserbata principalmente alla seconda parte di questo Trattato. Giovano esse però ad illuminare anche alcuna delle materie disposte per la prima parte: ed ecco il motivo pel quale le ho anticipate.

CAPO II.

Teoremi generali relativi ai cambiamenti d' espressione che possono farsi negli integrali definiti.

9. Per lo spezzamento di un integrale definito in due e più abbiamo il teorema

$$\int_a^b dx \cdot f(x) = \int_a^m dx \cdot f(x) + \int_m^b dx \cdot f(x)$$

che subito si dimostra chiamando (rivedi il num. 1) $F(x)$ l'integrale indefinito, e ponendo in luogo degli integrali definiti le espressioni equivalenti appunto come nel secondo membro della equazione (α) del citato numero. Questa stessa dimostrazione ci fa capire non essere necessario che b abbia un valore maggiore di a ed m ne abbia uno compreso fra i due, quantunque ciò accada il più delle volte. È manifesto che quanto si è fatto dell'integrale proposto può egualmente farsi di uno qualunque dei due in cui esso è stato spezzato: e che quindi il proposto integrale può ridursi alla somma di molti composta di un numero di termini quale più ci piace. Sull' uso di questo teorema in tutti i casi occorrerà più tardi una osservazione.

10. Pel rovesciamento dei limiti di un integrale definito, abbiamo il teorema

$$\int_a^b dx \cdot f(x) = -\int_b^a dx \cdot f(x)$$

che immediatamente si dimostra collo stesso mezzo suggerito per la dimostrazione del teorema antecedente.

11. Se è $f(x) = p(x) + q(x) + r(x) +$ ecc. è anche

$$\int_a^b dx \cdot f(x) = \int_a^b dx \cdot p(x) + \int_a^b dx \cdot q(x) + \int_a^b dx \cdot r(x) + \text{ecc.};$$

e a provar ciò basta sostituire a ciascun integrale definito l' espressione equivalente indicata al num. 1 nella equazione (α).

12. Pel cambiamento dei limiti abbiamo il teorema generalissimo

$$\int_a^b dx \cdot f(x) = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} dx \cdot f\big(\psi(x)\big)\,\psi'(x)$$

dove nel secondo membro $\psi(x)$ è un'altra funzione qualunque di x indipendente da $f(x)$, $\psi'(x)$ è la sua derivata prima per rapporto ad x, e nei limiti il simbolo ϕ indica la forma di funzione inversa della ψ.

Dimostrazione. Pongasi $x=\psi(y)$, e la trasformazione dell'integrale indefinito $\int dx \cdot f(x)$ nell'integrale indefinito $\int dy \cdot f\big(\psi(y)\big)\,\psi'(y)$ è cosa delle più ovvie nel calcolo integrale ordinario. Passando alle definizioni, i valori di y corrispondenti ai valori a, b di x si avranno deducendo dalla $x=\psi(y)$ la sua inversa $y=\phi(x)$, indi nel secondo membro di quest'ultima ponendo prima $x=a$, poi $x=b$. Così l'integrale definito proposto si prova eguale a

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} dy \cdot f\big(\psi(y)\big)\,\psi'(y).$$

Ridotta la trasformazione a questo punto, alla lettera y che giuoca in un modo puramente istrumentale, si può di nuovo sostituire la lettera x, e si ha il teorema enunciato (*).

Una osservazione su cui ritornerò più tardi è che ad un solo valore di x possono nel passaggio dalla $x=\psi(y)$ alla $y=\phi(x)$ corrispondere più valori di y. Per ora supporrò che ciò non avvenga prendendo a sciogliere soltanto equazioni di primo grado nei corollarj che passo a spiegare. È evidente che il numero di questi corollarj può ingrandirsi a piacere: porrò quei soli che sono d'uso frequente.

13. Per ridurre a zero uno dei limiti.
Si fa $x=a+y$ e si ha

$$\int_a^b dx \cdot f(x) = \int_0^{b-a} dx \cdot f(a+x).$$

14. Per introdurre nei due limiti una quantità arbitraria.
Si pone $x=y+h$ e si ottiene

$$\int_a^b dx \cdot f(x) = \int_{a-h}^{b-h} dx \cdot f(x+h).$$

Può osservarsi che il corollario precedente è un caso particolare di questo ove pongasi $h=a$.

15. Per cambiare il segno alla variabile senza cambiare i limiti.
Si fa $x=a+b-y$, ed osservando che in questo caso è (n.° 12) $\psi'(y)=-1$ l'integrale $\int_a^b dx \cdot f(x)$ si muta dapprima nell'altro $-\int_b^a dy \cdot f(a+b-y)$;

(*) I quattro teoremi antecedenti trovansi anche nelle Lezioni di calcolo sublime del Bordoni. Vedi Tom. I, num. 85, 86.

poi rovesciando i limiti (n.° 10) e riponendo x per y si ha

$$\int_a^b dx \cdot f(x) = \int_a^b dx \cdot f(a+b-x).$$

16. Per ridurre i due limiti eguali e di segno contrario.

Si mette $x = y + \frac{1}{2}(a+b)$ e si deduce

$$\int_a^b dx \cdot f(x) = \int_{-\frac{1}{2}(b-a)}^{\frac{1}{2}(b-a)} dx \cdot f\left(x + \frac{1}{2}(a+b)\right).$$

17. Per cambiare i due limiti a, b in altri due α, β quando niuno dei quattro sia l' infinito.

Si fa $\quad x = b\dfrac{y-\alpha}{\beta-\alpha} - a\dfrac{y-\beta}{\beta-\alpha} \quad$ e si ha

$$\int_a^b dx \cdot f(x) = \frac{b-a}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta dx \cdot f\left(b\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} - a\frac{x-\beta}{\beta-\alpha}\right).$$

18. Giova marcare due casi particolari del precedente teorema, che occorrono per mutare i limiti *zero*, 1 in due qualunque, e viceversa

$$\int_0^1 dx \cdot f(x) = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta dx \cdot f\left(\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right)$$

$$\int_a^b dx \cdot f(x) = (b-a)\int_0^1 dx \cdot f\left(a + (b-a)x\right).$$

19. E questi altri compresi nei precedenti

$$\int_0^1 dx \cdot f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi dx \cdot f\left(\frac{x}{\pi}\right)$$

$$\int_0^b dx \cdot f(x) = b\int_0^1 dx \cdot f(bx).$$

L' ultimo ora esposto corollario è principalmente di uso per far dipendere i valori degli integrali definiti in cui uno dei limiti è qualunque, dagli stessi in cui un tal limite è l'unità. È facile capire di quanta utilità riesca una tale riduzione supponendo che sia costrutta una tavola coi valori di integrali definiti fra *zero*, 1 per diverse determinazioni della funzione $f(x)$.

20. Chi si è resa familiare l' idea dell' indipendenza del valore di un integrale definito dalla lettera che si adopera nell'integrazione comprenderà che l'ultima equazione trovata non si altera scrivendo dapprima

$$\int_0^b dx \cdot f(x) = b\int_0^1 du \cdot f(bu)$$

e poi mettendo x in luogo di b; talchè hassi

$$\int_0^x dx \cdot f(x) = x\int_0^1 du \cdot f(xu);$$

così un' integrale che ritiene la variabile in uno dei limiti si fa dipendere da un altro nel quale ambi i limiti sono determinati e la variabile suddetta figura come una costante.

21. Ecco un altro teorema assai importante che riduce alla metà il corso della variabile fra due limiti eguali e di segno contrario

$$\int_{-a}^{a} dx \cdot \phi(x) = \int_{0}^{a} dx \cdot [\phi(x) + \phi(-x)].$$

Per dimostrarlo spezziamo il proposto integrale in due (n.° 9) in modo di avere

$$\int_{-a}^{a} dx \cdot \phi(x) = \int_{-a}^{0} dx \cdot \phi(x) + \int_{0}^{a} dx \cdot \phi(x).$$

Ora trasformiamo il primo di quelli del secondo membro facendo $x = -y$, otterremo

$$\int_{-a}^{0} dx \cdot \phi(x) = -\int_{a}^{0} dy \cdot \phi(-y) = \int_{0}^{a} dy \cdot \phi(-y) = \int_{0}^{a} dx \cdot \phi(-x);$$

sostituiscasi l'ultimo trovato valore in luogo del suo equivalente, poi si coprano con un solo segno integrale i due termini simili ed avrassi l'espressione annunciata.

22. Un tale teorema ha due corollarj di molto uso.

Quando $\phi(-x) = \phi(x)$, come succede ogni volta che la x è nella ϕ dappertutto a potenze pari, o sotto coseni, o ecc., abbiamo

$$\int_{-a}^{a} dx \cdot \phi(x) = 2\int_{0}^{a} dx \cdot \phi(x).$$

Quando $\phi(-x) = -\phi(x)$, come succede ogni volta che la x è nella ϕ dappertutto a potenze dispari, o sotto seni, o ecc., abbiamo

$$\int_{-a}^{a} dx \cdot \phi(x) = 0.$$

23. Il cambiamento dei limiti quando nei primi o nei secondi entra l'infinito è operazione che esige particolari artificj, e cautele. Trovo che il Poisson (*) per cambiare i limiti *zero*, 1 nei limiti *zero*, ∞, adopera (n.° 12) l'equazione

$$x = 1 - \frac{1}{1+y}, \text{ la cui inversa è } y = \frac{1}{1-x} - 1.$$

Trovo che il medesimo geometra fa altrove uso per lo stesso oggetto della equazione

$$x = e^{-ny} \quad \text{la cui inversa è} \quad y = -\frac{1}{n}\log. x$$

essendo sempre n quantità positiva. È manifesto che simili trasformazioni possono farsi in moltissime altre maniere. Chiuderò questo capitolo dimostrando una formola generalissima data dal Cauchy (**) per trasformare un'integrale

(*) *Journal Polyt.* Cb. XIX, pag. 478.

(**) *Exercices de Mathématiques*, Tom. I, pag. 106.

definito fra l'infinito negativo e il positivo in un altro definito fra zero e l'unità. La formola è

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot f(x) = \int_0^1 dx \cdot \left[f(x) + f(-x) + \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} f\left(-\frac{1}{x}\right)\right].$$

Infatti l'integrale del primo membro è primieramente pel teorema del n.° 21 eguale all'altro

$$\int_0^{\infty} dx \cdot [f(x) + f(-x)];$$

e questo pel teorema del n.° 9 eguale alla somma

$$\int_0^1 dx \cdot [f(x) + f(-x)] + \int_1^{\infty} dx \cdot [f(x) + f(-x)];$$

qui lasciando il primo come è, si trasformi il secondo ponendo $x = \frac{1}{y}$, da cui $y = \frac{1}{x}$. Vedendo da quest'ultima relazione che ai valori $x = 1$, $x = \infty$ corrispondono i valori $y = 1$, $y = 0$, si capirà (num. 12) che quell'integrale eguaglia $-\int_1^0 dy \cdot \left[\frac{1}{y^2} f\left(\frac{1}{y}\right) + \frac{1}{y^2} f\left(-\frac{1}{y}\right)\right]$, e questo (n.° 10) l'altro

$$\int_0^1 dy \cdot \left[\frac{1}{y^2} f\left(\frac{1}{y}\right) + \frac{1}{y^2} f\left(-\frac{1}{y}\right)\right].$$

Rimettasi ora x per y e l'espressione risultante si conpenetri con quella del primo integrale non toccato: si avrà la formola proposta.

CAPO III.

Come per mezzo di un integrale definito si esprimano i resti delle serie.

24. La formola di Taylor

$$(a) \qquad f(x + \omega) = f(x) + \omega f'(x) + \frac{\omega^2}{2} f''(x) + \cdots$$

e quella che subito ne discende, posto $x = 0$, $\omega = x$,

$$(b) \qquad f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \cdots$$

hanno ne' secondi membri serie infinite che qualche volta (e lo vedremo in appresso) possono condurre a conclusioni erronee quando nell'applicazione dei valori particolari diventano serie divergenti. A togliere ogni pericolo di errore si fanno finire dopo un certo numero di termini che è arbitrario, ponendo un resto il quale equivale alla somma di tutti i termini seguenti. Dicasi R il resto della serie (a) dopo un numero n di termini, e similmente r quello della serie (b). Lagrange ha insegnato ad esprimere R, r nella maniera che segue

$$(c) \qquad R=\frac{\omega^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}f^{(n)}(x+\theta\omega)\,; \qquad r=\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}f^{(n)}(\theta x)$$

essendo θ un numero compreso fra *zero*, 1, e indicando al solito $f^{(n)}$ la derivata (n) esima della f presa per riguardo alla quantità notata fra le parentesi.

È noto richiedersi che nel primo caso la $f^{(n)}(x+\omega)$, ove x si riguarda come avente un valore determinato, non debba diventare infinita per nessun valore di ω compreso fra zero e quello che gli venne in atto assegnato: e che lo stesso si possa dire nel secondo caso della $f^{(n)}(x)$ rispetto ai valori della x.

25. Quantunque siano molte le applicazioni del riferito teorema, è evidente ch'esso lascia ancora qualche cosa a desiderare. Infatti, conoscere i limiti fra i quali è compresa una quantità non è conoscere la quantità, e però Lagrange istesso chiama la quantità θ incognita, come può vedersi sul fine del Capo VI della teorica delle funzioni analitiche. In conseguenza anche i resti R, r, quando per essi si prendano i valori delle equazioni (c), non possono dirsi determinati, e si hanno solo delle nozioni, che qui non giova di richiamare, intorno alle quantità fra le quali essi debbono essere contenuti. Sarebbe dunque un notabile miglioramento nella esposta teorica quello di dare le espressioni dei resti R, r, in maniera assoluta, senza l'intervento della quantità θ conosciuta solo imperfettamente: e questo è ciò che si ottiene mediante una delle più facili applicazioni del calcolo degli integrali definiti nel tempo stesso che si forma una nuova dimostrazione delle formole di sviluppo. Mi affretto a mettere questa analisi per la ragione indicata sul fine della introduzione.

25. Si conosce facilmente la verità dell'equazione

$$(d) \qquad f(x+\omega)=f(x)+\int_0^\omega dz\cdot f'(x+\omega-z)$$

ponendo mente al valore dell'integrale indefinito

$$\int dz\cdot f'(x+\omega-z)=-f(x+\omega-z)$$

che subito si vede giusto col mezzo della derivazione, e passando da questo al valore dello stesso integrale definito fra *zero*, ω (riveggasi il n.° 1). Il teorema d'integrazione a parti dà poi successivamente

$$\int dz\cdot f'(x+\omega-z)=zf'(x+\omega-z)+\int dz\cdot z\,f''(x+\omega-z)$$

$$\int dz\cdot zf''(x+\omega-z)=\frac{z^2}{2}f''(x+\omega-z)+\frac{1}{2}\int dz\cdot z^2f'''(x+\omega-z)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\int dz\cdot z^{m-1}f^{(m)}(x+\omega-z)=\frac{z^m}{m}f^{(m)}(x+\omega-z)+\frac{1}{m}\int dz\cdot z^m f^{(m+1)}(x+\omega-z).$$

Si proceda da queste equazioni a quelle che si trovano definendo gl'integrali

fra i limiti *zero*, ω (riveggasi il n.° 11), cioè alle

$$\int_0^\omega dz\cdot f'(x+\omega-z)=\omega f'(x)+\int_0^\omega dz\cdot z f''(x+\omega-z)$$

$$\int_0^\omega dz\cdot z f''(x+\omega-z)=\frac{\omega^2}{2}f''(x)+\frac{1}{2}\int_0^\omega dz\cdot z^2 f'''(x+\omega-z)$$

$$\int_0^\omega dz\cdot z^2 f'''(x+\omega-z)=\frac{\omega^3}{3}f'''(x)+\frac{1}{3}\int_0^\omega dz\cdot z^3 f^{\text{IV}}(x+\omega-z)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\int_0^\omega dz\cdot z^{m-1} f^{(m)}(x+\omega-z)=\frac{\omega^m}{m}f^{(m)}(x)+\frac{1}{m}\int_0^\omega dz\cdot z^m f^{(m+1)}(x+\omega-z)$$

e queste insieme colla (d) daranno per via di successive sostituzioni altrettante nuove espressioni di $f(x+\omega)$ che saranno

$$f(x+\omega)=f(x)+\omega f'(x)+\int_0^\omega dz\cdot z f''(x+\omega-z)$$

$$=f(x)+\omega f'(x)+\frac{\omega^2}{2}f''(x)+\frac{1}{2}\int_0^\omega dz\cdot z^2 f'''(x+\omega-z)$$

$$=f(x)+\omega f'(x)+\frac{\omega^2}{2}f''(x)+\frac{\omega^3}{2\cdot 3}f'''(x)+\frac{1}{2\cdot 3}\int_0^\omega dz\cdot z^3 f^{\text{IV}}(x+\omega-z)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Proseguendo e generalizzando si ottiene

$$f(x+\omega)=f(x)+\omega f'(x)+\cdots\cdots+\frac{\omega^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)}f^{(n-1)}(x)$$
$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\int_0^\omega dz\cdot z^{n-1} f^{(n)}(x+\omega-z)$$

ed ecco la serie di Taylor terminata con un integrale definito. Quella che se ne deduce ponendo $x=0$, $\omega=x$, sarà

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\cdots\cdots+\frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)}f^{(n-1)}(0)$$
$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\int_0^x dz\cdot z^{n-1} f^{(n)}(x-z);$$

quindi i due resti R, r delle equazioni (c) saranno ora espressi in quest'altra maniera

$$(e)\qquad R=\frac{1}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\int_0^\omega dz\cdot z^{n-1} f^{(n)}(x+\omega-z);$$
$$r=\frac{1}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\int_0^x dz\cdot z^{n-1} f^{(n)}(x-z).$$

26. Chiunque nella lettura del capitolo precedente si è formata una giusta idea sul potersi in infiniti modi variare le espressioni per integrali definiti senza cambiamento di valore, capirà che i resti R, r dietro le precedenti equazioni (e) si mettono a piacimento sotto moltissime forme diverse. Darò qui alcune di queste trasformazioni che trovo usate a qualche fine. Per cambiare l'espressione di R pongo $\omega - z = u$: rifletto che ai valori dei limiti $z = 0$, $z = \omega$ corrispondono i valori $u = \omega$, $u = 0$: e usando il teorema del n.° 10, ottengo

$$(f) \qquad R = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)} \int_0^\omega du \cdot (\omega - u)^{n-1} f^{(n)}(x+u).$$

Opero in similissima maniera per trasformare l'espressione del resto r ponendo $x - z = u$, e trovo

$$(g) \qquad r = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)} \int_0^x du \cdot (x-u)^{n-1} f^{(n)}(u).$$

Sotto queste fogge compajono i resti R, r nella lezione trentesima sesta del Cauchy (*).

Ponendo ora nella prima delle (e) $z = \omega t$, e nella seconda $z = xt$, si ottengono (vedi n.° 19).

$$(h) \qquad \begin{cases} R = \dfrac{\omega^n}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)} \displaystyle\int_0^1 dt \cdot t^{n-1} f^{(n)}(x + \omega - \omega t); \\[2ex] r = \dfrac{x^n}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)} \displaystyle\int_0^1 dt \cdot t^{n-1} f^{(n)}[x(1-t)]. \end{cases}$$

Si adotti un tal valore di R, e si metta $\omega = y - x$, essendo y una nuova indeterminata qualunque: la formola (a) (n.° 24) diventerà

$$(k) \qquad f(y) = f(x) + (y-x)f'(x) + \frac{1}{2}(y-x)^2 f''(x) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)} (y-x)^{n-1} f^{(n-1)}(x)$$
$$+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)} (y-x)^n \int_0^1 dt \cdot t^{n-1} f^{(n)}[y - t(y-x)]$$

equazione rimarcabile di cui si serve altrove (**) il Cauchy per importanti ricerche.

27. *Scolio.* Le trovate espressioni dei resti sono ancora suscettibili di un perfezionamento per cui sotto all'integrale definito invece delle derivate (n) esime della funzione primitiva compare la stessa funzione non affetta da operazione di derivazione. Ciò può ottenersi col sussidio di una formola che dimostrerò nel Capo V.

(*) *Résumé des Leçons données a l'École Polytechnique.*

(**) *Mémoires de l'Institut de France.* Tome VIII, pag. 155.

CAPO IV.

Ricerca dei valori degli integrali definiti passando per gli indefiniti.

28. Uno dei maggiori vantaggi per cui si raccomandano alcuni metodi proprj del calcolo degli integrali definiti è quello di giungere per essi non di rado ad ottenere fra certi limiti i valori di varie formole integrali delle quali è incognita l'integrazione indefinita. Apprezzeremo noi pure in appresso più d'una volta una sì bella proprietà di quegli artificj analitici: ma qui sul principio gioverà riflettere che dove si possa eseguire l'integrale indefinito, il passaggio per esso è certamente la via più naturale per la ricerca di qualsivoglia integrale definito. E infatti grandissimo numero di integrali definiti si determinano per questo mezzo: occorrendo spesso l'osservazione che mentre il valor variabile dell'integrale indefinito ha una espressione complicata, quello dell'integrale definito fra certi limiti ne ottiene una breve ed elegante. Ognun vede che si potrebbe qui non finirla mai richiamando tutti gl'integrali indefiniti che si sanno determinare per quindi passare a innumerabili integrali definiti. Memore che non mi sono proposto di percorrere in tutta la sua estensione questa parte d'analisi, ma solamente di prendervi qua e là alcune notizie, mi limiterò sull'argomento in discorso ad alcune riflessioni.

29. Il più delle volte si pigliano le formole degli integrali indefiniti, vi si assoggettano opportunamente alcune costanti a certe condizioni, e si danno alla variabile nei due limiti tali valori che semplificano grandemente i risultati. Prendiamo per un esempio le formole note e facilmente dimostrabili *a posteriori* colla derivazione

$$(a)\qquad \begin{aligned} \int dx\cdot e^{-bx}\sin.ax &= -e^{-bx}\,\frac{a\cos.ax+b\sin.ax}{a^2+b^2}\,; \\ \int dx\cdot e^{-bx}\cos.ax &= e^{-bx}\,\frac{a\sin.ax-b\cos.ax}{a^2+b^2}\,: \end{aligned}$$

assoggettiamovi la costante b a non poter avere che valori positivi e maggiori di zero, e definiamo gl'integrali fra *zero*, ∞.

Avvertendo essere $e^{-b\infty}=\frac{1}{e^{b\infty}}=\frac{1}{\infty}=0$ troveremo

$$(b)\qquad \int_0^\infty dx\cdot e^{-bx}\sin.ax=\frac{a}{a^2+b^2}\,;\quad \int_0^\infty dx\cdot e^{-bx}\cos.ax=\frac{b}{a^2+b^2}$$

integrali definiti di molto uso.

30. Altre volte dirigendosi alla ricerca dell'integrale definito per la stessa via che per quella dell'indefinito si può nondimeno abbreviare di molto l'ope-

razione. Valga per esempio l'integrale

$$\int_0^1 dx \cdot \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Abbiamo l'equazione identica

$$(\gamma) \qquad \int dx \cdot \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{m} x^{m-1}\sqrt{1-x^2} + \frac{m-1}{m}\int dx \cdot \frac{x^{m-2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

che trovasi *a priori* coll'integrazione a parti, e provasi subito *a posteriori* colla derivazione. Sogliono gli autori scrivere dopo questa quelle altre equazioni che da essa si deducono mettendo successivamente $m-2$, $m-4$, ecc. in luogo di m; allora mediante una continua sostituzione si fa dipendere, quando m è numero intero e positivo, l'integrale proposto dai due noti

$$(\delta) \qquad \int dx \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}; \quad \int dx \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arc. sin.}\, x.$$

Le formole finali dell'integrale indefinito nei due casi di m pari e dispari sono alquanto lunghe, e danno poi espressioni molto più semplici quando si passa al definito fra i limiti già detti. Se però non si cerca che quest' ultimo, l'andamento del calcolo diventa più corto osservando che nel secondo membro della (γ) il termine non affetto da segno integrale svanisce in ambi i limiti, e si ha

$$\int_0^1 dx \cdot \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{m-1}{m}\int_0^1 dx \cdot \frac{x^{m-2}}{\sqrt{1-x^2}};$$

quindi colla continua sostituzione

$$\int_0^1 dx \cdot \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(m-1)(m-3)(m-5)\cdots(m-2r+1)}{m(m-2)(m-4)\cdots(m-2r+2)}\int_0^1 dx \cdot \frac{x^{m-2r}}{\sqrt{1-x^2}}$$

essendo r un numero intero qualunque.

Pertanto, fatta prima $m=2r$, poi $m=2r+1$, e considerati i valori

$$\int_0^1 dx \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^1 dx \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 1$$

che deduconsi dalle (δ), si hanno dalla precedente le formole

$$(\varepsilon) \qquad \begin{aligned} &\int_0^1 dx \cdot \frac{x^{2r}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2r-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2r}\cdot\frac{\pi}{2}; \\ &\int_0^1 dx \cdot \frac{x^{2r+1}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\cdot4\cdot6\cdots2r}{3\cdot5\cdot7\cdots(2r+1)}. \end{aligned}$$

È bene formarsi una tavoletta degli integrali definiti che sono casi particolari dei due precedenti per $r=0, 1, 2, 3, 4$ ecc., giacchè occorrono essi in alcune questioni di meccanica, ver. gr. nella teorica del pendolo.

31. Interessano talvolta alcune formole d'integrali definiti non tanto considerate da sole, ma perchè diventano utili in ulteriori più importanti ricerche.

Adunque. 1.° Sotto l'indicato riguardo giova osservare le seguenti

$$\int_{-r}^{r} dx \cdot \sin.\frac{k\pi x}{r}\sin.\frac{i\pi x}{r}=0;\quad \int_{-r}^{r} dx \cdot \sin.\frac{k\pi x}{r}\cos.\frac{i\pi x}{r}=0$$

$$(\zeta)\qquad \int_{-r}^{r} dx \cdot \cos.\frac{k\pi x}{r}\cos.\frac{i\pi x}{r}=0$$

$$\int_{-r}^{r} dx \cdot \left(\sin.\frac{i\pi x}{r}\right)^2=\int_{-r}^{r} dx \cdot \left(\cos.\frac{i\pi x}{r}\right)^2=r$$

dove k, i sono numeri interi, r quantità qualunque, e π ha la solita significazione. Ne lascio all'esercizio dei lettori la dimostrazione: avvertendo che per le tre prime bisogna scomporre i prodotti di seni e coseni in somma o differenza di seni e coseni semplici. Così in luogo della espressione $\sin.\frac{k\pi x}{r}\sin.\frac{i\pi x}{r}$ conviene assumere l'equivalente $\frac{1}{2}\cos.(k-i)\frac{\pi x}{r}-\frac{1}{2}\cos.(k+i)\frac{\pi x}{r}$. Si eseguiscono allora le integrazioni indefinite alla maniera ordinaria, e si passa alle definizioni, che danno i valori notati per essere $\sin.(k-i)\pi=0$, $\sin.(k+i)\pi=0$, giacchè $k-i$, $k+i$ sono sempre anch'essi numeri interi. Per le due ultime formole, avendo le espressioni d'integrali indefiniti adoperate a trovare le antecedenti prima e terza, vi si fa $k=i$; e del termine che si presenta sotto la forma $\frac{0}{0}$ si cerca il valore colla nota regola.

2.° Mascheroni fece molto uso della formola

$$(\eta)\qquad \int_0^1 du \cdot \frac{u^{\frac{1}{2}}+u^{-\frac{1}{2}}}{1+u^2}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Per dimostrarla si pone $u=z^2$, da cui $z=\pm u^{\frac{1}{2}}$. Adunque ad un valore di u corrispondono due valori di z, caso preveduto più sopra (num. 12). Qui però l'uno e l'altro conducono alla stessa formola integrale trasformata. Quando il radicale si prende col segno positivo la trasformata è $2\int_0^1 dz \cdot \frac{1+z^2}{1+z^4}$, e quando si prende col segno negativo, essa è $-2\int_0^{-1} dz \cdot \frac{1+z^2}{1+z^4}$, che subito si dimostra eguale alla precedente mediante il corollario primo del n.° 22, o ponendo $z=-y$. Essendo poi

$$2\frac{1+z^2}{1+z^4}=\frac{1}{1+z\sqrt{2}+z^2}+\frac{1}{1-z\sqrt{2}+z^2}$$

si trova primieramente l'integrale indefinito

$$2\int dz\cdot\frac{1+z^2}{1+z^4}=\sqrt{2}\,\text{Arc. tan.}\,\frac{z}{\sqrt{2}+z}+\sqrt{2}\,\text{Arc. tan.}\,\frac{z}{\sqrt{2}-z}$$

che a motivo del teorema generale

$$\text{Arc. tan.}x+\text{Arc.tan.}y=\text{Arc. tan.}\,\frac{x+y}{1-xy}$$

si riduce

$$2\int dz\cdot\frac{1+z^2}{1+z^4}=\sqrt{2}\,\text{Arc. tan.}\,\frac{z\sqrt{2}}{1-z^2}$$

quindi passando alla definizione fra i limiti *zero*, 1 si ha il valore del secondo membro della (η), prendendo $\frac{\pi}{2}$ per l'arco la cui tangente è infinita.

3.° Ecco un'altra formola che presto ci sarà utile

$$(\vartheta)\qquad \int_{-\pi}^{\pi}dx\cdot e^{hx\sqrt{-1}}=0$$

quando h sia numero intero positivo o negativo ma non zero.

Si prova ponendo in luogo di $e^{hx\sqrt{-1}}$ l'espressione equivalente

$$\cos.hx+\sqrt{-1}\,\sin.hx.$$

L'integrazione ordinaria dà

$$\int dx\cdot e^{hx\sqrt{-1}}=\frac{\sin.hx}{h}-\sqrt{-1}\,\frac{\cos.hx}{h}$$

e passando ai limiti si trova l'esposto. Il caso di $h=0$ si sottrae alla formola (ϑ) e il valore dell'integrale è allora 2π. Infatti nella quantità equivalente all'integrale indefinito si ha allora il primo termine sotto la forma $\frac{0}{0}$: quindi per la nota regola, o più prestamente eseguendo l'integrazione definita nella espressione $\int_{-\pi}^{\pi}dx$, si ottiene il valore 2π.

4.° La dimostrazione che daremo in seguito di alcuni interessanti teoremi d'Eulero esige la cognizione dell'integrale

$$\int_0^{\pi}dx\cdot\frac{1}{a+b\cos.x}.$$

A questo oggetto si ponga $x=2\,\text{Arc. tan.}\,t$, la cui equazione inversa è $t=\tan.\,\frac{1}{2}\,x$, talchè ai valori dei limiti $x=0$, $x=\pi$ corrispondono $t=0$, $t=\infty$.

Abbiamo poi

$$\cos.\frac{1}{2}x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\quad \sin.\frac{1}{2}x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

quindi

$$\cos.x=\left(\cos.\frac{1}{2}x\right)^2-\left(\sin.\frac{1}{2}x\right)^2=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\text{e}\quad \frac{1}{a+b\cos.x}=\frac{1+t^2}{a+b+(a-b)t^2};\quad \text{inoltre}\quad \left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{2}{1+t^2}$$

e pertanto

$$\int_0^\pi dx\cdot\frac{1}{a+b\cos.x}=2\int_0^\infty dt\cdot\frac{1}{a+b+(a-b)t^2}.$$

Quest' ultimo si trova facilmente passando per l' integrale indefinito, giacchè

$$\int dt\cdot\frac{1}{a+b+(a-b)t^2}=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\,\text{Arc. tan.}\,t\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$$

e si conchiude

$$(\iota)\qquad \int_0^\pi dx\cdot\frac{1}{a+b\cos.x}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

dove perchè non compaja l'immaginario bisogna che sia $b<a$.

32. Il passaggio per integrazioni ordinarie è spesse volte associato ad artificj particolari d' analisi. Molto in questa parte si sono distinti gl' italiani geometri Mascheroni, Bidone e Frullani; esporrò in seguito un metodo dei due primi prendendo almeno quella estensione che è necessaria a formarsene un'idea. Non tarderò però a riferire quello elegantissimo del Frullani per trovare il valore dell' integrale $\int_0^\infty dx\cdot\frac{\sin.x}{x}$ di grande importanza in ulteriori ricerche e discussioni.

Si cominci a spezzare il corso della variabile da zero all' infinito in tanti intervalli eguali a π facendo (num. 9)

$$\int_0^\infty dx\cdot\frac{\sin.x}{x}=\int_0^\pi dx\cdot\frac{\sin.x}{x}+\int_\pi^{2\pi} dx\cdot\frac{\sin.x}{x}+\int_{2\pi}^{3\pi} dx\cdot\frac{\sin.x}{x}+\text{ecc. all'inf.}$$

Tutti gl' integrali che compongono il secondo membro di questa equazione si possono ridurre ad un solo adoperando il teorema del num. 13, e si ha

$$\int_0^\infty dx\cdot\frac{\sin.x}{x}=\int_0^\pi dx\cdot\left\{\frac{\sin.x}{x}+\frac{\sin.(\pi+x)}{\pi+x}+\frac{\sin.(2\pi+x)}{2\pi+x}+\frac{\sin.(3\pi+x)}{3\pi+x}+\text{ecc.}\right\}$$

che non si altera scrivendo

$$\int_0^\infty dx \cdot \frac{\sin.x}{x} = \int_0^\pi dx \cdot \sin.x \left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{2\pi+x} + \frac{1}{4\pi+x} + \frac{1}{6\pi+x} + \text{ecc.} \right\}$$

$$-\int_0^\pi dx \cdot \sin.x \left\{ \frac{1}{\pi+x} + \frac{1}{3\pi+x} + \frac{1}{5\pi+x} + \frac{1}{7\pi+x} + \text{ecc.} \right\}.$$

Nel secondo integrale del secondo membro si cangi il segno alla variabile senza cangiare i limiti (vedi num. 15) e diventerà

$$-\int_0^\pi dx \cdot \sin.x \left\{ \frac{1}{2\pi-x} + \frac{1}{4\pi-x} + \frac{1}{6\pi-x} + \frac{1}{8\pi-x} + \text{ecc.} \right\}$$

quindi riunendo i due integrali in un solo

$$\int_0^\infty dx \cdot \frac{\sin.x}{x} = \int_0^\pi dx \cdot \sin.x \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{2\pi-x} + \frac{1}{2\pi+x} - \frac{1}{4\pi-x} + \frac{1}{4\pi+x} - \frac{1}{6\pi-x} + \text{ecc.} \right\}$$

Eulero ha dimostrato essere (*)

$$\frac{\pi}{2n} \tan. \frac{m\pi}{2n} = \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} + \frac{1}{3n-m} - \frac{1}{3n+m} + \frac{1}{5n-m} - \frac{1}{5n+m} + \text{ecc.}$$

significando n, m quantità qualunque. Facciasi $n=\pi$, $m=\pi-x$ e la precedente formola diverrà

$$\frac{1}{2} \cot. \frac{x}{2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\pi-x} + \frac{1}{2\pi+x} - \frac{1}{4\pi-x} + \frac{1}{4\pi+x} - \frac{1}{6\pi-x} + \text{ecc.}$$

Adunque l'ultima equazione può ridursi

$$\int_0^\infty dx \cdot \frac{\sin.x}{x} = \frac{1}{2} \int_0^\pi dx \cdot \sin.x \cot. \frac{x}{2},$$

e siccome $\sin.x \cot. \frac{x}{2} = 2\left(\cos. \frac{x}{2}\right)^2$, viene

$$\int_0^\infty dx \cdot \frac{\sin.x}{x} = \int_0^\pi dx \cdot \left(\cos. \frac{x}{2}\right)^2;$$

mettasi per $\left(\cos. \frac{x}{2}\right)^2$ l'espressione equivalente $\frac{1}{2} \cos.x + \frac{1}{2}$ e alla maniera

(*) *Introductio in analysin inf.* T. I. num. 171, 172.

ordinaria si troverà prontamente $\int_0^\pi dx\cdot\left(\cos.\frac{x}{2}\right)^2=\frac{\pi}{2}$: quindi

$$(\varkappa)\qquad \int_0^\infty dx\cdot\frac{\sin.x}{x}=\frac{\pi}{2}\ (^*).$$

Ponendo in questa $x=ry$, dove r dinota una qualunque quantità positiva, i limiti non si cambiano, e si ha la formola più generale

$$(\lambda)\qquad \int_0^\infty dy\cdot\frac{\sin.ry}{y}=\frac{\pi}{2}$$

nella quale è notabile che il valore dell' integrale definito è indipendente dalla grandezza di r: non è però indipendente dal segno della stessa r, come meglio in progresso.

Il sig. Poisson avea messo antecedentemente in più d'un luogo della sua grande memoria sugli integrali definiti qualche andamento di calcolo simile al surriferito: e verrà occasione di parlarne.

CAPO V.

Formola di Laplace e sue applicazioni.

33. La formola (ϑ) superiormente dimostrata ci conduce al ritrovamento di un'altra più importante, che è quella di cui parlammo al num. 27. Prendasi la formola di Taylor completata col suo resto dopo un numero $n+1$ di termini (num. 24, 26) e vi si faccia $\omega=\xi e^{y\sqrt{-1}}$, dove ξ, y sono qualunque: avremo

$$f(x+\xi e^{y\sqrt{-1}})=f(x)+\xi f'(x)e^{y\sqrt{-1}}+\frac{\xi^2}{2}f''(x)e^{2y\sqrt{-1}}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{\xi^n}{1\cdot2\cdot3\cdots n}f^{(n)}(x)e^{ny\sqrt{-1}}+\frac{\xi^{n+1}}{1\cdot2\cdot3\cdots n}\int_0^1 dt\cdot t^n f^{(n+1)}[x+(1-t)\xi e^{y\sqrt{-1}}]e^{(n+1)y\sqrt{-1}}$$

Si moltiplichi questa equazione per $e^{-ny\sqrt{-1}}$, avvertendo di passare nell' ultimo termine questo fattore sotto l' integrale, poi si integrino i due membri dell' equazione risultante per y fra i limiti $-\pi, \pi$. Tutti i termini del secondo membro antecedenti a $\frac{\xi^n}{1\cdot2\cdot3\cdots n}f^{(n)}(x)\int_{-\pi}^{\pi}dy$ svaniranno a motivo della formola (ϑ), e questo si ridurrà $\frac{\xi^n}{1\cdot2\cdot3\cdots n}f^{(n)}(x)\cdot 2\pi$ secondo l' ecce-

(*) Memorie della società Italiana T. XX. pag. 448.

zione marcata per la stessa formola (ϑ): l'ultimo termine poi conterrà un'integrale duplicato, e risulterà l'equazione

$$\int_{-\pi}^{\pi} dy \cdot f(x+\xi e^{y\sqrt{-1}})e^{-ny\sqrt{-1}} = \frac{\xi^n}{1\cdot2\cdot3\cdots n} f^{(n)}(x)\cdot 2\pi$$

$$+\frac{\xi^{n+1}}{1\cdot2\cdot3\cdots n}\int_0^1 dt\cdot t^n \int_{-\pi}^{\pi} dy \cdot f^{(n+1)}[x+(1-t)\xi e^{y\sqrt{-1}}]e^{y\sqrt{-1}}.$$

Abbiamo

$$f^{(n+1)}[x+(1-t)\xi e^{y\sqrt{-1}}]e^{y\sqrt{-1}} = \frac{1}{\xi(1-t)\sqrt{-1}}\left[\frac{df^{(n)}[x+(1-t)\xi e^{y\sqrt{-1}}]}{dy}\right]$$

quindi l'integrazione per y nell'ultimo termine si può eseguire, ed esso diverrà

$$\frac{\xi^n}{1\cdot2\cdot3\cdots n}\int_0^1 dt\cdot\frac{t^n}{(1-t)\sqrt{-1}}\left\{f^{(n)}[x+(1-t)\xi e^{\pi\sqrt{-1}}]-f^{(n)}[x+(1-t)\xi e^{-\pi\sqrt{-1}}]\right\}$$

sotto la quale espressione si vede che è zero, giacchè $e^{\pi\sqrt{-1}}=e^{-\pi\sqrt{-1}}$, equazione subito dimostrata traducendo gli esponenziali colle equivalenti formole composte di seno e coseno.

Adunque la trovata equazione somministra

$$(a) \qquad f^{(n)}(x)=\frac{1\cdot2\cdot3\cdots n}{2\pi\xi^n}\int_{-\pi}^{\pi} dy\cdot f(x+\xi e^{y\sqrt{-1}})e^{-ny\sqrt{-1}}$$

per cui la derivata (n) esima eguaglia una espressione nella quale la forma della funzione è la primitiva.

34. *Scolio.* La precedente formola è quella stessa che il Frullani ultimamente chiamò inammissibile (*). Essa è stata data la prima volta dal Laplace (**) senz'altra osservazione fuori di quella sull'introduzione dell'immaginario che avrebbe desiderato di togliere: il Cauchy (***) trasformando con essa sotto espressione d'integrale definito il termine generale della famosa serie di Lagrange per la risoluzione generale delle equazioni, non fa motto di alcuna restrizione: e nemmeno il Poisson in un caso simile (****), dimostrando una formola di Parseval per cui si ottiene sotto forma finita la somma della mentovata serie. L'objbiezione del Frullani è fondata sulla necessità della convergenza della serie per la verità della dimostrazione, convergenza che in generale non non si può riconoscere. Il principio a cui si appoggia il suo ragionamento è giustissimo, e noi pure lo riconosceremo nel capo seguente giovandoci di quanto

(*) Memorie della società Italiana. T. XX. pag. 700 e seg.

(**) *Théorie analytique des Probabilités.* P. I. num. 21.

(***) *Mémoires de l'Institut de France.* T. VIII. pag. 108.

(****) *Journal Polytechnique.* Cb. XIX. pag. 496.

egli c'insegnò in questa occasione: ma la difficoltà sul punto in questione rimane tolta quando si tien conto del resto, come sopra si è fatto. Il valente Toscano volle eziandio provarsi a discutere un caso particolare in cui credè di cogliere in fallo la formola controversa. Pare però che a quanto egli dice in proposito si possa dare una risposta, la quale in questo luogo ci condurrebbe troppo in lungo, e che non è forse più necessaria ora che abbiamo una dimostrazione (come ci sembra) rigorosa.

35. Facendo uso della trovata formola (a) rilevasi facilmente che le espressioni dei resti R, r date al n.° 26 $\big($equazioni $(h)\big)$ possono trasformarsi nelle seguenti

$$(b) \qquad R = \frac{n\,\omega^n}{\xi^n\,2\pi}\int_0^1 dt\cdot t^{n-1}\int_{-\pi}^{\pi} dy\cdot f[x+\omega(1-t)+\xi\, e^{y\sqrt{-1}}]\,e^{-ny\sqrt{-1}}$$

$$(c) \qquad r = \frac{n\,x^n}{\xi^n\,2\pi}\int_0^1 dt\cdot t^{n-1}\int_{-\pi}^{\pi} dy\cdot f[x(1-t)+\xi\, e^{y\sqrt{-1}}]\,e^{-ny\sqrt{-1}}$$

dove si veggono tolte le derivate (n) esime secondo si disse al n.° 27. Non sono però queste le formole più semplici, potendosi dalle precedenti dedurre altre ove conservando l'indicato vantaggio siavi un solo integrale e non un'integrale duplicato. Darò nel numero seguente l'analisi per questa trasformazione che avrei desiderato di riferire più tardi contenendo l'uso di due principj che in seguito si spiegano più in difuso; ma sembrommi inconveniente maggiore il tornare più volte a spizzico sullo stesso argomento: il lettore che sentisse qualche difficoltà per la derivazione e l'integrazione che vi si fanno pensi che in appresso vedrà anche più chiaramente la ragione di queste operazioni. Intanto rammentiamoci che in un'integrale duplicato, quando i limiti fra cui è definita un'integrazione non sono funzioni della variabile per la quale deve farsi l'integrazione seguente, è indifferente l'ordine nel cominciare dall'una piuttosto che dall'altra. Quindi la formola (b) può anche scriversi

$$(d) \qquad R = \frac{n\,\omega^n}{\xi^n\,2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dy\cdot e^{-ny\sqrt{-1}}\int_0^1 dt\cdot t^{n-1} f[x+\omega(1-t)+\xi\, e^{y\sqrt{-1}}].$$

È vero, che il Cauchy ha recentemente provato (*) (e ne farò cenno in seguito) esservi qualche caso in cui una tale inversione d'ordine non è lecita; ma una lieve osservazione a quanto egli dimostra nel luogo citato persuade facilmente che la precedente formola non soggiace a quella eccezione.

36. Nella formola (d) R è evidentemente una funzione di n numero positivo ed intero, epperò può scriversi R_n, avendo di mira la circostanza indicata. Si moltiplichi poi per ξ^n ed avremo

$$(e) \qquad R_n\,\xi^n = \frac{n\,\omega^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dy\cdot e^{-ny\sqrt{-1}}\int_0^1 dt\cdot t^{n-1} f[x+\omega(1-t)+\xi\, e^{y\sqrt{-1}}].$$

(*) *Exercices de Mathématiques*. T. I. pag. 85.

Qui la ξ è una quantità affatto arbitraria che entra in una equazione identica, laonde secondo un principio notissimo sussisterà insieme a tale equazione anche la sua derivata per rapporto a ξ. Avvertasi inoltre che la R_n può considerarsi non conteneute la ξ quantunque questa indeterminata appaja nel suo valore (d): è infatti chiaro che R_n ha un valore determinato supponendo determinati x, n, ω, e che quindi la ξ nel secondo membro della (d) deve entrare solo apparentemente e sparire a integrazioni eseguite. Si derivi adunque per ξ ritenendo R_n costante, e passando nel secondo membro sotto i segni integrali come è manifestamente lecito, e otterrassi

$$(f)\quad R_n\xi^{n-1}=\frac{\omega^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dy\cdot e^{-(n-1)y\sqrt{-1}}\int_0^1 dt\cdot t^{n-1}f'[x+\omega(1-t)+\xi e^{y\sqrt{-1}}].$$

Stando agli integrali indefiniti abbiamo per integrazione a parti

$$\int dt\cdot t^{n-1}f'[x+\omega(1-t)+\xi e^{y\sqrt{-1}}]=-\frac{t^{n-1}}{\omega}f[x+\omega(1-t)+\xi e^{y\sqrt{-1}}]$$
$$+\frac{n-1}{\omega}\int dt\cdot t^{n-2}f[x+\omega(1-t)+\xi e^{y\sqrt{-1}}]$$

come può immediatamente verificarsi colla derivazione. Da questa passando ai limiti e ritenendo $n>1$

$$\int_0^1 dt\cdot t^{n-1}f'[x+\omega(1-t)+\xi e^{y\sqrt{-1}}]=-\frac{1}{\omega}f(x+\xi e^{y\sqrt{-1}})$$
$$+\frac{n-1}{\omega}\int_0^1 dt\cdot t^{n-2}f[x+\omega(1-t)+\xi e^{y\sqrt{-1}}].$$

Pertanto la precedente (f) diventa

$$R_n\xi^{n-1}=-\frac{\omega^{n-1}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dy\cdot e^{-(n-1)y\sqrt{-1}}f(x+\xi e^{y\sqrt{-1}})$$
$$+\frac{(n-1)\omega^{n-1}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dy\cdot e^{-(n-1)y\sqrt{-1}}\int_0^1 dt\cdot t^{n-2}f[x+\omega(1-t)+\xi e^{y\sqrt{-1}}].$$

Ma la (e) ove mettasi $n-1$ per n dà

$$R_{n-1}\xi^{n-1}=\frac{(n-1)\omega^{n-1}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dy\cdot e^{-(n-1)y\sqrt{-1}}\int_0^1 dt\cdot t^{n-2}f[x+\omega(1-t)+\xi e^{y\sqrt{-1}}].$$

E però, sottraendo l'una all'altra queste due ultime equazioni, risulta

$$(R_n-R_{n-1})\xi^{n-1}=-\frac{\omega^{n-1}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dy\cdot e^{-(n-1)y\sqrt{-1}}f(x+\xi e^{y\sqrt{-1}})$$

ossia

$$R_{n+1} - R_n = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dy \cdot f(x+\xi e^{y\sqrt{-1}})\left(\frac{\omega e^{-y\sqrt{-1}}}{\xi}\right)^n.$$

Una tale equazione può integrarsi nel sistema delle differenze finite ove la variabile è n coll'aumento costante 1: e poichè in tale supposizione è

$$\Sigma\left(\frac{\omega e^{-y\sqrt{-1}}}{\xi}\right)^n = \frac{\omega^n}{\xi^{n-1}}\cdot\frac{e^{-ny\sqrt{-1}}}{\omega e^{-y\sqrt{-1}}-\xi}$$

viene

$$(g) \qquad R_n = \frac{\omega^n}{2\pi\xi^{n-1}}\int_{-\pi}^{\pi} dy\cdot\frac{f(x+\xi e^{y\sqrt{-1}})}{e^{ny\sqrt{-1}}(\xi-\omega e^{-y\sqrt{-1}})} + \text{Cost.}$$

La costante si prova zero col seguente ragionamento. Da tutte le espressioni del resto R_n date superiormente (ver. gr. dalla (d)) si rileva che il suo valore diviso per ω^{n-1} deve ancora ridursi a zero facendo $\omega=0$. Questa proprietà si verifica anche nel primo termine dell'ultima trovata (g), dunque deve verificarsi (quando esista) anche nel secondo, dunque la costante deve essere una quantità moltiplicata per ω^n, nel qual caso conterrebbe la n e non sarebbe più costante. Non si schiva questa contraddizione se non supponendo la costante zero.

Per tal maniera si conchiude che il valore del resto R può scriversi

$$(h) \qquad R = \frac{\omega^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dy\cdot\frac{f(x+\xi e^{y\sqrt{-1}})}{(\xi e^{y\sqrt{-1}})^{n-1}(\xi e^{y\sqrt{-1}}-\omega)}$$

da cui, quando $x=0$, $\omega=x$

$$(i) \qquad r = \frac{x^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dy\cdot\frac{f(\xi e^{y\sqrt{-1}})}{(\xi e^{y\sqrt{-1}})^{n-1}(\xi e^{y\sqrt{-1}}-x)}.$$

Ecco le due formole che danno i resti R, r senza derivazioni applicate alla forma f, e mediante un solo integrale definito; la seconda è stata trovata la prima volta dal Cauchy dietro un'analisi tutta diversa in una memoria che non è ancora stampata.

(sarà continuato)

PARTE PRIMA

SULLE INTENSITÀ DELLE VARIAZIONI DELLE QUANTITÀ

MEMORIA

DI ANTONIO BORDONI

Le cognizioni di molte cause e di molti effetti sì naturali che artificiali dipendono da proprietà relative alle intensità delle variazioni delle sole loro grandezze, per cui si possono concepire senza punto specificarne la natura o specie: tali sono appunto le proprietà contemplate in questa memoria, le quali si riferiscono alle sole intensità delle variazioni, cioè degli aumenti o dei decrementi, delle quantità in genere; per il che riesciranno utili in molte ricerche sì naturali che speculative. E sebbene si possono esse concepire, contemplando le quantità in sè stesse, non ostante, per facilitare sì il concepimento che l' uso loro, supporrò le quantità relative ai punti di una linea, o di una superficie, ovvero a quelli dello spazio; e nell' esporle terrò appunto quest' ordine medesimo.

I valori di una quantità Q, corrispondenti ai successivi punti di una linea, siano tali da costituire una serie continua ed uniformemente crescente; e Q_1, Q_2 esprimano quei valori particolari della Q stessa, che corrispondono ai termini di una porzione, della linea medesima, eguale alla *unità*.

Se si duplicasse, triplicasse, - - - la *costante* intensità della successiva variazione dei valori della Q, ordinatamente si duplicherebbe, triplicherebbe, - - - la differenza Q_2-Q_1; anzi, tra la costante intensità, qualunque essa sia, della successiva variazione della Q e la differenza Q_2-Q_1 vi sarà evidentemente un rapporto *costante*; e però si potrà usare, come si farà effettivamente, la differenza Q_2-Q_1 per indicare la medesima costante intensità della successiva variazione dei valori della Q.

Quando la differenza Q_2-Q_1 eguaglierà la unità della specie delle quantità Q, la corrispondente intensità della variazione dei valori della Q, si chiamerà *unità* delle intensità delle variazioni dei valori delle quantità della medesima specie della Q stessa.

Si immagini una linea, ai punti della quale corrispondano valori di una quantità Q formanti una serie continua ma variabile comunque. Se la variazione

che ha luogo per la Q, passando da un punto di questa linea al prossimo seguente di essa medesima, si mautenesse costante per una porzione qualsivoglia della linea, si avrebbe una serie continua ed uniformemente crescente o decrescente di nuove quantità. La intensità della variazione, che avrebbe luogo per questa nuova serie di quantità, è quella, che si chiamerà intensità della variazione della Q corrispondente al punto anzidetto, qualunque sia la variazione di essa.

Proposizione prima.

Data quella funzione della porzione indeterminata di una linea, che rappresenta una quantità relativa al termine variabile della porzione stessa; trovare la corrispondente intensità della variazione dei valori della quantità medesima?

Si chiami, s la lunghezza della porzione della linea, $Q(s)$ la quantità corrispondente, $I(s)$ la intensità richiesta, ed u, t le unità delle medesime Q, I. Evidentemente, ciò che sono $Q(s)$, $I(s)$ per la parte s, saranno $Q(s+\omega)$, $I(s+\omega)$ per la $s+\omega$, qualunque sia la indeterminata ω.

Se pel tratto ω della linea la intensità della variazione della quantità Q fosse t, la differenza delle due quantità corrispondenti ai termini di esso sarebbe evidentemente $u\omega$; e però, se la intensità pel medesimo tratto ω, in vece di essere t, fosse la $I(s)$, la differenza delle quantità corrispondenti ai termini stessi, come quarta proporzionale dopo

$$t,\ u\omega,\ I(s) \quad \text{sarebbe} \quad \omega\frac{u}{t}I(s);$$

e se in vece essa fosse la $I(s+\omega)$, l'analoga differenza risulterebbe

$$\omega\frac{u}{t}I(s+\omega) \quad \text{ossia} \quad \omega\frac{u}{t}I(s)+\omega^2\frac{u}{t}I'(s)+\text{ecc.}$$

Ma la vera differenza delle due quantità corrispondenti ai termini del tratto ω è

$$Q(s+\omega)-Q(s)\ ,\ \text{ovvero}\ \ \omega Q'(s)+\frac{\omega^2}{2}Q''(s)+\text{ecc.},$$

e dev' essere compresa fra le due

$$\omega\frac{u}{t}I,\ \ \omega\frac{u}{t}I+\omega^2\frac{u}{t}I'(s)+\text{ecc.};$$

adunque sarà

$$Q'(s)=\frac{u}{t}I(s), \quad \text{cioè} \quad I(s)=Q'(s),$$

sottintendendo le unità u, t.

Vale a dire, la intensità della variazione della quantità Q relativa ad un punto qualunque di una linea è la derivata della Q stessa, presa rispetto al-

l'arco o meglio alla porzione corrispondente della linea medesima: proprietà molto interessante.

Corollario I. I massimi e minimi valori della $I(s)$ corrisponderanno in generale a quelli della s, che renderanno

$$Q''(s)=0 \text{ e } Q'''(s)< \text{ ovvero } >0.$$

Corollario II. Per i punti, ove la Q sarà massima o minima, essendo $Q'(s)=0$, sarà pure $I=0$.

Corollario III. Se $Q'(s)>0$, la $I(s)$ sarà intensità di aumento della Q; e reciprocamente se $Q'(s)<0$, la $I(s)$ medesima sarà intensità di diminuzione della Q stessa.

Osservazione. La $P(s)$ sia una quantità omogenea alla $Q(s)$, e relativa allo stesso punto della linea suddetta, al quale si riferisce la Q stessa: le variazioni sofferte da queste due serie di quantità, col passare dal punto corrispondente alla s a quello che corrisponde alla $s+\omega$, sono

$$\omega P'(s)+\frac{\omega^2}{2}P''(s)+\frac{\omega^3}{2\cdot 3}P'''(s)+\text{ecc.},$$

$$\omega Q'(s)+\frac{\omega^2}{2}Q''(s)+\frac{\omega^3}{2\cdot 3}Q'''(s)+\text{ecc.};$$

e però se sarà $P'(s)>Q'(s)$;

ovvero $P'(s)=Q'(s)$, e $P''(s)>Q''(s)$;

oppure $P'(s)=Q'(s)$, $P''(s)=Q''(s)$, e $P'''(s)>Q'''(s)$;

- - -, le variazioni della $P(s)$, almeno le corrispondenti ai piccioli o nascenti valori della ω, saranno minori delle variazioni corrispondenti della $Q(s)$.

Le $P''(s)$, $Q''(s)$, dalle quali possono dipendere le grandezze rispettive ed anco assolute delle variazioni dei valori delle quantità P, Q, si chiameranno *intensità* di *secondo ordine* delle variazioni delle stesse quantità P, Q, per distinguerle dalle $P'(s)$, $Q'(s)$, che si chiameranno *intensità* di *primo ordine* delle medesime variazioni delle quantità P, Q.

Sia $f(x,y,z)=0$ la equazione fra le x, y, z coordinate rettangole di un punto qualunque di una superficie, e $Q(x,y,z)$ una quantità relativa a questo medesimo punto di essa.

Per questo punto e nella superficie si immagini una linea, e si denomini s quell'arco di essa, che ha i termini l'uno nel punto stesso corrispondente alle coordinate x,y,z e l'altro in quello pel quale le coordinate sono

$$x+\omega,\ y+\theta,\ z+\alpha.$$

Proposizione seconda.

Trovare la intensità, I, di primo ordine della variazione, che accade nella quantità Q col passare dal punto primo termine dell'arco s al punto prossimo seguente appartenente all'arco s medesimo?

Si considerino le ω, θ, α funzioni dell'arco s, e la quantità Q pel termine variabile dell'arco stesso sarà

$$Q\big(x+\omega(s),\ y+\theta(s),\ z+\alpha(s)\big),$$

purchè le $\omega(s)$, $\theta(s)$, $\alpha(s)$ abbiano la relazione

$$f\big(x+\omega(s),\ y+\theta(s),\ z+\alpha(s)\big)=0$$

ed anco la seguente $\omega'^2+\theta'^2+\alpha'^2=s'^2$.

Dalla proposizione antecedente risulta

$$Q'(\omega)\,\omega'(s)+Q'(\theta)\,\theta'(s)+Q'(\alpha)\,\alpha'(s)$$

per la intensità di primo ordine della variazione della Q corrispondente al termine variabile dell'arco s; purchè le derivate $\omega'(s)$, $\theta'(s)$, $\alpha'(s)$ abbiano le relazioni seguenti

$$f(\omega)\,\omega'(s)+f'(\theta)\,\theta'(s)+f'(\alpha)\,\alpha'(s)=0,$$

$$\omega'(s)^2+\theta'(s)^2+\alpha'(s)^2=1;$$

e però, siccome la I è quel valore della intensità qui esposta, che corrisponde ad $s=0$, e quelli delle $Q'(\omega)$, $Q'(\theta)$, $Q'(\alpha)$, $f'(\omega)$, $f'(\theta)$, $f'(\alpha)$ corrispondenti alla $s=0$ sono ordinatamente $Q'(x)$, $Q'(y)$, $Q'(z)$, $f'(x)$, $f'(y)$, $f'(z)$; così sarà

$$I=Q'(x)\,a+Q'(y)\,b+Q'(z)\,c,$$

$$0=f'(x)\,a+f'(y)\,b+f'(z)\,c,$$

$$1=a^2+b^2+c^2,$$

dove a, b, c esprimono i valori corrispondenti all'$s=0$ delle derivate $\omega'(s)$, $\theta'(s)$, $\alpha'(s)$, cioè i coseni degli angoli fatti cogli assi delle x, y, z positive dalla toccante l'arco s nel suo primo termine, che è lo stesso punto della superficie al quale corrispondono le coordinate x, y, z.

Dalle equazioni

$$f'(x)+f'(z)\left(\frac{dz}{dx}\right)=0,\quad f'(y)+f'(z)\left(\frac{dz}{dy}\right)=0,$$

derivate prime parziali esatte della $f(x, y, z)=0$, si hanno

$$f'(x)=-f'(z)\left(\frac{dz}{dx}\right),\quad f'(y)=-f'(z)\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

per cui la seconda delle equazioni esposte si riduce

$$o = a\left(\frac{dz}{dx}\right) + b\left(\frac{dz}{dy}\right) - c \quad \text{ossia} \quad c = a\left(\frac{dz}{dx}\right) + b\left(\frac{dz}{dy}\right);$$

e però sarà

$$I = \left(Q'(x) + Q'(z)\left(\frac{dz}{dx}\right)\right)a + \left(Q'(y) + Q'(z)\left(\frac{dz}{dy}\right)\right)b,$$

$$\text{ed } 1 = a^2 + b^2 + \left(a\left(\frac{dz}{dx}\right) + b\left(\frac{dz}{dy}\right)\right)^2; \text{ cioè}$$

$$I = a\,Q' + b\,Q_{,}, \quad \text{ed} \quad 1 = a^2 + b^2 + (a\,z' + b\,z_{,})^2,$$

ove le z', $z_{,}$ indicano le derivate parziali $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, e le Q', $Q_{,}$ i binomi $Q'(x) + Q'(z)z'$, $Q'(y) + Q'(z)z_{,}$, che sono le derivate parziali della $Q(x, y, z)$ prese, la prima rispetto alla x e la seconda rispetto alla y, avuto riguardo, che la componente z è funzione delle x, y.

Concludiamo per tanto, che la intensità di primo ordine della variazione della quantità Q, secondo la direzione che fa cogli assi delle x, y angoli aventi a, b per coseni, è

$$a\,Q' + b\,Q_{,},$$

purchè a, b, abbiano la relazione seguente

$$a^2 + b^2 + (a\,z' + b\,z_{,})^2 = 1.$$

Corollario I. Se in questa equazione o nella equivalente

$$(1 + z'^2)a^2 + (1 + z_{,}^2)b^2 + 2\,a\,b\,z'z_{,} - 1 = o$$

si pone per b il suo valore $(I - a\,Q') : Q_{,}$, cavato dalla eguaglianza

$$I = a\,Q' + b\,Q_{,},$$

si ottiene la seguente

$$(1 + z_{,}^2)I^2 - 2\,A\,a\,I + a^2B^2 - Q_{,}^2 = o,$$

dove $A = (1 + z_{,}^2)\,Q' - z'z_{,}Q_{,}$,

e $B^2 = Q'^2 + Q_{,}^2 + (Q'z_{,} - Q_{,}z')^2$,

colla quale si potranno avere i valori della I corrispondenti a valori dati dell'a, per ciascuno dei quali saranno due quelli della I; giacchè due sono appunto quelle direzioni della I, che fanno coll' asse delle x angoli aventi coseni fra loro eguali; eccettuato il caso di

$$a = (1 + z_{,}^2) : (1 + z'^2 + z_{,}^2),$$

cioè che l' angolo compreso dalla direzione della intensità e dall' asse delle x

sia il minimo, pel quale si ha solamente

$$I = A : (1 + z'^2 + z_i^2).$$

Corollario II. La variazione della quantità Q non avrà intensità di primo ordine, quando accada secondo la retta faccente cogli assi delle ordinate x, y angoli, i coseni dei quali soddisfacciano le due equazioni

$$0 = a Q' + b Q_i,$$

$$1 = a^2 + b^2 + (a z' + b z_i)^2,$$

le quali danno $a^2 = Q_i^2 : B^2, \quad b^2 = Q'^2 : B^2,$

e $c^2 = (z' Q_i + z_i Q')^2 : B^2.$

Fra le p, q, r coordinate rettangole di questa retta e parallele ordinatamente alle x, y, z si hanno le due equazioni

$$(q - y) Q_i = (p - x) Q',$$

$$(r - z) Q_i = (p - x)(z' Q_i + z_i Q').$$

Corollario III. Se nel valore della I cioè nel binomio $a Q' + b Q_i$ e nella equazione

$$1 = a^2 + b^2 + (a z' + b z_i)^2$$

si pongano $-a, -b$ in vece degli a, b, si hanno

$$I = -a Q' - b Q_i, \quad 1 = a^2 + b^2 + (a z' + b z_i)^2;$$

e però, se la I a seconda di una direzione individuata sarà intensità di aumento per la quantità Q, secondo la direzione opposta sarà intensità di diminuzione.

Proposizione terza.

Trovare la massima o minima delle intensità considerate nella proposizione antecedente?

Stante la medesima proposizione antecedente la presente si riduce a trovare quei valori degli a, b, che rendono massima o minima la quantità

$$I = a Q' + b Q_i$$

e che sono tra i soddisfacenti la equazione data

$$a^2 + b^2 + (a z' + b z_i)^2 - 1 = 0;$$

e però essi saranno fra quelli, che soddisfaranno anco la seguente

$$\big(b + (a z' + b z_i) z_i\big) Q' - \big(a + (a z' + b z_i) z'\big) Q_i = 0$$

cioè la $A b - C a = 0$, posto $(1 + z'^2) Q_i - z' z_i Q' = C.$

Quest' ultima equazione dà $b=\frac{C}{A}a$, per cui la data medesima si riduce alla

$$\left(A^2+C^2+(Az'+Cz_{,})^2\right)a^2=A^2.$$

Ma pei valori delle A, C il polinomio $A^2+C^2+(Az'+Cz_{,})^2$ equivale al prodotto

$$(1+z'^2+z_{,}^2)\left(Q'^2+Q_{,}^2+(Q'z_{,}-Q_{,}z')^2\right) \text{ cioè ad } \alpha^2B^2,$$

dove $\alpha^2=1+z'^2+z_{,}^2$; adunque sarà

$$a^2=\frac{A^2}{\alpha^2B^2} \text{ cioè } a=\pm\frac{A}{\alpha B} \text{ e } b=\pm\frac{C}{\alpha B}.$$

Sostituendo questi valori degli a, b nel binomio $aQ'+bQ_{,}$, si ha

$$\pm\frac{1}{\alpha B}(AQ'+CQ_{,}); \text{ e siccome } AQ'+CQ_{,}=B^2,$$

così il richiesto valore della I, che denomineremo I_m, sarà $\pm\frac{B}{\alpha}$.

I medesimi valori degli a, b dianzi trovati, e quello della $b'(a)$ desunto dalla equazione

$$I'(a)=Q'+b'(a)Q_{,}=0,$$

che è $-\frac{Q'}{Q_{,}}$, sostituiti nella

$$1+b'(a)^2+\left(z'+z_{,}b'(a)\right)^2+\left(az'z_{,}+(1+z_{,}^2)b'(a)\right)b''(a)=0,$$

la quale è la derivata seconda della data, la riducono alla

$$\frac{B^2}{Q_{,}^2}\pm\frac{\alpha}{B}Q_{,}b''(a)=0,$$

che somministra $Q_{,}b''(a)=\mp\frac{B}{\alpha}\left(\frac{B}{Q_{,}}\right)^2$.

Ma $Q_{,}b''(a)$ è evidentemente il valore della derivata seconda della I presa rispetto alla a; adunque sarà

$$I''(a)=\mp\frac{B}{\alpha}\left(\frac{B}{Q_{,}}\right)^2.$$

Concludiamo pertanto, che la I è suscettibile di un valore massimo ed anco di un minimo; e che si hanno pel primo

$$I=\frac{B}{\alpha},\ a=\frac{A}{B\alpha},\ b=\frac{C}{B\alpha},\ \text{e } c=\frac{1}{B\alpha}(z'Q'+z_{,}Q_{,}),$$

e per l'altro

$$I=-\frac{B}{\alpha},\ a=-\frac{A}{B\alpha},\ b=-\frac{C}{B\alpha},\ \text{e } c=-\frac{1}{B\alpha}(z'Q'+z_{,}Q_{,}).$$

Evidentemente, queste due intensità sono diametralmente opposte ed eguali

fra loro, come si doveva aspettare; giacchè la direzione, per la quale è massima la intensità per l'aumento della Q, è la stessa di quella, per la quale è massima la intensità della sua diminuzione.

Proposizione quarta.

Una qualunque intensità di primo ordine è eguale alla massima di esse *moltiplicata* pel coseno dell' angolo compreso dalle loro rispettive direzioni.

L'angolo compreso dalle direzioni delle due intensità si rappresenti con $\overline{II}_m$.

Essendo

$$a,\ \frac{A}{Ba};\ b,\ \frac{C}{Ba};\ c = az' + bz_{,},\ \frac{1}{Ba}(z'Q' + z_{,}Q_{,})$$

i coseni degli angoli fatti dalle direzioni delle I, I_m ordinatamente cogli assi delle x, y, z, sarà

$$\cos.\overline{II}_m = \left(aA + bC + c(z'Q' + z_{,}Q_{,})\right) : aB.$$

Ma il polinomio $aA + bC + c(z'Q' + z_{,}Q_{,})$,

$$\text{ossia}\quad a(A + z'^2Q' + z'z_{,}Q_{,}) + b(C + z'z_{,}Q' + z_{,}^2Q_{,})$$

è *eguale* ad $a^2(aQ' + bQ_{,})$ cioè ad a^2I; adunque sarà

$$\cos.\overline{II}_m = aI : B = I : \frac{B}{a} = I : I_m,\ \text{e però}$$

$$I = I_m \cos.\overline{II}_m,$$

come si è dichiarato.

Corollario I. Si chiamino I_1, I_2 due intensità qualsivogliono aventi le loro direzioni fra loro perpendicolari.

Essendo

$$I_1 = I_m \cos \overline{I_1 I}_m,\ \text{ed}\ I_2 = I_m \cos.\overline{I_2 I}_m\ \text{e però}\ I_2 = I_m \,\text{sen.}\, \overline{I_1 I}_m,\ \text{si ha}$$

$$I_1^2 + I_2^2 = I_m^2;$$

cioè la somma dei quadrati delle intensità fra loro perpendicolari *costante*, anzi eguale al quadrato della massima.

Corollario II. Per la $I = 0$ si ha cos. $\overline{II}_m$ ossia l'angolo $\overline{II}_m$ *retto*; e però la direzione della massima intensità di primo ordine è perpendicolare a quella di nessuna intensità.

Corollario III. Nel piano tangente la superficie nel punto di coordinate x, y, z si immaginino quelle due circonfereuze, le quali hanno per diametri le rette rappresentanti le direzioni e grandezze della $\pm I_m$. Quelle corde, di queste circonferenze, che hanno un termine nel punto anzidetto e la medesima direzione della $\pm I$, sono evidentemente eguali a $\pm I_m \cos.\overline{II}_m$; e però le intensità di primo ordine, sì degli aumenti che delle diminuzioni della Q, sono

rappresentabili con quelle porzioni delle rette direzioni di esse, che sono corde delle circonferenze dianzi immaginate.

Evidentemente queste due circonferenze sono tangenti la retta rappresentata colle due equazioni esposte alla fine del corollario secondo della proposizione antecedente.

Corollario IV. Per quel termine della retta rappresentante la I_m, che è fuori della superficie, si immagini condotta la perpendicolare alla medesima direzione della I_m e nel piano tangente la superficie; e chiamisi D la porzione della retta direzione della I intercetta fra questa perpendicolare ed il punto di coordinate x, y, z: sarà

$$\cos.\overline{II}_m = \frac{I_m}{D}, \text{ e però } I = \frac{I_m^2}{D}.$$

Così, si chiamino I_1, D_1 due altre quantità analoghe alle I, D; e si avrà $I_1 = \frac{I_m^2}{D_1}$; e conseguentemente sarà

$$I : I_1 = \frac{1}{D} : \frac{1}{D_1} \text{ ossia } I : I_1 = D_1 : D;$$

cioè le intensità di primo ordine degli aumenti della Q saranno reciprocamente proporzionali a quelle porzioni delle rette rispettive loro direzioni, che saranno intercette tra il punto in comune e la retta immaginata.

Proposizione quinta.

Trovare la linea a seconda della quale hanno luogo le più rapide variazioni della quantità Q?

La linea richiesta è nella superficie, per cui fra le sue coordinate x, y, z si ha la equazione $f(x, y, z) = 0$; e nel punto, ove corrisponde la quantità Q, ha la tangente, che fa cogli assi delle ordinate x, y angoli, i cui coseni sono $\frac{A}{Ba}$, $\frac{C}{Ba}$; e però per essa medesima la $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ sarà eguale a

$$\frac{C}{Ba} : \frac{A}{Ba} \text{ ossia a } \frac{C}{A}.$$

Quindi un' altra sua equazione sarà la seguente

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right) - C = 0, \text{ cioè}$$

$$\left((1 + z_i^2) Q' - z' z_i Q_i\right) \left(\frac{dy}{dx}\right) - (1 + z'^2) Q_i + z' z_i Q' = 0.$$

Dimodochè, sostituendo in questa equazione in vece delle Q', Q_i i loro valori

formati colle $x, y, z, z', z_{,}$, e nella risultante ponendo quelli delle $z, z', z_{,}$ tutti formati colle x, y e desunti dalla $f(x, y, z)=0$, avrassi una equazione fra le $x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)$, la cui primitiva completa combinata colla stessa $f(x, y, z)=0$, darà la linea o meglio la famiglia delle linee alla quale apparterrà la richiesta.

Volendo una particolare di queste linee, per esempio quella che passa per un punto dato, converrà determinare opportunamente la costante arbitraria contenuta nella primitiva completa.

Osservazione. Per una qualunque di quelle linee, per ciascuna delle quali la quantità Q è costante, si ha

$$aQ' + bQ_{,} = 0 ;$$

e però le equazioni della famiglia di queste linee saranno evidentemente

$$f(x, y, z)=0 , \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)Q_{,} + Q' = 0 .$$

Proposizione sesta.

Trovare la equazione del piano, che passa per la direzione della I_m e per la normale della superficie data nel punto, ove corrisponde la I_m stessa?

Fra le coordinate p, q, r rettangole della retta direzione della intensità I_m si hanno evidentemente le equazioni

$$(q-y)A=(p-x)C ,$$
$$(r-z)A=(p-x)(z'A+z_{,}C) ;$$

e fra le p, q, r coordinate analoghe della normale alla superficie hansi le

$$(q-y)z'-(p-x)z_{,}=0 , \quad (r-z)z'+p-x=0 ;$$

e però, fra le p, q, r coordinate rettangole del piano individuato da queste due rette, avrassi la equazione

$$(r-z)(z'Q_{,}-z_{,}Q')+(p-x)Q_{,}-(q-y)Q'=0 ,$$

siccome facilissimamente si può verificare.

Proposizione settima.

Date le grandezze e le direzioni di due intensità del primo ordine della variazione della Q, trovare la massima di tutte le possibili intensità di primo ordine della quantità Q stessa?

Siano I_1, I_2 le due intensità date, ed a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2 i coseni degli angoli da esse fatti cogli assi delle x, y, z.

Essendo

$$I_1 = a_1 Q' + b_1 Q_/ \,, \quad I_2 = a_2 Q' + b_2 Q_/ \,,$$

si hanno

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) Q' = b_2 I_1 - b_1 I_2 \,,$$

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) Q_/ = a_1 I_2 - a_2 I_1 \,,$$

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)(z_/ Q' - Q_/ z') = c_2 I_1 - c_1 I_2 \,;$$

e però, sommando i quadrati dei membri corrispondenti di queste tre equazioni, si avrà

$$(a_1 b_2 - b_1 a_2)^2 B^2 = I_1^2 + I_2^2 - 2(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) I_1 I_2 \,.$$

Ma $a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = \cos.\widehat{I_1 I_2}$, ed $(a_1 b_2 - b_1 a_2)^2 = \frac{1}{a^2} \operatorname{sen.}^2 \widehat{I_1 I_2}$;

adunque sarà

$$\frac{B^2}{a^2} \operatorname{sen.}^2 \widehat{I_1 I_2} = I_1^2 + I_2^2 - 2 I_1 I_2 \cos.\widehat{I_1 I_2} \,,$$

$$\text{cioè} \quad I_m^2 \operatorname{sen.}^2 \widehat{I_1 I_2} = I_1^2 + I_2^2 - 2 I_1 I_2 \cos.\widehat{I_1 I_2} \,,$$

equazione, che somministra immediatamente la I_m richiesta, la quale farà colla direzione della I_1 un angolo, che avrà per coseno $I_1 : I_m$.

Corollario. Se un' altra quantità P relativa al punto della superficie, al quale si riferisce la Q, avrà due intensità di primo ordine T_1, T_2 secondo le direzioni delle I_1, I_2 eguali rispettivamente a queste medesime, ogni altra intensità di primo ordine della P stessa sarà eguale a quella della Q avente la medesima direzione.

Di fatto, dalle due equazioni

$$I_m^2 \operatorname{sen.}^2 \widehat{I_1 I_2} = I_1^2 + I_2^2 - 2 I_1 I_2 \cos.\widehat{I_1 I_2} \,,$$

$$T_m^2 \operatorname{sen.}^2 \widehat{T_1 T_2} = T_1^2 + T_2^2 - 2 T_1 T_2 \cos.\widehat{T_1 T_2}$$

si ha I_m eguale a T_m massima intensità di primo ordine della quantità P, e dalle

$$\cos.\widehat{I_1 I_m} = \frac{I_1}{I_m} \,, \quad \cos.\widehat{T_1 T_m} = \frac{T_1}{T_m} \quad \text{si ha} \quad \widehat{I_1 I_m} = \widehat{T_1 T_m} \,;$$

cioè le massime intensità sono fra loro eguali e dirette secondo la medesima retta; e conseguentemente anco tutte le altre intensità aventi la stessa direzione saranno anch' esse fra loro eguali.

Se la proprietà qui sopra ammessa avrà luogo per un punto qualunque della superficie, evidentemente sarà P stessa eguale alla Q o differirà al più di una costante.

OSSERVAZIONE PRIMA

In questa osservazione espongo un esempio di alcune cose trattate, il quale racchiude proprietà, che occorrono molte volte sì nella teorica che nella pratica.

La superficie, alla quale si riferisce la quantità Q, sia la sferica rappresentata colla equazione $x^2+y^2+z^2-1=0$.

Essendo $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$, si hanno $z'=-\frac{x}{z}$, $z_{,}=-\frac{y}{z}$,

$$a=\frac{1}{z},\quad Q'(x)+z'Q'(z) \quad \text{cioè} \quad Q'=\frac{1}{z}\big(zQ'(x)-xQ'(z)\big),$$

$$Q_{,}=\frac{1}{z}\big(zQ'(y)-yQ'(z)\big),\quad Q'z_{,}-Q_{,}z'=\frac{1}{z}\big(xQ'(y)-yQ'(x)\big).$$

Questi valori sostituiti nella frazione $\frac{B}{a}$ danno

$$I_m=\sqrt{\left\{\big(zQ'(x)-xQ'(z)\big)^2+\big(zQ'(y)-yQ'(z)\big)^2+\big(xQ'(y)-yQ'(x)\big)^2\right\}},$$

ossia $I_m=\sqrt{\left\{Q'(x)^2+Q'(y)^2+Q'(z)^2-\big(xQ'(x)+yQ'(y)+zQ'(z)\big)^2\right\}}$.

Quando la $Q(x,y,z)$ sia funzione omogenea, si ha

$$I_m=\sqrt{\big(Q'(x)^2+Q'(y)^2+Q'(z)^2-n^2Q^2\big)},$$

ove l'n esprime la dimensione della Q stessa.

Per un caso di questo esempio, sia Q una funzione composta delle due componenti $t=\frac{y}{x}$, $u=\frac{z}{x}$; e si avranno

$$Q'(x)=-\frac{1}{x}\big(tQ'(t)+uQ'(u)\big),$$

$Q'(y)=\frac{1}{x}Q'(t)$, $Q'(z)=\frac{1}{x}Q'(u)$ ed $n=0$; e però sarà

$$I_m=\frac{1}{x}\sqrt{\Big(Q'(t)^2+Q'(u)^2+\big(tQ'(t)+uQ'(u)\big)^2\Big)},$$

cioè $I_m=\sqrt{(1+t^2+u^2)}\cdot\sqrt{\Big(Q'(t)^2+Q'(u)^2+\big(tQ'(t)+uQ'(u)\big)^2\Big)}$,

giacchè dalla equazione $x^2+x^2t^2+x^2u^2=1$ si ha $x=1:\sqrt{(1+t^2+u^2)}$.

Non espongo i risultamenti, che si ottengono col sostituire nelle altre formule generali relative alla intensità I_m, qui trovata, perchè non presentano nessuna difficoltà; ed in vece fo riflettere, che in questo esempio la quantità Q si può ritenere relativa ad una delle infinite rette passanti pel centro della sfera e funzione qualsivoglia delle x, y, z coseni degli angoli fatti dalla retta stessa con altre tre fra loro perpendicolari, ovvero funzione delle due tangenti

degli angoli fatti coll' asse delle x dalle projezioni ortogonali nei piani degli assi delle x, y; x, z della retta medesima alla quale si riferisce la quantità Q stessa.

OSSERVAZIONE SECONDA

Siccome la conoscenza delle variazioni della quantità Q pei punti, ove riescano *nulle* le Q', $Q_,$ separatamente, come accade in quelli per i quali la Q stessa è massima o minima, dipende dalle intensità di secondo ordine delle variazioni di essa; così espongo le due proposizioni seguenti.

Proposizione ottava.

Trovare la intensità di secondo ordine, S, della variazione della quantità Q contemplata nella proposizione seconda, ma corrispondente ai punti dove le Q', $Q_,$ sono *nulle*?

Ritengo le denominazioni già introdotte segnatamente per la proposizione seconda, e considero immediatamente la Q come funzione composta delle sole x, y; cioè intendo posto nella $Q(x, y, z)$ il valore della z cavato dalla equazione della superficie, e rappresento il risultamento colla Q stessa.

Dalle prime due proposizioni risulta, che S sarà il valore corrispondente alla $s = 0$ della derivata seconda, presa rispetto alla s, della quantità

$$Q\big(x + \varpi(s),\ y + \theta(s)\big),$$

il quale sarebbe

$$a^2 Q'' + 2abQ'_, + b^2 Q_{,,} + \varpi''_0 Q' + \theta''_0 Q_, ,$$

ma riducesi all'

$$a^2 Q'' + 2abQ'_, + b^2 Q_{,,}$$

per essere $Q' = 0$, $Q_, = 0$; vale a dire sarà

$$S = a^2 Q'' + 2abQ'_, + b^2 Q_{,,}$$

dove le a, b, coseni degli angoli fatti dalla direzione della S cogli assi delle x, y, abbiano la relazione seguente

$$a^2 + b^2 + (az' + bz_,)^2 - 1 = 0 .$$

Corollario. Scelto per piano degli assi delle coordinate x, y lo stesso piano tangente la superficie nel punto, ove corrisponde l'attuale quantità Q, essendo $z' = 0$, $z_, = 0$, sarà

$$S = Da^2 + 2abE + Fb^2;$$

dove le D, E, F significano i valori corrispondenti delle tre quantità Q'', $Q'_,$, $Q_{,,}$; e le a, b hanno la relazione $a^2 + b^2 = 1$.

Dimodochè, denominato μ l'angolo, che ha per coseno a e per seno b, sarà

$$S = D \cos.^2\mu + 2E \cos.\mu \,\mathrm{sen.}\mu + F\,\mathrm{sen.}^2\mu\,,$$

ovvero $$S = \frac{1}{2}(D - F)\cos.2\mu + E\,\mathrm{sen.}2\mu + \frac{1}{2}(D + F).$$

Se fosse $D = F$, ed $E = 0$, risulterebbe $S = D$, cioè S *costante* od indipendente dalla sua direzione.

Proposizione nona.

Trovare i valori massimi e minimi della intensità S contemplata nella proposizione antecedente?

Essendo $S = a^2 Q'' + 2ab Q'_{,} + b^2 Q_{,,}\,,$

ed $1 = a^2 + b^2 + (az' + bz_{,})^2$,

i valori dei coseni a, b corrispondenti al massimo o minimo della S soddisfaranno anco la equazione

$$(aQ'' + bQ'_{,})\big((1 + z_{,}^2)b + z'z_{,}a\big) - (bQ_{,,} + aQ'_{,})\big((1 + z'^2)a + z'z_{,}b\big) = 0\,,$$

ossia $$L\left(\frac{b}{a}\right)^2 - M\left(\frac{b}{a}\right) - N = 0\,,$$

posto $$(1 + z_{,}^2)Q'_{,} - z'z_{,}Q_{,,} = L,$$

$$(1 + z'^2)Q_{,,} - (1 + z_{,}^2)Q'' = M,$$

ed $$(1 + z'^2)Q'_{,} - z'z_{,}Q'' = N.$$

E sostituendo nella eguaglianza

$$S = a(aQ'' + bQ'_{,}) + b(aQ'_{,} + bQ_{,,})$$

in luogo dei binomi $aQ'' + bQ'_{,}$, $aQ'_{,} + bQ_{,,}$ separatamente i loro valori, desunti dalla prima equazione qui trovata, si hanno le due

$$\big((1 + z_{,}^2)b + z'z_{,}a\big)S = aQ'_{,} + bQ_{,,}\,,$$

$$\big((1 + z'^2)a + z'z_{,}b\big)S = aQ'' + bQ'_{,}\,,$$

dalle quali, eliminando il rapporto $\frac{b}{a}$, si ottiene la seguente

$$\alpha^2 S^2 - PS + R = 0\,,$$

dove $\alpha^2 = 1 + z'^2 + z_{,}^2$ come superiormente, e

$$P = (1 + z_{,}^2)Q'' + (1 + z'^2)Q_{,,} - 2z'z_{,}Q'_{,}\,,$$

ed $$R = Q''Q_{,,} - Q'^2_{,}.$$

Sciogliendo le due equazioni, qui trovate, la seconda rispetto alla S e la prima rispetto al rapporto $\left(\frac{b}{a}\right)$, si avranno le grandezze e direzioni della massima e minima intensità richieste.

Siccome queste medesime due equazioni trovate contengono visibilmente le quattro quantità Q'', $Q'_{\prime}$, $Q_{\prime\prime}$, $\frac{a}{S}$, come le due relative alle massime e minime curvature sferiche della superficie rappresentata colla equazione $f(x, y, z) = 0$ contengono le quantità z'', $z'_{\prime}$, $z_{\prime\prime}$, ed il *raggio* di queste curvature; così non mi trattengo in ulteriori considerazioni ad esse relative, giacchè riescirebbero ripetizioni di analoghe relative a queste curvature d'altronde notissime.

Osservazione. Dal punto, ove corrispondono le coordinate x, y, si immagini condotta la retta a seconda della direzione della intensità S qualsivoglia, ed eguale ad $\frac{1}{\sqrt{S}}$; e si chiamino p, q le coordinate rettangole dell'altro termine di essa, ammessa la origine loro nel punto dove corrisponde la quantità Q: sarà

$$a = p\sqrt{S}, \quad b = q\sqrt{S}, \quad \text{e però} \quad p^2 + q^2 = \frac{1}{S},$$

$$\text{ed} \quad S = Dp^2S + 2EpqS + Fq^2S, \quad \text{ossia} \quad Dp^2 + 2Epq + Fq^2 = 1.$$

Questa equazione insegna, che, le intensità di second' ordine delle variazioni delle quantità Q, sono reciprocamente proporzionali ai quadrati dei semidiametri della linea di second' ordine rappresentata colla equazione medesima, ed aventi le stesse direzioni di esse; e conseguentemente queste intensità avranno fra loro tutte quelle relazioni, che vi sono fra i quadrati reciproci dei semidiametri di una linea di second' ordine. Per esempio, denominate S_1, S_2 le intensità massima e minima di second' ordine, le quali avranno luogo secondo gli assi della linea anzidetta; sarà

$$S = S_1 \cos.^2 \widehat{SS_1} + S_2 \cos. \widehat{SS_2};$$

la somma di due intensità a direzioni fra loro perpendicolari sarà $S_1 + S_2$ e però *costante*.

E qui si rifletta, che, per avere la S, secondo qualsivoglia direzione, non è necessario conoscere propriamente quella funzione delle x, y, che rappresenta la quantità Q; giacchè basterà conoscere il massimo ed il minimo valore della S medesima, come risulta dall'ultima equazione esposta; ovvero conoscere i due valori della S secondo due diametri conjugati della linea di second' ordine anzidetta e l'angolo compreso dalle loro direzioni; ed anco basterà conoscere tre valori qualsivogliono della S medesima e gli angoli compresi dalle loro direzioni, essendo ciò sufficiente per determinare le grandezze e le posizioni dei massimi e minimi valori della S, e però ogni altro valore di essa medesima.

Proposizione decima.

Trovare la intensità di primo ordine di quella variazione, che è sofferta da una quantità col passare da un punto dello spazio ad un altro prossimo secondo una data direzione?

Si chiamino x, y, z le coordinate rettangole di un punto dello spazio, $Q(x, y, z)$ la quantità relativa ad esso, s una porzione indeterminata della retta avente un termine nel punto medesimo e condotta secondo la direzione data; a, b, c, al solito, i coseni degli angoli fatti dalla s cogli assi delle coordinate x, y, z; in ultimo chiamisi I la intensità richiesta.

Essendo $x+as$, $y+bs$, $z+cs$ le coordinate rettangole di un punto qualunque della retta direzione data, la quantità Q relativa a questo medesimo punto di essa sarà

$$Q(x+as,\ y+bs,\ z+cs);$$

e però la I intensità richiesta, sarà il valore corrispondente alla $s=0$ della derivata prima, presa rispetto alla s, di questa medesima quantità, il quale evidentemente risulta

$$aQ'(x)+bQ'(y)+cQ'(z);$$

e per tanto sarà

$$I=aQ'(x)+bQ'(y)+cQ'(z),$$

dove però gli a, b, c hanno la notissima relazione

$$1=a^2+b^2+c^2.$$

Corollario I. Per ogni direzione delle retta s, a seconda della quale la I riesca *nulla*, sarà

$$0=aQ'(x)+bQ'(y)+cQ'(z).$$

Si chiamino p, q, r le coordinate $x+as$, $y+bs$, $z+cs$, cioè siano

$$x+as=p,\ y+bs=q,\ z+cs=r \text{ e però}$$

$$a=\frac{1}{s}(p-x),\ b=\frac{1}{s}(q-y),\ c=\frac{1}{s}(r-z);$$

e la equazione dianzi trovata si ridurrà

$$0=(p-x)Q'(x)+(q-y)Q'(y)+(r-zQ'(z),$$

la quale insegna, che, le direzioni a seconda delle quali i valori della I sono *nulli*, esistono nel piano tangente la superficie rappresentata colla equazione

$$Q(x, y, z)=K \textit{ costante}.$$

Corollario II. Essendo $Q'(x)$, $Q'(y)$, $Q'(z)$ le intensità di primo ordine della variazione della quantità Q parallelamente agli assi delle x, y, z; e le

a, b, c i coseni degli angoli compresi dalla direzione della I e dagli assi medesimi, dalla equazione

$$I = aQ'(x) + bQ'(y) + cQ'(z)$$

risulta una regola facile per trovare qualunque intensità di primo ordine, quando se ne conoscano tre a direzioni fra loro perpendicolari.

Proposizione undecima.

Trovare la direzione e la grandezza della massima o minima intensità considerata nella proposizione antecedente?

Essendo $I = aQ'(x) + bQ'(y) + cQ'(z)$,

ed $1 = a^2 + b^2 + c^2$,

i valori dei coseni a, b, c o di queste quantità in generale, che rendono massima o minima la I, soddisfaranno anco le due equazioni

$$bQ'(x) - aQ'(y) = 0, \quad cQ'(x) - aQ'(z) = 0,$$

le quali combinate colla data $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ somministrano

$$a = \pm \frac{Q'(x)}{M}, \quad b = \pm \frac{Q'(y)}{M}, \quad c = \pm \frac{Q'(z)}{M},$$

dove M esprime il radicale positivo

$$\sqrt{\left(Q'(x)^2 + Q'(y)^2 + Q'(z)^2\right)};$$

e questi valori delle a, b, c, sostituiti nella espressione generale della I, danno per valore corrispondente della I, che denominerò

$$I_m = \pm \sqrt{\left(Q'(x)^2 + Q'(y)^2 + Q'(z)^2\right)}.$$

Dalla espressione generale della I e dalla relazione delle a, b, c si hanno

$$\left(\frac{d^2I}{da^2}\right) = Q'(z)\left(\frac{d^2c}{da^2}\right), \quad \left(\frac{d^2c}{da^2}\right) = -\frac{a^2 + c^2}{c^3},$$

$$\left(\frac{d^2I}{dadb}\right) = Q'(z)\left(\frac{d^2c}{dadb}\right), \quad \left(\frac{d^2c}{dadb}\right) = -\frac{ab}{c^3},$$

$$\left(\frac{d^2I}{db^2}\right) = Q'(z)\left(\frac{d^2c}{db^2}\right), \quad \left(\frac{d^2c}{db^2}\right) = -\frac{b^2 + c^2}{c^3};$$

e però sarà

$$\left(\frac{d^2I}{da^2}\right) = -(a^2 + c^2)\frac{Q'(z)}{c^3}, \quad \left(\frac{d^2I}{dadb}\right) = -ab\frac{Q'(z)}{c^3}, \quad \left(\frac{d^2I}{db^2}\right) = -(b^2 + c^2)\frac{Q'(z)}{c^3}.$$

Questi valori delle derivate seconde parziali della I danno

$$\left(\frac{d^2 I}{da^2}\right)\left(\frac{d^2 I}{db^2}\right)-\left(\frac{d^2 I}{da db}\right)^2=\frac{Q'(z)^2}{c^4}=\frac{M^4}{Q'(z)^2}$$

quantità *positiva*; e per tanto i valori trovati della I saranno i richiesti.

Si può avere questa espressione della I_m anco con quest'altro metodo.

Si divida ciascun membro della equazione

$$I=aQ'(x)+bQ'(y)+cQ'(z)$$

per M; e si avrà la

$$\frac{I}{M}=a\frac{Q'(x)}{M}+b\frac{Q'(y)}{M}+c\frac{Q'(z)}{M},$$

il cui secondo membro è visibilmente il coseno dell'angolo, μ, compreso dalle direzioni della I e della normale alla superficie rappresentata colla equazione

$$Q(x,y,z)=K;$$

e però sarà

$$I=M\cos.\mu\,.$$

Ma da questa equazione risulta, che il massimo ed il minimo dei valori della I corrispondono al massimo e minimo del $\cos.\mu$, i quali sono *più uno* e *meno uno*; adunque quelli della I saranno $+M$, $-M$, e le loro direzioni la medesima normale anzidetta.

Qui pure, come nella proposizione terza, la I è suscettibile di un massimo e di un minimo valore; ma siccome uno è diametralmente opposto all'altro, e le loro grandezze sono eguali, e si riferiscono l'uno ad aumento e l'altro a diminuzione della Q, dimodochè sono in sostanza due massimi l'uno relativo agli aumenti e l'altro alle diminuzioni della quantità Q; così limiterò le considerazioni seguenti al solo primo, pel quale si ha .

$$I_m=\sqrt{\left(Q'(x)^2+Q'(y)^2+Q'(z)^2\right)},$$

$$a=Q'(x):I_m,\ b=Q'(y):I_m,\ c=Q'(z):I_m.$$

Corollario I. La equazione trovata nella seconda soluzione della proposizione proposta cioè la

$$I=M\cos.\mu \text{ ossia } I=I_m\cos.\Pi_m$$

esprime, che, una intensità di primo ordine qualsivoglia eguaglia la massima di esse moltiplicata pel coseno di quell'angolo, che è compreso dalle direzioni di essa e della massima: che sono eguali fra loro tutte quelle, le cui direzioni fanno angoli eguali con quella della massima medesima; ed anco, che, le rette rappresentanti le direzioni e grandezze di tali intensità ed aventi un termine nel punto di coordinate x, y, z, sono altrettante corde di quella sfera un cui diametro rappresenta la I_m. Questa sfera è evidentemente tangente la superficie avente per equazione $Q(x,y,z)=K$.

Corollario II. La retta rappresentante la intensità I si supponga prolungata sino al piano tangente la sfera anzidetta nel punto opposto a quello al quale corrispondono le coordinate x, y, z; e riesca L la sua lunghezza.

Essendo $\cos.\widehat{I_m L}$ ossia $\cos.\widehat{I_m I} = \frac{I_m}{L}$ ed $I = I_m \cos.\widehat{I I_m}$, si ha

$$I = \frac{I_m^2}{L};$$

e però due intensità qualsivogliono saranno reciprocamente proporzionali alle rette analoghe alla L e relative ad esse medesime.

Corollario III. Se le direzioni delle massime intensità di primo ordine delle variazioni della quantità Q relative ai punti dello spazio fossero tutte fra loro parallele, si avrebbero le tre equazioni

$$Q'(x) = A,\ Q'(y) = B,\ Q'(z) = C$$

ove A, B, C esprimono tre costanti, le quali equazioni somministrano

$$Q = Ax + By + Cz + D,$$

D costante arbitraria; e però le superficie, in ciascuna delle quali vi sono i punti corrispondenti a quantità Q eguali, sarebbero piane e fra loro parallele.

Corollario IV. Così, se le direzioni delle massime intensità passassero tutte per un medesimo punto, scelto il medesimo per origine delle coordinate, si avrebbero le due equazioni

$$yQ'(x) - xQ'(y) = 0,\ zQ'(x) - xQ'(y) = 0,$$

le quali danno

$$Q = \phi(x^2 + y^2 + z^2),$$

ove $\phi(x^2 + y^2 + z^2)$ esprime una funzione qualunque di $x^2 + y^2 + z^2$; e conseguentemente le superficie, ai punti di ciascuna delle quali corrispondono valori della quantità Q fra loro eguali, sarebbero sferiche e concentriche.

Corollario V. Per i punti dello spazio, nei quali le massime intensità sono funzioni simili delle corrispondenti quantità, si ha la equazione

$$Q'(x)^2 + Q'(y)^2 + Q'(z)^2 - \phi(Q)^2 = 0,$$

ove $\phi(Q)$ indica quella funzione di ogni valore della quantità Q, che esprime la massima intensità corrispondente.

Questa equazione fra le quattro variabili x, y, z, Q e le derivate prime parziali della Q ha per primitiva generale la risultante della eliminazione delle quantità α, β dalle tre seguenti

$$z - \alpha x - \beta y - \psi(Q)\sqrt{(1 + \alpha^2 + \beta^2)} - F(\alpha, \beta) = 0,$$

$$x + \frac{\alpha}{\sqrt{(1 + \alpha^2 + \beta^2)}}\psi(Q) + F'(\alpha) = 0,$$

$$y + \frac{\beta}{\sqrt{(1 + \alpha^2 + \beta^2)}}\psi(Q) + F'(\beta) = 0,$$

dove $F(\alpha, \beta)$ esprime una funzione arbitraria delle quantità α, β; e la $\psi(Q)$ è posta in vece della $\int \frac{1}{\varphi(Q)} dQ$.

Si osservi, che la prima di queste tre equazioni è una primitiva completa della proposta, ove le costanti siano α, β, F; e che i primi membri della seconda e terza sono le derivate prese rispetto alle α, β del primo membro della prima di esse; ed anco che le medesime tre equazioni danno

$$x = -\frac{\alpha}{\sqrt{(1+\alpha^2+\beta^2)}}\psi(Q) - F'(\alpha),$$

$$y = -\frac{\beta}{\sqrt{(1+\alpha^2+\beta^2)}}\psi(Q) - F'(\beta),$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{(1+\alpha^2+\beta^2)}}\psi(Q) - \alpha F'(\alpha) - \beta F'(\beta) + F(\alpha, \beta)$$

cioè le coordinate di quei punti per i quali, la quantità essendo Q, la intensità di primo ordine della sua variazione è $\varphi(Q)$.

Individuata la funzione $F(\alpha, \beta)$, che entra in queste tre equazioni, e dato un valore particolare alla quantità Q, indi variate le α, β, nei risultanti e corrispondenti valori delle x, y, z, si avrebbero le coordinate di una superficie, la quale cambiarebbe, dando altri valori continui alla Q, e queste diverse superficie sarebbero tante, quanti sono i valori attribuibili alla Q stessa: tutte queste superficie sono tra loro parallele, giacchè le p, q, r coordinate di una retta normale di esse hanno evidentemente le relazioni seguenti

$$\alpha r + p + (1+\alpha^2)F'(\alpha) + \alpha\beta F'(\beta) - \alpha F(\alpha, \beta) = 0,$$

$$\beta r + q + \alpha\beta F'(\alpha) + (1+\beta^2)F'(\beta) - \beta F(\alpha, \beta) = 0,$$

le quali non contengono la Q.

Proposizione dodicesima.

Fra le infinite intensità di primo ordine delle variazioni della quantità Q relativa ad un punto qualunque dello spazio, essendo date le grandezze di tre e gli angoli compresi dalle loro direzioni, trovare la massima?

Si chiamino I_1, I_2, I_3 le intensità date, ed a, b, c, s, t, u ordinatamente i coseni degli angoli $\overline{I_1 I_2}$, $\overline{I_1 I_3}$, $\overline{I_2 I_3}$, $\overline{I_1 I_m}$, $\overline{I_2 I_m}$, $\overline{I_3 I_m}$, ed f, g, h i seni dei primi tre, e V^2 il quintinomio

$$1 - a^2 - b^2 - c^2 + 2abc.$$

Pel noto teorema di Carnot si ha la equazione

$$V^2 = f^2u^2 + g^2t^2 + h^2s^2 - 2ast - 2bsu - 2ctu + 2abtu + 2acsu + 2bcst;$$

e però, siccome dalla proposizione antecedente risultano

$$s=I_1:I_m\,,\quad t=I_2:I_m\,,\quad u=I_3:I_m\,,$$

così avrà luogo la equazione seguente

$$\Gamma^2 I_m^2=f^2I_1^2+g^2I_2^2+h^2I_3^2-2aI_1I_2-2bI_1I_3-2cI_2I_3$$
$$+2abI_2I_3+2acI_1I_3+2bcI_2I_3\,,$$

la quale somministra immediatamente il valore richiesto della I_m.

La direzione di questa medesima intensità avrassi mediante i valori degli s, t, u ora conosciuti.

Corollario I. Se gli angoli $\widehat{I_1I_2}$, $\widehat{I_1I_3}$, $\widehat{I_2I_3}$ fossero *retti*, sarebbero $a=b=c=0$, ed $f=g=h=1$, e però

$$I_m^2=I_1^2+I_2^2+I_3^2.$$

Corollario II. Se le quantità Q, P, relative al medesimo punto dello spazio, avranno, secondo le medesime tre direzioni, intensità di primo ordine rispettivamente eguali fra loro, le loro intensità di primo ordine a seconda di qualsivoglia altra direzione saranno anch' esse fra loro eguali; giacchè dall' ultima equazione, qui sopra esposta, risulta, che le grandezze e direzioni delle loro massime intensità sarebbero le stesse; e conseguentemente anco due altre qualsivogliono loro intensità, aventi la stessa direzione, saranno fra loro eguali. Anzi, se la proprietà enunciata fra tre intensità avesse luogo, qualunque fosse il punto, al quale si riferiscono, si avrebbero le tre equazioni

$$P'(x)=Q'(x),\ P'(y)=Q'(y),\ P'(z)=Q'(z),$$

ove le x, y, z sono variabili; e per tanto la $P(x, y, z)$ o sarebbe eguale alla $Q(x, y, z)$ o ne differirebbe di una semplice costante.

Osservazione I. Quando si conoscano gli angoli compresi da quattro rette e le intensità di primo ordine secondo tre di esse, si può determinare la intensità secondo la quarta, determinando la massima, come si è fatto qui sopra, indi l' angolo fatto dalla direzione della richiesta colla direzione della massima e la richiesta colla proposizione penultima; ed anco, si può desumere la quarta immediatamente dalle tre date e gli angoli compresi dalle quattro direzioni; ma non credo di esporre quest' ultima soluzione, perchè sarebbe una replica di una analoga esposta in altra occasione rispetto alle forze ed ai momenti nella memoria, che verte sui momenti ordinari, dirò solo, che le quattro intensità riescono proporzionali alle aree delle facce di una piramide triangolare, che abbia i piani delle facce stesse perpendicolari rispettivamente alle direzioni delle medesime intensità.

Osservazione II. Se si conoscessero solamente due intensità I_1, I_2 e l' angolo $\widehat{I_1I_2}$ compreso dalle loro direzioni, non si potrebbe determinarne una qualunque, ma si potrebbe trovare la massima di quelle aventi le direzioni nel

piano individuato dalle direzioni delle due date ed anco una qualsivoglia di esse; giacchè sarebbero queste altrettante corde della circonferenza circoscritta al triangolo, di cui due lati sarebbero le rette rappresentanti le stesse due I_1, I_2.

OSSERVAZIONE TERZA

Sebbene i valori della quantità Q relativi ai punti della superficie rappresentata colla equazione

$$Q(x, y, z) = K$$

siano fra loro eguali, non ostante, la massima intensità di primo ordine cioè la

$$I_m \text{ ossia } \sqrt{(Q'(x)^2 + Q'(y)^2 + Q'(z)^2)}$$

relativa ai punti stessi, cambia dall'uno all'altro; e talvolta interessa la massima intensità di primo ordine della sua variazione, cioè la sua grandezza e direzione: ciò si avrà mediante le proposizioni seconda e terza, surrogando alla equazione

$$f(x, y, z) = 0 \text{ la } Q(x, y, z) - K = 0,$$

ed alla quantità $Q(x, y, z)$ la seguente

$$\sqrt{(Q'(x)^2 + Q'(y)^2 + Q'(z)^2)} \text{ ossia } Q'(z)\sqrt{(1 + z'^2 + z_1^2)},$$

ove le z', z_1 siano desunte dalla medesima equazione della attuale superficie.

Per esempio, ammesso il piano degli assi delle x, y lo stesso tangente la superficie avente per equazione $Q - K = 0$, nel punto di coordinate x, y, z, le A, B^2, C usate nelle proposizioni citate, risultano eguali ordinatamente alle

$$\left(\frac{d^2Q}{dx\,dz}\right), \left(\frac{d^2Q}{dx\,dz}\right)^2 + \left(\frac{d^2Q}{dy\,dz}\right)^2, \left(\frac{d^2Q}{dy\,dz}\right);$$

e però la grandezza della massima intensità richiesta sarà

$$\sqrt{\left(\left(\frac{d^2Q}{dy\,dz}\right)^2 + \left(\frac{d^2Q}{dx\,dz}\right)^2\right)},$$

e la direzione farà coll'asse delle attuali ordinate x l'angolo avente per tangente

$$\left(\frac{d^2Q}{dy\,dz}\right) : \left(\frac{d^2Q}{dx\,dz}\right).$$

In questo esempio delle proposizioni seconda e terza, la quantità, I_m, alla quale si riferisce la intensità contemplata, contiene le derivate di un'altra, che è la Q: ciò che si è detto per esso, si potrà estendere a tutti i casi analoghi, cioè a quei casi, nei quali fra le componenti delle quantità a contemplarsi vi saranno delle derivate solamente indicate.

OSSERVAZIONE QUARTA

Quando la intensità di primo ordine delle variazioni della quantità Q siano *nulle* ovvero *eguali* fra loro solamente, la conoscenza delle variazioni della Q stessa dipende dalle sue intensità di second' ordine; e però occorrerà la

Proposizione tredicesima.

Trovare la intensità di second' ordine, S, corrispondente a quella di primo ordine, considerata nella proposizione undecima?

Siccome la S dev' essere il valore corrispondente alla $s=0$ della derivata seconda, presa rispetto alla s, della quantità $Q(x+as, y+bs, z+cs)$; così sarà

$$S=Aa^2+Bb^2+Cc^2+2Dab+2Eac+2Fbc,$$

dove A, B, C, D, E, F esprimono ordinatamente le derivate

$$Q''(x),\ Q''(y),\ Q''(z),\ \left(\frac{d^2Q}{dx\,dy}\right),\ \left(\frac{d^2Q}{dx\,dz}\right),\ \left(\frac{d^2Q}{dy\,dz}\right),$$

e le a, b, c hanno la solita relazione

$$a^2+b^2+c^2=1.$$

Scelgasi la parte delle retta s *eguale* ad $\frac{1}{\sqrt{S}}$, e denomininsi p, q, r le coordinate rettangole as, bs, cs, la cui origine sarà nel punto ove corrisponde la quantità Q.

Essendo $as=p$, $bs=q$, $cs=r$ hansi $a=p\sqrt{S}$, $b=q\sqrt{S}$, $c=r\sqrt{S}$; e però le due relazioni od equazioni, dianzi esposte, si ridurranno alle seguenti

$$\pm 1=Ap^2+Bq^2+Cr^2+2Dpq+2Epr+2Fqr,$$
$$S^{-1}=p^2+q^2+r^2,$$

le quali manifestano, che le intensità S di second' ordine, sono reciprocamente proporzionali ai quadrati dei semidiametri della superficie di secondo ordine rappresentata dalla prima e diretti secondo le S; e per tanto avranno luogo, per le attuali intensità, proprietà analoghe a quelle, che hanno i quadrati reciproci dei semidiametri di una superficie di second'ordine. Per esempio, la somma di tre qualsivogliono di esse, che abbiano direzioni fra loro perpendicolari, sarà *costante*; la massima cadrà secondo il minimo e la minima secondo il massimo asse della superficie rappresentata colla equazione

$$\pm 1=Ap^2+Bq^2+Cr^2+2Dpq+2Epr+2Fqr:$$

se le D, E, F saranno *nulle* e le A, B, C fra loro *eguali*, le intensità S corrispondenti saranno tutte fra loro eguali; e chiamate S_1, S_2, S_3 le tre dirette secondo gli assi, una delle quali sarà la massima ed un' altra la minima, si avrà

$$S=S_1\cos.^2\widehat{SS_1}+S_2\cos.^2\widehat{SS_2}+S_3\cos.^2\widehat{SS_3}.$$

Proposizione quattordicesima.

Trovare la massima e la minima intensità di secondo ordine fra quelle, che hanno le direzioni nel piano tangente la superficie rappresentata colla equazione $Q(x, y, z) - K = 0$?

Per la speciale direzione ammessa, le a, b, c hanno anco la relazione

$$aQ'(x) + bQ'(y) + cQ'(z) = 0;$$

e però si dovranno trovare i valori delle stesse quantità a, b, c, che rendano massima

$$S = Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + 2Dab + 2Eac + 2Fbc,$$

e che sono tra quelli soddisfacenti le due equazioni

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

$$aQ'(x) + bQ'(y) + cQ'(z) = 0.$$

Dalla equazione $Q(x, y, z) - K = 0$ si hanno

$$Q'(x) = -Q'(z)z', \quad Q'(y) = -Q'(z)z_{,},$$

per cui l'ultima equazione equivale alla $az' + bz_{,} = c$, la quale riduce la penultima alla

$$a^2 + b^2 + (az' + bz_{,})^2 = 1,$$

e la espressione della S alla seguente

$$(A + Cz'^2 + 2Ez')a^2 + (B + Cz_{,}^2 + 2Fz_{,})b^2$$
$$+ 2(D + Cz'z_{,} + Ez_{,} + Fz')ab.$$

Ma dalle equazioni derivate seconde parziali esatte della stessa $Q - K = 0$ si hanno le tre

$$A + Cz'^2 + 2Ez' = -Q'(z)z'',$$
$$D + Cz'z_{,} + Ez_{,} + Fz' = -Q'(z)z'_{,},$$
$$B + Cz_{,}^2 + 2Fz_{,} = -Q'(z)z_{,,};$$

per cui risulta

$$S = -(a^2z'' + 2abz'_{,} + b^2z_{,,})Q'(z);$$

adunque, si dovranno trovare i valori delle a, b, che rendono massimo o minimo il trinomio

$$T = a^2z'' + 2abz'_{,} + b^2z_{,,},$$

e che sono tra i soddisfacenti la equazione

$$a^2 + b^2 + (az' + bz_{,})^2 - 1 = 0:$$

ricerca, che è un caso della stessa proposizione nona, dalla quale emerge, che per le grandezze e direzioni dei valori richiesti della S hanno luogo le due equazioni seguenti

$$L\left(\frac{b}{a}\right)^2 - M\left(\frac{b}{a}\right)^2 - N = 0,$$

$$a^2T^2 - PT + R = 0,$$

dove $L = (1 + z_i^2) z_i' - z' z_i z_{ii}$,

$M = (1 + z'^2) z_{ii} - (1 + z_i^2) z''$,

$N = (1 + z'^2) z_i' - z' z_i z''$,

$P = (1 + z_i^2) z'' + (1 + z'^2) z_{ii} - 2 z' z_i z_i'$,

ed $R = z'' z_{ii} - z_i'^2$, e $TQ'(z)$ *eguale a meno* i valori della S.

La prima delle due equazioni qui trovate insegna, che le direzioni del massimo e minimo valore della S sono le tangenti delle linee delle curvature sferiche minima e massima della superficie rappresentata colla equazione $Q - K = 0$; e la seconda, che le grandezze dei medesimi massimi e minimi valori sono eguali ad $\frac{a^2}{d_1} Q'(z)$, $\frac{a}{d_2} Q'(z)$, dove i d_1, d_2 esprimono i raggi delle stesse due curvature sferiche.

Osservazione I. Essendo $a^2 z'' + 2 a b z_i' + b^2 z_{ii}$ *eguale* all'a *divisa* per d, raggio della sfera avente un contatto di primo ordine colla superficie della equazione $Q - K = 0$ e di second'ordine colla linea esistente in questa superficie, e che ha per tangente la direzione della S, qualunque, sarà

$$S = - Q'(z) \frac{a}{d};$$

risultamento assai utile.

Siano S_1, d_1 due altre quantità analoghe a queste ultime S, d; e si avrà $S_1 = - Q'(z) \frac{a}{d_1}$; e però sarà

$$S : S_1 = d_1 : d,$$

cioè le intensità S reciprocamente proporzionali ai corrispondenti raggi d delle curvature sferiche anzidette.

Osservazione II. Non voglio ommettere di far riflettere, che le due equazioni

$$S = - (a^2 z'' + 2 a b z_i' + b^2 z_{ii}) Q'(z),$$

$$1 = a^2 + b^2 + (a z' + b z_i)^2$$

insegnano, che le S sono anco reciprocamente proporzionali ai quadrati dei semidiametri di una linea di second'ordine, e che da questa loro proprietà si possono desumere facilmente molte delle qui sopra esposte.

OSSERVAZIONE QUINTA

Siccome quelle intensità di primo ordine, le cui direzioni fanno angoli eguali colla direzione della massima di esse, *sono tra loro eguali*; così l'esame delle variazioni delle corrispondenti quantità Q bisognerà appoggiarlo alle intensità di secondo ordine di esse; e però interesserà la

Proposizione quindicesima.

Trovare la massima e minima intensità di second'ordine, fra le corrispondenti ad intensità di primo ordine eguali fra loro?

La grandezza di ogni intensita di primo ordine si chiami k: sarà

$$S = Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + 2Dab + 2Eac + 2Fbc,$$

$$1 = a^2 + b^2 + c^2,$$

$$\text{e } k = aL + bM + cN,$$

ove le L, M, N sono qui esposte in vece dei valori delle $Q'(x)$, $Q'(y)$, $Q'(z)$.

Si considerino le b, c funzioni della a e date dalle ultime due equazioni, e pei valori richiesti della S avranno luogo le tre equazioni seguenti

$$0 = Aa + Db + Ec + (Bb + Da + Fc)\,b'(a) + (Cc + Ea + Fb)\,c'(a),$$

$$0 = a + b\,b'(a) + c\,c'(a),$$

$$0 = L + Mb'(a) + Nc'(a),$$

le quali colla eliminazione delle derivate $b'(a)$, $c'(a)$ danno la

$$\begin{aligned}&(Aa + Db + Ec)(cM - Nb)\\ &+ (Bb + Da + Fc)(aN - Lc)\\ &+ (cC + Ea + Fb)(bL - Ma) = 0.\end{aligned}$$

Col mezzo di questa equazione e delle due date si avranno i valori delle a, b, c, cioè le direzioni delle S richieste; e però questi valori medesimi, i quali si otterranno col porre quelli delle a, b, c nel sestinomio

$$Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + 2Dab + 2Eac + 2Fbc.$$

Osservazione. L'ultima equazione trovata esprime evidentemente, che tutte le direzioni dei valori della S, analoghi a quelli considerati qui sopra, cioè qualunque sia k, saranno in una superficie conica di second'ordine; dimodochè, le stesse direzioni della S contemplate saranno le rette comuni a questa superficie conica ed a quella pure conica, per la quale si ha

$$aL + bM + cN = k.$$

OSSERVAZIONE SESTA

Se nella espressione $aQ'(x)+bQ'(y)+cQ'(z)$ valore della I intensità di primo ordine della Q si variano le a, b, c, varia la I stessa, ed interessa talvolta la massima o minima intensità, almeno di primo ordine di una tale variazione.

Proposizione sedicesima.

Trovare la massima e minima intensità di primo ordine della quantità I già intensità di primo ordine della Q?

La quantità, I, è qui una funzione delle a, b, c, le quali hanno la relazione rappresentata colla equazione

$$a^2+b^2+c^2-1=0;$$

e però la presente ricerca è un caso particolare della proposizione terza, e propriamente del primo passo della osservazione posta appena dopo la proposizione settima.

La intensità richiesta chiamisi R: dalla osservazione citata risulta

$$R^2=I'(a)^2+I'(b)^2+I'(c)^2-\left(aI'(a)+bI'(b)+cI'(c)\right)^2.$$

Ma per essere $I=aQ'(x)+bQ'(y)+cQ'(z)$ si hanno

$$I'(a)=Q'(x),\ I'(b)=Q'(y),\ I'(c)=Q'(z)$$

ed $aI'(a)+bI'(b)+cI'(c)=I$; adunque sarà

$$R^2=Q'(x)^2+Q'(y)^2+Q'(z)^2-I^2$$

ossia $R^2=I_m^2-I^2$ ed anco $I^2+R^2=I_m^2$.

Vale a dire, il quadrato di qualunque intensità di primo ordine della quantità Q, *più* quello della intensità pure di primo ordine di questa medesima intensità della Q, è *eguale* al quadrato della massima intensità di primo ordine della stessa quantità Q: proprietà rimarcabile.

Similmente dalla proposizione sesta risulta, che la equazione del piano, che passa per la direzione della I e per quella della sua massima intensità di primo ordine, R, è la seguente

$$(c'I_{,}-I'c_{,})r+pI_{,}-qI'=0,$$

ove le I', c' significano le derivate rispetto alla a e le $I_{,}$, $c_{,}$ quelle rispetto alla b; ma pel caso presente si hanno

$$c'=-\frac{a}{c},\ c_{,}=-\frac{b}{c},\ I'=\frac{1}{c}\left(cQ'(x)-aQ'(z)\right),$$

$$I_{,}=\frac{1}{c}\left(cQ'(y)-bQ'(z)\right);$$

perciò la equazione medesima si riduce

$$\big(b\,Q'(x)-a\,Q'(y)\big)\,r+\big(c\,Q'(y)-b\,Q'(z)\big)\,p+\big(a\,Q'(z)-c\,Q'(x)\big)\,q=0,$$

la quale è soddisfatta tanto da

$$q=\frac{b}{a}p \text{ ed } r=\frac{c}{a}p, \text{ quanto da } q=pQ'(y):Q'(x), \text{ ed } r=pQ'(z):Q'(x);$$

adunque il piano medesimo passa per la direzione della I ed anco per quella della I_m; come era facile a prevedersi.

Corollario I. Siano I_1, I_2 due intensità di primo ordine della quantità Q a direzioni faccenti con quella della I_m angoli complemento l'un dell'altro, e sarà

$$I_m^2=I_1^2+I_2^2;$$

e però R intensità di primo ordine della I_1 eguaglierà la I_2.

Corollario II. Essendo $R^2=I^2-I^2$ ed $I=I_m\cos.\Pi_m$, sarà

$$R^2=I_m^2-I_m^2\cos.^2\Pi_m \text{ cioè } R=I_m\text{sen.}\,\Pi_m.$$

Vale a dire le R hanno fra loro proprietà affatto analoghe a quelle delle I.

Osservazione. Non parlo di qualunque intensità di primo ordine della I pure qualsivoglia, perchè non presenta nè difficoltà nè singolarità, ed è un caso particolarissimo della contemplata nella proposizione seconda.

Proposizione diciassettesima.

Trovare la massima intensità di primo ordine di una qualunque intensità di second' ordine della quantità Q?

Scelgansi per assi delle coordinate gli assi della superficie di second' ordine considerata nella proposizione tredicesima; e chiamisi, R la intensità richiesta, P la perpendicolare tirata dalla origine al piano tangente la superficie di second'ordine, ove è incontrata dalla direzione della S, e D la distanza del punto di contatto di questo piano da quello del piano stesso, che è piede della retta P.

Per la scelta delle coordinate si ha

$$S=A\,a^2+B\,b^2+C\,c^2;$$

e però R sarà la massima intensità di primo ordine della variazione del trinomio

$$A\,a^2+B\,b^2+C\,c^2,$$

dove le a, b, c, che sono le variabili, hanno però la relazione

$$a^2+b^2+c^2-1=0:$$

l'attuale proposizione è per conseguenza anch'essa un caso della proposizione terza.

Essendo $S'(a)=2Aa$, $S'(b)=2Bb$, $S'(c)=2Cc$, risulta

$$R^2=4(A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2)-4S^2.$$

Ma $A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2$ *eguaglia* la *unità* astratta *divisa* per quadrato del prodotto della P pel semidiametro della superficie di second' ordine diretto al punto di contatto del piano tangente anzidetto, cioè

$$A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2=\frac{S}{P^2};$$

adunque sarà

$$R^2=4\frac{S}{P^2}-4S^2 \text{ ossia } P^2R^2=4S^2\left(\frac{1}{S}-P^2\right),$$

ed anco' $P^2R^2=4S^2D^2$; e conseguentemente avrassi

$$R=2S\frac{D}{P} \text{ ossia } R=2S\,\text{tang.}\widehat{SP},$$

dove $\widehat{SP}$ esprime l' angolo compreso dalle direzioni delle S, P.

Non mi occupo della direzione della attuale R, perchè non presenta nessuna difficoltà, eccettuata la lunghezza del calcolo.

Proposizione diciottesima.

Trovare la condizione, perchè la direzione della massima intensità di primo ordine della variazione di una quantità relativa ai punti di un piano sia la stessa di quella della massima intensità di second'ordine della medesima quantità?

La quantità relativa al punto corrispondente alle coordinate rettangole x, y si denomini $z(x, y)$ o semplicemente z; e l'angolo fatto dalle direzioni delle due intensità coll'asse delle ordinate x, denominisi μ.

Per la intensità di primo ordine si ha la equazione

$$z'\,\text{tang.}\mu-z_{\prime}=0,$$

e per quella del secondo ordine la

$$z'_{\prime}\,\text{tang.}^2\mu+(z''-z_{\prime\prime})\,\text{tang.}\mu-z'_{\prime}=0,$$

dalle quali, colla eliminazione della tang.μ, si ottiene la richiesta

$$\frac{z_{\prime}^2}{z'^2}z'_{\prime}+(z''-z_{\prime\prime})\frac{z_{\prime}}{z'}-z'_{\prime}=0, \text{ ossia}$$

$$z''+\left(\frac{z_{\prime}}{z'}-\frac{z'}{z_{\prime}}\right)z'_{\prime}-z_{\prime\prime}=0,$$

la quale però è alle derivate parziali rispetto alla quantità z.

Questa equazione alle derivate parziali del second'ordine ha per primitiva di primo ordine la

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)-t\left(\frac{dz}{dy}\right)=0,$$

dove la t esprime quella funzione delle x, y, che entra nella

$$x - yt + \phi(t) = 0,$$

e la $\phi(t)$ significa una funzione qualsivoglia della t stessa; e però z sarà una funzione *arbitraria* del valore della costante arbitraria contenuta nella primitiva completa della equazione alle derivate ordinarie

$$y' + tx' = 0.$$

Da questa equazione, scelta la t per variabile principale, ed eliminata x mediante l'antecedente, si ha la seguente

$$(1 + t^2)\left(\frac{dy}{dt}\right) + ty - t\phi'(t) = 0,$$

la cui primitiva completa dà

$$D = y\sqrt{(1 + t^2)} - \int \frac{t\phi'(t)}{\sqrt{(1 + t^2)}},$$

D esprime la costante arbitraria; adunque sarà

$$z = \psi\left(y\sqrt{(1 + t^2)} - \int \frac{t\phi'(t)}{\sqrt{(1 + t^2)}}\,dt\right),$$

ove la t esprima la suddetta funzione delle coordinate x, y, somministrata dalla equazione

$$x - yt + \phi(t) = 0,$$

e la ψ significhi una funzione qualsivoglia od arbitraria della quantità racchiusa fra le due parentesi grandi.

Per dare un esempio: sia $\phi(t) = t$, e si avrà $t = \dfrac{x}{y - 1}$, e

$$\int \frac{t\phi'(t)}{\sqrt{(1 + t^2)}}\,dt = \sqrt{(1 + t^2)}, \text{ e però } z = \psi\left(\sqrt{x^2 + (y - 1)^2}\right),$$

cioè la quantità z eguale ad una funzione anco arbitraria del binomio $x^2 + (y - 1)^2$.

OSSERVAZIONE SETTIMA

Se la intensità di primo ordine contemplata nella proposizione decima si fosse desunta dalla quantità

$$Q\big(x + \omega(s), y + \theta(s), z + \alpha(s)\big),$$

ove le $x + \omega(s)$, $y + \theta(s)$, $z + \alpha(s)$ esprimono le coordinate di una linea qualsivoglia, fra quelle aventi un termine nel punto di coordinate x, y, z, essa sarebbe risultata

$$\omega'(s)_0^2 Q''(x) + \theta'(s)_0^2 Q''(y) + \alpha'(s)_0^2 Q''(z) + 2\omega'(s)_0 \theta'(s)_0 \left(\frac{d^2 Q}{dxdy}\right)$$

$$+ 2\omega'(s)_0 \alpha'(s)_0 \left(\frac{d^2 Q}{dxdz}\right) + 2\theta'(s)_0 \alpha'(s)_0 \left(\frac{d^2 Q}{dydz}\right) + \omega''(s)_0 Q'(x)$$

$$+ \theta''(s)_0 Q'(y) + \alpha''(s)_0 Q'(z),$$

e si sarebbero avute le due equazioni seguenti

$$1 = \omega'(s)_0^2 + \theta'(s)_0^2 + \alpha'(s)_0^2,$$

$$0 = \omega'(s)_0 \omega''(s)_0 + \theta'(s)_0 \theta''(s)_0 + \alpha'(s)_0 \alpha''(s)_0;$$

cioè si sarebbe avuto

$$S = Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + 2Dab + 2Eac + 2Fbc$$

$$+ Q'(x)\omega''(s)_0 + Q'(y)\theta''(s)_0 + Q'(z)\alpha''(s)_0$$

e le due equazioni

$$a^2 + b^2 + c^2 - 1 = 0, \quad a\omega''_0 + b\theta''_0 + c\alpha''_0 = 0.$$

Non contemplo questo caso, perchè riesce facile dopo quello esposto, ed anco perchè nella contemplazione della natura occorre poche volte.

Continuazione delle *RIFLESSIONI SULLA LEGGE DELL'ATTRAZIONE MOLECOLARE* di GIUSEPPE BELLI (V. Fascicolo I, pag. 25).

ARTICOLO TERZO

Di alcune ipotesi le quali considerate dal lato della Meccanica potrebbero essere atte a conciliare le due attrazioni.

XII.

Abbiamo veduto nei due precedenti articoli che adottando sulla costituzione dei corpi le ipotesi più ricevute fra i Fisici, non si può assolutamente colla sola attrazione universale dar ragione della coesione de' corpi, essendo ella una causa troppo minore di quello che all' uopo bisognerebbe. Rimangono adunque per la spiegazione del fenomeno queste due sole vie, cioè o che si abbandonino le ipotesi già ricevute, ed altre se ne ammettano più felici per conciliare quella causa con quest' effetto; ovvero, se vogliansi ritenere le ipotesi già stabilite, che si ricorra ad una qualche altra più rapida legge di attrazione. Noi considereremo l' una strada e l' altra, ed esamineremo quale di esse sia meglio seguire.

Incominciando dal primo modo di spiegare la coesione, noi confesseremo esservi veramente alcune ipotesi, le quali considerate semplicemente dal lato della Meccanica sono capaci di dar ragione del fenomeno senza che sia d'uopo ricorrere ad una nuova attrazione oltre alla universale. Ma guardandole da tutti gli aspetti, sorgono delle sì forti difficoltà contro di esse, che sembra assurda cosa il volerle ammettere.

Una di queste ipotesi potrebbe esser quella di concepire i corpi siccome formati di molecole separate le une dalle altre, ma però in tal modo foggiate e in tal maniera commesse insieme, che senza un notabile sforzo non si potessero svincolare le une dalle altre. Vale a dire, si potrebbero esse supporre in tal condizione che immaginando un corpo distinto in due pezzi A e B, le molecole di A adjacenti alla superficie di separazione fossero impegnate frammezzo a quelle di B, nè avessero libertà d'uscirne e liberarsene, senza svellere o almeno smuovere queste ultime; queste poi fossero impegnate colle altre più interne del medesimo pezzo B che stanno ivi immediatamente sotto, e queste con le seguenti, e così via via, quasi nella guisa di un mucchio di pezzi di ferro tortuosi od uncinati che fossero intralciati ed aggrappati gli uni cogli altri.

Con questa ipotesi si darebbe ragione della coesion dei corpi non solo senza veruna nuova attrazione, ma anche senza la stessa gravitazione, servendo a ciò la sola consistenza o tenacità delle molecole; solamente la gravitazione

gioverebbe alcun poco a tenere raccolto e legato insieme il tutto onde meno facilmente si sfasciasse. Però non sarebbe del tutto spiegato il fenomeno, giacchè rimarrebbe ancora a sapersi donde nasca questa tenacità delle molecole. E che tale tenacità sia necessaria in cotesta ipotesi, è facile il convincersi. Immaginando in fatti un corpo distinto in due parti da un piano che passi attraverso ad un gran numero di molecole, egli è chiaro dalle cose dette nel secondo articolo che la gravitazione gioverà pochissimo a tenere l'una presso l'altra queste due parti; ma lo sforzo che sarà necessario per poterle staccare uguaglierà la somma delle tenacità colle quali si tengono insieme le parti di quelle molecole che da un tale piano vengono divise. Prescindendo poi dalla imperfetta spiegazione del fatto, ella sarebbe un'opinione bizzarra quella di voler supporre le molecole de' corpi di una forma tortuosa ovvero unciuata come gli atomi adunchi de' Gassendisti (1); e sarebbe affatto contraria alle dottrine della cristallizzazione, le quali ci mostrano esser le molecole di tutti i corpi inorganici dotate di forme regolari e geometriche e incapaci di quel vicendevole intrecciamento.

XIII.

Un'altra ipotesi che si potrebbe formare sarebbe quella di immaginare i corpi siccome composti di tanti sottilissimi fili, ossia come formati di un tessuto fibroso o reticolare. Si può agevolmente dimostrare che prendendo a considerare due prismi di materia continua, ottenuti col dividere per mezzo un prisma retto a basi quadrate mediante un piano perpendicolare agli spigoli laterali, i quali due prismi combaciandosi nelle basi si attraggano per la sola gravitazione, e concependo che, in grazia di un opportuno condensamento della loro materia, si riducano piccolissimi i quadrati delle loro basi senza che però si cangino nè le lunghezze di essi prismi nè le loro masse, puossi, dico, dimostrare facilmente che la forza totale con cui cotali prismi si attraggono può essere aumentata immensamente. Se adunque si immaginasse che un dato spazio, supposto prima riempiuto di materia continua, venisse diviso in tante parti prismatiche, e che la materia appartenente a ciascuna di queste venisse a condensarsi in un sottilissimo filo, potrebbero questi fili avere una tenacità incomparabilmente maggiore di quella prima del condensamento, e l'unione di tutte queste tenacità potrebbe formare una forza considerevole che sarebbe la tenacità del total corpo secondo la direzione de' fili stessi. E ad avere una somigliante tenacità in tutti i versi basterebbe che di questi fili ve ne fossero in tutte le direzioni, cioè che i corpi avessero un tessuto reticolare. Malgrado poi una sì forte coesione, al venire spezzato il corpo ed allontanate appena alcun poco le estremità de' rotti fili, si perderebbe immediatamente il vantaggio del tessuto reticolare, e svani-

(1) Poli. *Fisica*, Venezia 1804, Tom. I, pag. 93.

rebbe quel grande effetto della gravitazione, in un modo perfettamente conforme a quanto avviene in natura.

Pria di esporre le difficoltà le quali a parer mio impediscono d'adottare questa maniera di spiegar la coesione de' corpi, darò qualche sviluppo alla dimostrazione testè abbozzata. E comincerò dal determinare la forza colla quale si attraggono in virtù della gravitazione due prismi retti a basi quadrate, uguali fra loro e congiunti per le dette basi, allo scopo di dimostrare che se i lati di queste basi andranno rendendosi successivamente minori, conservandosi costanti le loro altezze e le loro masse, potrà questo effetto della gravitazione aumentarsi sino ad una grandezza qualunque.

Chiamisi

h la lunghezza dei lati delle basi di questi due prismi,

h' l'altezza di ciascuno de' medesimi prismi,

Δ la loro densità,

P la loro attrazione vicendevole, supposta espressa dalla quantità di moto ch'ella è capace di comunicare in un minuto secondo, e nella supposizione che questi due prismi si trovino a vicendevole contatto per tutta l'estensione di una delle basi di ciascuno.

Riferiamo questi due prismi a tre assi ortogonali, nella stessa maniera che abbiam fatto al num. II pei due cubi che allora consideravamo, vale a dire in maniera che rappresentando con Aa, ab (fig. 1) le altezze de' due prismi, per DAC, be le loro basi libere, e per $dacE$ il piano d'unione delle altre due basi, sia

Ab nell' asse delle x,

AC in quello delle y,

AD in quello delle z,

supponendo che l'origine sia in A e che le coordinate crescano nelle direzioni da A a b, da A a C, e da A a D.

Adottando, oltre alle precedenti, quelle denominazioni delle quali abbiamo fatto uso nel num. II, l'attrazione vicendevole de' due prismi in virtù della gravitazione sarà espressa da

$$P = K\Delta^2\mu\mu\int_0^{h'} dX\int_{h'}^{2h'} dx(x-X)\int_0^h dZ\int_0^h dz\int_0^h dY\int_0^h dy\cdot\frac{1}{\left\{(x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Delle prime quattro fra queste integrazioni noi abbiamo il risultamento già bello e ottenuto nel secondo membro dell' equazione [19], senza che nulla vi resti a fare. Per riguardo alle altre due, rappresentando con

$$\Pi(p),\ {}'\Pi(p),\ {}''\Pi(p)$$

quelle stesse espressioni che erano state rappresentate dalle medesime indicazioni al num. IV (veggansi le equazioni [21], [22] e [23]), noi avremo

$$\int_{h'}^{2h'} dx \cdot \Pi(x-X) = {}'\Pi(2h'-X) - {}'\Pi(h'-X)$$

$$\int_0^{h'} dX \cdot \int_{h'}^{2h'} dx \cdot \Pi(x-X) = {}''\Pi(0) + {}''\Pi(2h') - 2\,{}''\Pi(h').$$

Per conseguenza, onde ottenere l'integrale di sesto ordine del quale abbiamo bisogno, non occorre che richiamar l'espressione rappresentata da ${}''\Pi(p)$, e sostituire in essa le quantità *zero*, h', $2h'$ in luogo di p, e porre i tre risultamenti nel secondo membro dell'ultima delle equazioni or ora esposte.

La quantità ${}''\Pi(0)$ era già stata determinata al num. IV, e si era avuto

$${}''\Pi(0) = -h^4 \log. h - \frac{1}{3} h^4 \cdot \log. 2 + \text{Cost.}$$

Le quantità ${}''\Pi(h')$, ${}''\Pi(2h')$ si ottengono agevolmente coll'eseguire le indicate sostituzioni, e si ha

$$\begin{aligned}
{}''\Pi(h') = & -\frac{1}{3} h'^4 + \left(\frac{2}{3} h'^3 - h'h^2\right)\sqrt{h'h'+hh} - \left(\frac{1}{3} h'^3 - h'h^2\right)\sqrt{h'h'+2hh} \\
& + \frac{2}{3} h'^3 h \log. \left\{\frac{-h+\sqrt{h'h'+hh}}{h+\sqrt{h'h'+hh}}\right\} + \left(\frac{2}{3} h'^3 h - 2h'h^3\right) \log. \left\{\frac{h+\sqrt{h'h'+2hh}}{-h+\sqrt{h'h'+2hh}}\right\} \\
& - \frac{1}{3} h^4 \log. \left(h'+\sqrt{h'h'+hh}\right) - \frac{2}{3} h^4 \log. \left(h'+\sqrt{h'h'+2hh}\right) \\
& + 2h'h'h^2 \cdot \text{Arc.tan.} \frac{h^2}{h'\sqrt{h'h'+2hh}} + \frac{4}{3} h^4 \text{Arc.tan.} \frac{h'}{\sqrt{h'h'+2hh}} + \text{Cost.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}''\Pi(2h') = & -\frac{16}{3} h'^4 + \left(\frac{16}{3} h'^3 - 2h'h^2\right)\sqrt{4h'h'+hh} - \left(\frac{8}{3} h'^3 - 2h'h^2\right)\sqrt{4h'h'+2hh} \\
& + \frac{16}{3} h'^3 h \log. \left\{\frac{-h+\sqrt{4h'h'+hh}}{h+\sqrt{4h'h'+hh}}\right\} + \left(\frac{16}{3} h'^3 h - 4h'h^3\right) \log. \left\{\frac{h+\sqrt{4h'h'+2hh}}{-h+\sqrt{4h'h'+2hh}}\right\} \\
& - \frac{1}{3} h^4 \cdot \log. \left(2h'+\sqrt{4h'h'+hh}\right) - \frac{2}{3} h^4 \log. \left(2h'+\sqrt{4h'h'+2hh}\right) \\
& + 8h'h'h^2 \cdot \text{Arc.tan.} \frac{h^2}{2h'\sqrt{4h'h'+2hh}} + \frac{4}{3} h^4 \cdot \text{Arc.tan.} \frac{2h'}{\sqrt{4h'h'+2hh}} + \text{Cost.}
\end{aligned}$$

Perciò, facendo per maggiore semplicità

$$h = \frac{1}{\psi} h'$$

si avrà

$$''\Pi(0)+''\Pi(2h')-2''\Pi(h')$$

$$=h'^4\Big\{-\frac{1}{\psi^4}\,\mathrm{l.}\frac{h'}{\psi}-\frac{1}{3\psi^4}\,\mathrm{l.}\,2-\frac{16}{3}+\left(\frac{16}{3}-\frac{2}{\psi^2}\right)\sqrt{4+\frac{1}{\psi^2}}+\left(-\frac{8}{3}+\frac{2}{\psi^2}\right)\sqrt{4+\frac{2}{\psi^2}}$$

$$+\frac{16}{3\psi}\,\mathrm{l.}\left[\frac{-\frac{1}{\psi}+\sqrt{4+\frac{1}{\psi^2}}}{\frac{1}{\psi}+\sqrt{4+\frac{1}{\psi^2}}}\right]+\left(\frac{16}{3\psi}-\frac{4}{\psi^3}\right)\mathrm{l.}\left[\frac{\frac{1}{\psi}+\sqrt{4+\frac{2}{\psi^2}}}{-\frac{1}{\psi}+\sqrt{4+\frac{2}{\psi^2}}}\right]$$

$$-\frac{1}{3\psi^4}\,\mathrm{l.}\,h'-\frac{1}{3\psi^4}\,\mathrm{l.}\left(2+\sqrt{4+\frac{1}{\psi^2}}\right)-\frac{2}{3\psi^4}\,\mathrm{l.}\,h'-\frac{2}{3\psi^4}\,\mathrm{l.}\left(2+\sqrt{4+\frac{2}{\psi^2}}\right)$$

$$+\frac{8}{\psi^2}\,\mathrm{Arc.tan.}\frac{1}{2\psi^2\sqrt{4+\frac{2}{\psi^2}}}+\frac{4}{3\psi^4}\,\mathrm{Arc.tan.}\frac{2}{\sqrt{4+\frac{2}{\psi^2}}}+\frac{2}{3}-2\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{\psi^2}\right)\sqrt{1+\frac{1}{\psi^2}}$$

$$+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{\psi^2}\right)\sqrt{1+\frac{2}{\psi^2}}-\frac{4}{3\psi}\,\mathrm{l.}\left[\frac{-\frac{1}{\psi}+\sqrt{1+\frac{1}{\psi^2}}}{\frac{1}{\psi}+\sqrt{1+\frac{1}{\psi^2}}}\right]-2\left(\frac{2}{3\psi}-\frac{2}{\psi^3}\right)\mathrm{l.}\left[\frac{\frac{1}{\psi}+\sqrt{1+\frac{2}{\psi^2}}}{-\frac{1}{\psi}+\sqrt{1+\frac{2}{\psi^2}}}\right]$$

$$+\frac{2}{3\psi^4}\,\mathrm{l.}\,h'+\frac{2}{3\psi^4}\,\mathrm{l.}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{\psi^2}}\right)+\frac{4}{3\psi^4}\,\mathrm{l.}\,h'+\frac{4}{3\psi^4}\,\mathrm{l.}\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{\psi^2}}\right)$$

$$-\frac{4}{\psi^2}\,\mathrm{Arc.tan.}\frac{1}{\psi^2\sqrt{1+\frac{2}{\psi^2}}}-\frac{8}{3\psi^4}\,\mathrm{Arc.tan.}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{\psi^2}}}\Big\}\;;$$

e per conseguenza dopo alcune riduzioni sarà

$$[34]\quad P=\frac{K\Delta^2\mu\mu h'^4}{\psi^4}\Big\{\mathrm{l.}\,\psi-\frac{1}{3}\,\mathrm{l.}\,2-\frac{14}{3}\psi^4+\left(\frac{16}{3}\psi^4-2\psi^2\right)\sqrt{4+\frac{1}{\psi^2}}+\left(-\frac{8}{3}\psi^4+2\psi^2\right)\sqrt{4+\frac{2}{\psi^2}}$$

$$+\frac{16}{3}\psi^3\,\mathrm{l.}\left[\frac{-\frac{1}{\psi}+\sqrt{4+\frac{1}{\psi^2}}}{\frac{1}{\psi}+\sqrt{4+\frac{1}{\psi^2}}}\right]+\left(\frac{16}{3}\psi^3-4\psi\right)\mathrm{l.}\left[\frac{\frac{1}{\psi}+\sqrt{4+\frac{2}{\psi^2}}}{-\frac{1}{\psi}+\sqrt{4+\frac{2}{\psi^2}}}\right]$$

$$-\frac{1}{3}\,\mathrm{l.}\left(2+\sqrt{4+\frac{1}{\psi^2}}\right)-\frac{2}{3}\,\mathrm{l.}\left(2+\sqrt{4+\frac{2}{\psi^2}}\right)+8\psi^2\,\mathrm{Arc.tan.}\frac{1}{2\psi^2\sqrt{4+\frac{2}{\psi^2}}}$$

$$+\frac{4}{3}\,\mathrm{Arc.tan.}\frac{2}{\sqrt{4+\frac{2}{\psi^2}}}-\left(\frac{4}{3}\psi^4-2\psi^2\right)\sqrt{1+\frac{1}{\psi^2}}+\left(\frac{2}{3}\psi^4-2\psi^2\right)\sqrt{1+\frac{2}{\psi^2}}$$

$$-\frac{4}{3}\psi^3\cdot\mathrm{l.}\left[\frac{-\frac{1}{\psi}+\sqrt{1+\frac{1}{\psi^2}}}{\frac{1}{\psi}+\sqrt{1+\frac{1}{\psi^2}}}\right]-\left(\frac{4}{3}\psi^3-4\psi\right)\mathrm{l.}\left[\frac{\frac{1}{\psi}+\sqrt{1+\frac{2}{\psi^2}}}{-\frac{1}{\psi}+\sqrt{1+\frac{2}{\psi^2}}}\right]$$

$$+\frac{2}{3}\,\mathrm{l.}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{\psi^2}}\right)+\frac{4}{3}\,\mathrm{l.}\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{\psi^2}}\right)$$

$$-4\psi^2\cdot\mathrm{Arc.tan.}\frac{1}{\psi^2\sqrt{1+\frac{2}{\psi^2}}}-\frac{8}{3}\,\mathrm{Arc.tan.}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{\psi^2}}}\Big\}\,.$$

Diamo all' espressione contenuta nel secondo membro una forma, la quale sia atta a mostrarci facilmente secondo qual ragione si aumenti il valore di P, allorchè la quantità ψ ossia $\frac{h'}{h}$ si rende successivamente più grande.

Chiamiamo a quest' uopo

$$\Delta'$$

la densità che acquisterebbero i due prismi se, senza variare di massa, si cangiassero in due cubi co' lati della lunghezza h', vale a dire se i lati delle loro basi passassero dalla lunghezza h alla h' ossia variassero nella proporzione di 1 a ψ. Si avrà evidentemente

$$\Delta' = \frac{hh}{h'h'}\Delta = \frac{\Delta}{\psi^2},$$

e per conseguenza

$$\Delta = \Delta'\psi^2;$$

sostituendo il qual valore di Δ, il fattore fuori delle parentesi del secondo membro dell' equazione [34] diverrà

$$a) \qquad K\Delta'\Delta'\mu\mu h'^4.$$

Ciò posto sviluppiamo i varii termini contenuti sotto le parentesi principali del suddetto membro dell'equazione [34], in serie secondo le potenze decrescenti di ψ, e in ciascuna serie determiniamo tutti i coefficienti delle potenze positive di essa ψ.

Lasciati da banda i primi tre termini, i quali non sono soggetti a sviluppo, noi cominceremo dal quarto, sviluppandolo mediante la nota formola di Lagrange

$$\varphi(\theta) = \varphi(0) + \theta \cdot \varphi'(0) + \frac{1}{2}\theta^2 \cdot \varphi''(0) \cdots + \frac{\theta^{n-1}}{2 \cdot 3 \cdots (n-1)}\varphi^{(n-1)}(0) + \frac{\theta^n}{2 \cdot 3 \cdots n}\varphi^{(n)}(k\theta)$$

ove per k s'intende una quantità reale presa opportunamente fra *zero* e $+1$ (*).

Poniamo, per ciò che si vedrà or ora,

$$M = \sqrt{a + \theta},$$

rappresentando con a e θ, sì ora che in tutto il presente n.° XIII, due quantità reali e positive, e per maggiore comodità indichiamo le quantità $\left(\frac{dM}{d\theta}\right)$, $\left(\frac{d^2 M}{d\theta^2}\right)$, ecc. con M', M'', ecc. come sovente si suol praticare; noi avremo

---

(*) Io so benissimo che questa formola non è generale, ma che vi sono de' casi ov'ella è erronea (V. il *Résumé des Leçons sur le Calcul Infinitésimal*, par M. Cauchy, Tom. I, p. 143). Essa però non è soggetta a difficoltà allorquando, facendo passare la k per tutti i valori compresi fra *zero* e $+1$, non si hanno mai, nella serie de' valori di $\varphi^{(n)}(k\theta)$, nè de' valori immaginarii nè de' valori infiniti nè de' passaggi per salto da una grandezza ad un'altra; e da questi sfavorevoli accidenti vanno appunto immuni tutti gli sviluppi che noi passiamo ad eseguire.

$$M'=\frac{1}{2\sqrt{a+\theta}}$$

$$M''=-\frac{1}{4(a+\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$M'''=\frac{3}{8(a+\theta)^{\frac{5}{2}}}.$$

Per conseguenza, sviluppando in serie la quantità $\sqrt{a+\theta}$, e limitandoci alla determinazione de' soli primi due termini, e pe' rimanenti aggiungendo il resto sotto la forma approssimativa o indeterminata trovata da Lagrange, si avrà

$$\sqrt{a+\theta}=\sqrt{a}+\frac{\theta}{2\sqrt{a}}-\frac{\theta^2}{8}\cdot\frac{1}{(a+k\theta)^{\frac{3}{2}}};$$

ovvero osservando che

$$\frac{1}{(a+k\theta)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{k\theta}{a}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{k}{a^{\frac{3}{2}}},$$

dove l'ultima k è una quantità similmente compresa fra *zero* e $+1$, ma però in generale diversa dalla k precedente, si avrà anche

$$\sqrt{a+\theta}=\sqrt{a}+\frac{\theta}{2\sqrt{a}}-\frac{k\theta^2}{8a^{\frac{3}{2}}};$$

e sostituendo rispettivamente 4 e $\frac{1}{\psi^2}$ in luogo di a e di θ, si avrà

$$\sqrt{4+\frac{1}{\psi^2}}=2+\frac{1}{4\psi^2}-\frac{k}{64\psi^4}.$$

Determinando anche il terzo termine della serie, avremo

$$\sqrt{a+\theta}=\sqrt{a}+\frac{\theta}{2\sqrt{a}}-\frac{\theta^2}{8a^{\frac{3}{2}}}+\frac{\theta^3}{16(a+k\theta)^{\frac{5}{2}}},$$

$$=\sqrt{a}+\frac{\theta}{2\sqrt{a}}-\frac{\theta^2}{8a^{\frac{3}{2}}}+\frac{k\theta^3}{16a^{\frac{5}{2}}},$$

e per conseguenza

$$\sqrt{4+\frac{1}{\psi^2}}=2+\frac{1}{4\psi^2}-\frac{1}{64\psi^4}+\frac{k}{512\psi^6}.$$

Introducendo questi due sviluppi nel quarto termine del secondo membro dell'equazione [34], avremo

$$\left(\frac{16}{3}\psi^4-2\psi^2\right)\sqrt{4+\frac{1}{\psi^2}}=\frac{16}{3}\psi^4\left(2+\frac{1}{4\psi^2}-\frac{1}{64\psi^4}+\frac{k}{512\psi^6}\right)$$
$$-2\psi^2\left(2+\frac{1}{4\psi^2}-\frac{k}{64\psi^4}\right),$$

ove k è generalmente di valor diverso dall'uno all'altro de' due termini del secondo membro. Facendo le riduzioni, e osservando che la quantità

$$\frac{k}{96\psi^2}+\frac{3k}{96\psi^2},$$

quantunque le due k sieno di valor diverso, può ridursi a

$$\frac{k}{24\psi^2}$$

ove k è una nuova quantità compresa fra *zero* e $+1$, avremo

$$b)\qquad \left(\frac{16}{3}\psi^4-2\psi^2\right)\sqrt{4+\frac{1}{\psi^2}}=\frac{32}{3}\psi^4-\frac{8}{3}\psi^2-\frac{7}{12}+\frac{k}{24\psi^2}.$$

Osservazione. Noi faremo uso frequentemente di questa lettera k per indicare una quantità compresa fra *zero* e $+1$; e per non moltiplicare a dismisura il numero delle indicazioni noi impiegheremo per questo scopo sempre la lettera medesima senza apporvi nessuna distinzione, quantunque ella possa avere un valore diverso ogni volta che venga adoperata. Egli è poi ovvio a vedersi, che quando si avrà, p. e., l'espressione $[3k+4k]$ essendo le due k di valor diverso, noi potremo fare una riduzione e scrivere $7k$; ma avendosi $[4k-3k]$, non potremo fidarci a far riduzione veruna.

Pel quinto dei termini contenuti fra le parentesi principali dell'equazione [34] noi porremo

$$a=2,\ \theta=\frac{2}{\psi^2}$$

nei due precedenti sviluppi della quantità $\sqrt{a+\theta}$; il che ci darà

$$\sqrt{4+\frac{2}{\psi^2}}=2+\frac{2}{4\psi^2}-\frac{4k}{64\psi^4},$$

$$\text{e}\quad\sqrt{4+\frac{2}{\psi^2}}=2+\frac{2}{4\psi^2}-\frac{4}{64\psi^4}+\frac{8k}{512\psi^6};$$

donde avremo

$$c)\quad \left(-\frac{8}{3}\psi^4+2\psi^2\right)\sqrt{4+\frac{2}{\psi^2}}=-\frac{8}{3}\psi^4\left(2+\frac{1}{2\psi^2}-\frac{1}{16\psi^4}+\frac{k}{64\psi^6}\right)$$
$$+2\psi^2\left(2+\frac{1}{2\psi^2}-\frac{k}{16\psi^4}\right)$$
$$=-\frac{16}{3}\psi^4+\frac{8}{3}\psi^2+\frac{7}{6}-\frac{k}{6\psi^2}.$$

Passiamo al sesto termine, e facciamo

$$M=\log.\left[\frac{-\theta+\sqrt{a+\theta^2}}{\theta+\sqrt{a+\theta^2}}\right];$$

sarà

$$M'=\left[\frac{-1+\dfrac{\theta}{\sqrt{a+\theta^2}}}{-\theta+\sqrt{a+\theta^2}}\right]-\left[\frac{1+\dfrac{\theta}{\sqrt{a+\theta^2}}}{\theta+\sqrt{a+\theta^2}}\right]=-\frac{2}{\sqrt{a+\theta^2}}$$

$$M''=\frac{2\theta}{(a+\theta^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$M'''=\frac{2}{(a+\theta^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{6\theta^2}{(a+\theta^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$M^{IV}=\frac{2\left(-\frac{3}{2}\right)2\theta}{(a+\theta^2)^{\frac{5}{2}}}-\frac{12\theta}{(a+\theta^2)^{\frac{5}{2}}}+\frac{\frac{5}{2}\cdot 2\theta\cdot 6\theta^2}{(a+\theta^2)^{\frac{7}{2}}}$$

$$=-\frac{18\theta}{(a+\theta^2)^{\frac{5}{2}}}+\frac{30\theta^3}{(a+\theta^2)^{\frac{7}{2}}};$$

e perciò sviluppando la M in una serie ove sieno determinati i primi quattro termini, avremo

$$\log.\left[\frac{-\theta+\sqrt{a+\theta^2}}{\theta+\sqrt{a+\theta^2}}\right]=\log.1-\theta\cdot\frac{2}{\sqrt{a}}+\frac{\theta^2}{2}\cdot 0+\frac{\theta^3}{2\cdot 3}\cdot\frac{2}{a^{\frac{3}{2}}}$$

$$+\frac{\theta^4}{2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{-18k\theta}{(a+k\theta^2)^{\frac{5}{2}}}+\frac{30\cdot k\theta^3}{(a+k\theta^2)^{\frac{7}{2}}}\right)$$

$$=-\theta\cdot\frac{2}{\sqrt{a}}+\frac{\theta^3}{3a^{\frac{3}{2}}}+\frac{\theta^5}{4}\left(-\frac{3k}{a^{\frac{5}{2}}}+\frac{5k\theta^2}{a^{\frac{7}{2}}}\right).$$

Per conseguenza facendo

$$a=4,\quad \theta=\frac{1}{\psi},$$

e moltiplicando l'equazione per $\frac{16}{3}\psi^3$, si avrà

$$d)\qquad \frac{16}{3}\psi^3\log.\left[\frac{-\frac{1}{\psi}+\sqrt{4+\frac{1}{\psi^2}}}{\frac{1}{\psi}+\sqrt{4+\frac{1}{\psi^2}}}\right]=\frac{16}{3}\psi^3\left\{-\frac{1}{\psi}+\frac{1}{24\psi^3}-\frac{3k}{128\psi^5}+\frac{5k}{512\psi^7}\right\}$$

$$=-\frac{16}{3}\psi^2+\frac{2}{9}-\frac{k}{8\psi^2}+\frac{5k}{96\psi^4}.$$

Veniamo ora al settimo termine, pel quale occorre un po' più di calcolo. Facciamo per esso

$$M=\log.\left[\frac{\theta+\sqrt{a+2\theta^2}}{-\theta+\sqrt{a+2\theta^2}}\right];$$

avremo con una prima derivazione

$$M'=\left[\frac{1+\dfrac{2\theta}{\sqrt{a+2\theta^2}}}{\theta+\sqrt{a+2\theta^2}}\right]-\left[\frac{-1+\dfrac{2\theta}{\sqrt{a+2\theta^2}}}{-\theta+\sqrt{a+2\theta^2}}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a+2\theta^2}}\left\{1+\frac{\theta}{\theta+\sqrt{a+2\theta^2}}+1-\frac{\theta}{\sqrt{a+2\theta^2}-\theta}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a+2\theta^2}}\left\{2+\theta\left(\frac{\sqrt{a+2\theta^2}-\theta-\theta-\sqrt{a+2\theta^2}}{a+\theta^2}\right)\right\}$$

$$=\frac{2a}{(a+\theta^2)\sqrt{a+2\theta^2}}.$$

Mediante una seconda derivazione otterremo

$$M''=\frac{2a(-2\theta)}{(a+\theta^2)^2\sqrt{a+2\theta^2}}+\frac{2a\left(-\frac{1}{2}\cdot 4\theta\right)}{(a+\theta^2)(a+2\theta^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-\frac{4a\theta}{(a+\theta^2)^2(a+2\theta^2)^{\frac{3}{2}}}(a+2\theta^2+a+\theta^2)$$

$$=-\frac{(8a^2\theta+12a\theta^3)}{(a+\theta^2)^2(a+2\theta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dalla terza derivazione, dopo fatte le opportune riduzioni, si ha

$$M'''=\frac{-8a^4+20a^3\theta^2+108a^2\theta^4+96a\theta^6}{(a+\theta^2)^3(a+2\theta^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

E dalla quarta, dopo fatte similmente le necessarie riduzioni, si ottiene

$$M^{\text{IV}}=\frac{168a^5\theta+408a^4\theta^3-216a^3\theta^5-1320a^2\theta^7-960a\theta^9}{(a+\theta^2)^4(a+2\theta^2)^{\frac{7}{2}}}.$$

Sviluppando pertanto in serie la quantità

$$\log.\left[\frac{\theta+\sqrt{a+2\theta^2}}{-\theta+\sqrt{a+2\theta^2}}\right]$$

secondo le potenze di θ, e determinando solamente i primi due termini, avremo

$$\log.\left[\frac{\theta+\sqrt{a+2\theta^2}}{-\theta+\sqrt{a+2\theta^2}}\right]=0+\frac{2\theta}{\sqrt{a}}+\frac{\theta^2}{2}\left[\frac{-8a^2\theta k-12a\theta^3 k}{(a+k\theta^2)^2(a+2k\theta^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$=\frac{2\theta}{\sqrt{a}}+\frac{\theta^2}{2}\left(-\frac{8a^2\theta k}{a^2\cdot a^{\frac{3}{2}}}-\frac{12a\theta^3 k}{a^2\cdot a^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$=\frac{2\theta}{\sqrt{a}}-\frac{4\theta^3 k}{a^{\frac{3}{2}}}-\frac{6\theta^5 k}{a^{\frac{5}{2}}}$$

e determinando eziandio il terzo e il quarto termine, sarà

$$\mathrm{l}.\left[\frac{\theta+\sqrt{a+2\theta^2}}{-\theta+\sqrt{a+2\theta^2}}\right]=0+\frac{2\theta}{\sqrt{a}}+\frac{\theta^2}{2}\cdot 0+\frac{\theta^3}{2\cdot 3}\left(-\frac{8}{a^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$+\frac{\theta^4}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{168a^5k\theta+408a^4k\theta^3-216a^3k\theta^5-1320a^2k\theta^7-960ak\theta^9}{(a+k\theta^2)^4(a+2k\theta^2)^{\frac{7}{2}}}$$

$$=\frac{2\theta}{\sqrt{a}}-\frac{4\theta^3}{3a^{\frac{3}{2}}}+\frac{\theta^5}{a^{\frac{13}{2}}}(7a^4k+17a^3\theta^2k-9a^2\theta^4k-55a\theta^6k-40\theta^8k).$$

Mettiamo ora 4 e $\frac{1}{\psi}$ in luogo di a e di θ, rispettivamente; il primo de' due precedenti sviluppi darà

$$\log.\left[\frac{\frac{1}{\psi}+\sqrt{4+\frac{2}{\psi^2}}}{-\frac{1}{\psi}+\sqrt{4+\frac{2}{\psi^2}}}\right]=\frac{1}{\psi}-\frac{1}{2\psi^3}k-\frac{3}{16\psi^5}k$$

e il secondo

$$\mathrm{l}.\left[\frac{\frac{1}{\psi}+\sqrt{4+\frac{2}{\psi^2}}}{-\frac{1}{\psi}+\sqrt{4+\frac{2}{\psi^2}}}\right]=\frac{1}{\psi}-\frac{1}{6\psi^3}+\frac{1}{\psi^5\cdot 2^{13}}\left(7\cdot 4^4k+\frac{17\cdot 4^3k}{\psi^2}-\frac{9\cdot 4^2k}{\psi^4}-\frac{55\cdot 4k}{\psi^6}-\frac{40k}{\psi^8}\right)$$

$$=\frac{1}{\psi}-\frac{1}{6\psi^3}+\frac{7k}{32\psi^5}+\frac{17k}{128\psi^7}-\frac{9k}{512\psi^9}-\frac{55k}{2048\psi^{11}}-\frac{5k}{1024\psi^{13}};$$

e introducendo opportunamente questi due ultimi sviluppi nel settimo termine di cui ci occupiamo, avremo

$$e)\qquad \left(\frac{16}{3}\psi^3-4\psi\right)\log.\left[\frac{\frac{1}{\psi}+\sqrt{4+\frac{2}{\psi^2}}}{-\frac{1}{\psi}+\sqrt{4+\frac{2}{\psi^2}}}\right]$$

$$=\frac{16}{3}\psi^3\left\{\frac{1}{\psi}-\frac{1}{6\psi^3}+\frac{7k}{32\psi^5}+\frac{17k}{128\psi^7}-\frac{9k}{512\psi^9}-\frac{55k}{2048\psi^{11}}-\frac{5k}{1024\psi^{13}}\right\}-4\psi\left\{\frac{1}{\psi}-\frac{k}{2\psi^3}-\frac{3k}{16\psi^5}\right\}$$

$$=\frac{16}{3}\psi^2-\left(4+\frac{8}{9}\right)+\left(2+\frac{7}{6}\right)\frac{k}{\psi^2}+\left(\frac{3}{4}+\frac{17}{24}\right)\frac{k}{\psi^4}-\frac{3k}{32\psi^6}-\frac{55k}{384\psi^8}-\frac{5k}{192\psi^{10}}$$

$$=\frac{16}{3}\psi^2-4\frac{8}{9}+\frac{19k}{6\psi^2}+\frac{35k}{24\psi^4}-\frac{3k}{32\psi^6}-\frac{55k}{384\psi^8}-\frac{5k}{192\psi^{10}}.$$

Proseguendo i nostri sviluppi facciamo

$$M=\log.\left(a+\sqrt{a^2+\theta}\right);$$

sarà $M'=\frac{1}{2\sqrt{a^2+\theta}}\cdot\frac{1}{a+\sqrt{a^2+\theta}}$

d'onde $\log.\left(a+\sqrt{a^2+\theta}\right)=\log.2a+\theta\cdot\frac{1}{2\sqrt{a^2+k\theta}\cdot\left(a+\sqrt{a^2+k\theta}\right)}$

$$=\log.2a+\theta\cdot\frac{k}{2a}\cdot\frac{k}{2a}$$

$$=\log.2a+\frac{\theta k}{4a^2};$$

e facendo $a=2$, $\theta=\frac{1}{\psi^2}$, sarà

$$\log.\left(2+\sqrt{4+\frac{1}{\psi^2}}\right)=\log.4+\frac{k}{16\psi^2};$$

e l'ottavo termine sotto le parentesi dell'equazione [34] sarà dato in serie dall'equazione

$$f)\qquad -\frac{1}{3}\log.\left(2+\sqrt{4+\frac{1}{\psi^2}}\right)=-\frac{1}{3}\log.4-\frac{k}{48\psi^2}.$$

Se nel precedente sviluppo della quantità $\log.\left(a+\sqrt{a^2+\theta}\right)$ noi facciamo invece $\theta=\frac{2}{\psi^2}$, ritenendo $a=2$, avremo

$$\log.\left(2+\sqrt{4+\frac{2}{\psi^2}}\right)=\log.4+\frac{k}{8\psi^2},$$

il che ci dà pel nono termine

$$g)\qquad -\frac{2}{3}\log.\left(2+\sqrt{4+\frac{2}{\psi^2}}\right)=-\frac{2}{3}\log.4-\frac{k}{12\psi^2}.$$

Sia ora $M=\text{Arc.tan.}\,\frac{\theta}{4\sqrt{4+\theta}}$;

$$\text{sarà}\quad M'=\frac{1}{1+\frac{\theta^2}{16(4+\theta)}}\cdot\left\{\frac{1}{4\sqrt{4+\theta}}+\frac{\theta}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(4+\theta)^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

$$=\frac{1}{64+16\theta+\theta^2}\cdot\left\{4\sqrt{4+\theta}+\frac{4\theta\left(-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{4+\theta}}\right\}$$

$$=\frac{1}{(8+\theta)^2\sqrt{4+\theta}}(16+4\theta-2\theta)$$

$$=\frac{2}{(8+\theta)\sqrt{4+\theta}},$$

$$M''=-\frac{2}{(8+\theta)^2\sqrt{4+\theta}}-\frac{2\times\frac{1}{2}}{(8+\theta)(4+\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-\frac{1}{(8+\theta)^2(4+\theta)^{\frac{3}{2}}}(8+2\theta+8+\theta)$$

$$=-\frac{(16+3\theta)}{(8+\theta)^2(4+\theta)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\text{e però}\quad \text{Arc.tan.}\,\frac{\theta}{4\sqrt{4+\theta}}=0+\frac{\theta}{8}+\frac{\theta^2}{2}\left\{\frac{-16-3k\theta}{(8+k\theta)^2(4+k\theta)^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

$$=\frac{\theta}{8}-\frac{\theta^2}{2}\left(\frac{16k}{64\cdot 8}+\frac{3\theta\cdot k}{64\cdot 8}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\theta-\frac{k\theta^2}{64}-\frac{3k\theta^3}{1024};$$

e facendo $\theta=\frac{2}{\psi^2}$, si avrà pel decimo de' suddetti termini

$h)\qquad 8\psi^2 \text{Arc.tan.}\,\frac{1}{2\psi^2\sqrt{4+\frac{2}{\psi^2}}} = 8\psi^2\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{\psi^2} - \frac{k}{64}\cdot\frac{4}{\psi^4} - \frac{3k\cdot 8}{1024\cdot\psi^6}\right)$

$$= 2 - \frac{k}{2\psi^2} - \frac{3k}{16\psi^4}.$$

Per avere il termine successivo si ponga

$$M = \text{Arc.tan.}\,\frac{2}{\sqrt{4+\theta}};$$

si avrà $\quad M' = \frac{1}{1+\frac{4}{4+\theta}} \times 2\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{(4+\theta)^{\frac{3}{2}}}$

$$= -\frac{1}{(8+\theta)\sqrt{4+\theta}};$$

e perciò $\quad \text{Arc.tan.}\,\frac{2}{\sqrt{4+\theta}} = \text{Arc.tan.}\,1 - \frac{\theta}{(8+k\theta)\sqrt{4+k\theta}}$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{k\theta}{16}$$

e facendo $\theta = \frac{2}{\psi^2}$, avremo l'undecimo termine dato da

$i)\qquad \frac{4}{3}\text{Arc.tan.}\,\frac{2}{\sqrt{4+\frac{2}{\psi^2}}} = \frac{1}{3}\pi - \frac{k}{6\psi^2}.$

Considerando gli altri termini posteriori all'undecimo noi veggiamo che se si aggiunge $\frac{2}{3}\log.2$ al termine $\frac{2}{3}\log.\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{\psi^2}}\right)$, e $\frac{4}{3}\log.2$ al termine $\frac{4}{3}\log.\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{\psi^2}}\right)$, essi rendonsi tutti rispettivamente uguali a ciò che divengono i termini che abbiamo sviluppati col sostituirvi $\frac{\psi}{2}$ in luogo di ψ e col moltiplicarli quindi per -2. Indicando adunque con

$$\phi(\psi)$$

la somma dei termini già sviluppati, e con

$$H$$

la somma di tutti gli altri che loro vengono dopo, si ha

$$H + 2\log.2 = -2\phi\left(\frac{\psi}{2}\right)$$

e perciò $\quad H = -2\phi\left(\frac{\psi}{2}\right) - 2\log.2.$

Si avrà dunque lo sviluppo della somma de' menzionati ultimi termini contenuti fra le parentesi principali del secondo membro dell'equazione [34], prendendo la somma degli sviluppi già trovati, moltiplicandola per -2, ponendovi $\frac{\psi}{2}$ in luogo di ψ, e sottraendovi la quantità $2\log.2$.

Gli sviluppi che abbiamo ottenuti, raccogliendoli insieme, sono per ordine i seguenti

$$b)\qquad -\frac{7}{12}+\frac{32}{3}\psi^4-\frac{8}{3}\psi^2+\frac{k}{24\psi^2}$$

$$c)\qquad +\frac{7}{6}-\frac{16}{3}\psi^4+\frac{8}{3}\psi^2-\frac{k}{6\psi^2}$$

$$d)\qquad +\frac{2}{9}\qquad -\frac{16}{3}\psi^2-\frac{k}{8\psi^2}+\frac{5k}{96\psi^4}$$

$$e)\qquad -4\frac{8}{9}\qquad +\frac{16}{3}\psi^2+\frac{19k}{6\psi^2}+\frac{35k}{24\psi^4}-\frac{3k}{32\psi^6}-\frac{55k}{384\psi^8}-\frac{5k}{192\psi^{10}}$$

$$f)\qquad -\frac{1}{3}\log.4\qquad -\frac{k}{48\psi^2}$$

$$g)\qquad -\frac{2}{3}\log.4\qquad -\frac{k}{12\psi^2}$$

$$h)\qquad +2\qquad -\frac{k}{2\psi^2}-\frac{3k}{16\psi^4}$$

$$i)\qquad +\frac{1}{3}\pi\qquad -\frac{k}{6\psi^2}.$$

E la loro somma è

$$(m)\qquad -2\frac{1}{12}-\log.4+\frac{1}{3}\pi+\frac{16}{3}\psi^4+\frac{1}{\psi^2}\left(\frac{77}{24}k-\frac{51}{48}k\right)+\frac{1}{\psi^4}\left(\frac{145}{96}k-\frac{3}{16}k\right)$$
$$-\frac{3k}{32\psi^6}-\frac{55k}{384\psi^8}-\frac{5k}{192\psi^{10}}.$$

Perciò la somma degli altri termini che vengono in seguito fra le parentesi dell'equazione [34], è uguale a

$$(n)\qquad +4\frac{1}{6}+2\log.4-\frac{2}{3}\pi-\frac{2}{3}\psi^4+\frac{1}{\psi^2}\left(\frac{51\cdot8}{48}k-\frac{77\cdot8}{24}k\right)+\frac{1}{\psi^4}\left(\frac{32\cdot3}{16}k-\frac{32\cdot145}{96}k\right)$$
$$+\frac{128\cdot3k}{32\psi^6}+\frac{512\cdot55k}{384\psi^8}+\frac{2048\cdot5k}{192\psi^{10}}-2\log.2.$$

Unendo ora insieme le due somme (m) e (n), e loro aggiungendo inoltre i primi tre termini sotto le principali parentesi della suddetta equazione [34], avremo

$$\log.\psi \qquad -\frac{1}{3}\log.2 \qquad -\frac{14}{3}\psi^4$$

$$-2\,\frac{1}{12}-\log 4+\frac{1}{3}\pi+\frac{16}{3}\psi^4+\frac{1}{\psi^2}\left(\frac{77}{24}k-\frac{51}{48}k\right)+\frac{1}{\psi^4}\left(\frac{145}{96}k-\frac{3}{16}k\right)$$

$$-\frac{3k}{32\psi^6}-\frac{55k}{384\psi^8}-\frac{5k}{192\psi^{10}}$$

$$-4\,\frac{1}{6}+\log.4-\frac{2}{3}\pi-\frac{2}{3}\psi^4+\frac{1}{\psi^2}\left(\frac{204}{24}k-\frac{616}{24}k\right)+\frac{1}{\psi^4}\left(\frac{96}{16}k-\frac{145}{3}k\right)$$

$$+\frac{12k}{\psi^6}+\frac{220k}{3\psi^8}+\frac{160k}{3\psi^{10}};$$

e facendo le riduzioni

$$\log.\psi+2\,\frac{1}{12}-\frac{1}{3}\log.2-\frac{1}{3}\pi+\frac{1}{\psi^2}\left(\frac{281}{24}k-\frac{1283}{48}k\right)+\frac{1}{\psi^4}\left(\frac{721}{96}k-\frac{2329}{48}k\right)$$

$$+\frac{1}{\psi^6}\left(12k-\frac{3}{32}k\right)+\frac{1}{\psi^8}\left(\frac{220}{3}k-\frac{55}{384}k\right)+\frac{1}{\psi^{10}}\left(\frac{160}{3}k-\frac{5}{192}k\right).$$

Moltiplicando questa somma per la quantità a), vale a dire per

$$K\Delta'\Delta'\mu\mu h'^4,$$

e ponendo il prodotto uguale a P, avremo finalmente

[35] $$P=K\Delta'\Delta'\mu\mu h'^4\left\{\log.\psi+2\,\frac{1}{12}-\frac{1}{3}\log.2-\frac{1}{3}\pi+\frac{1}{\psi^2}\left(\frac{281}{24}k-\frac{1283}{48}k\right)\right.$$

$$+\frac{1}{\psi^4}\left(\frac{721}{96}k-\frac{2329}{48}k\right)+\frac{1}{\psi^6}\left(12k-\frac{3}{32}k\right)$$

$$\left.+\frac{1}{\psi^8}\left(\frac{220}{3}k-\frac{55}{384}k\right)+\frac{1}{\psi^{10}}\left(\frac{160}{3}k-\frac{5}{192}k\right)\right\},$$

la quale equazione esprime in un' altra maniera il valore dell' attrazione vicendevole che viene esercitata, in virtù della gravitazione, fra due uguali prismi retti a basi quadrate, congiunti per tutta l' estensione di due delle lor basi. Ha il vantaggio questa equazione di farci molto più facilmente conoscere che non la [34], sebbene in un modo soltanto approssimato, secondo qual ragione s' aumenti una siffatta attrazione, a proporzione che la ψ diviene più grande. Percioccliè il secondo membro di essa è formato di due parti, di cui l'una, che è di forma determinata, non contiene altro di variabile che la quantità $\log.\psi$,

e l'altra, la quale si trova sotto forma indeterminata e di cui non possiamo avere il valore che approssimativamente, è di una grandezza piccolissima allorquando ψ è molto grande.

Procuriamo nulladimeno di rendere più comodo l'uso di questa equazione pel caso che si abbia

$$\psi = 1\,,\ \text{ovvero}\ \psi > 1\,.$$

Cominciamo a porre in luogo di K il valore che abbiamo trovato per questa quantità al num. III, vale a dire facciamo (veggasi l'equazione [2])

$$K = 0{,}000000\ 000367\ 990\,\frac{1}{\delta'}\,.$$

Facciamo altresì, come è voluto dal sistema metrico

$$\mu = 1000\,.$$

Adottiamo l'uso de' logaritmi *tavolari*, di quelli cioè che hanno per base il 10, i quali, per distinguerli dagli iperbolici, noi indicheremo col simbolo

Log., ovvero colla semplice L.;

avremo con ciò

$$\log.\psi = 2{,}3025851 \cdot \text{Log}.\psi\,.$$

Riduciamo in numeri ordinarii la quantità costante

$$2\frac{1}{12} - \frac{1}{3}\log.2 - \frac{1}{3}\pi\,;$$

e questa diverrà

$$0{,}8050867\,.$$

Osserviamo che nell'adottata supposizione di ψ non minore di 1 si ha

$$\frac{k}{\psi^4} = \frac{k}{\psi^2}\,,\quad \frac{k}{\psi^6} = \frac{k}{\psi^2}\,,\quad \frac{k}{\psi^8} = \frac{k}{\psi^2}\,,\quad \frac{k}{\psi^{10}} = \frac{k}{\psi^2}\,,$$

e che perciò la quantità indeterminata contenuta fra le parentesi principali dell'equazione [35] si può ridurre alla forma

$$\frac{1}{\psi^2}\left(\frac{281}{24}k - \frac{1283}{48}k\right) + \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{721}{96}k - \frac{2329}{48}k\right) + \frac{1}{\psi^2}\left(12k - \frac{3}{32}k\right)$$
$$+ \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{220}{3}k - \frac{55}{384}k\right) + \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{160}{3}k - \frac{5}{192}k\right),$$

ovvero più semplicemente a quest'altra

$$\frac{k}{\psi^2}\left(\frac{281}{24} + \frac{721}{96} + 12 + \frac{220}{3} + \frac{160}{3}\right) - \frac{k}{\psi^2}\left(\frac{1283}{48} + \frac{2329}{48} + \frac{3}{32} + \frac{55}{384} + \frac{5}{192}\right)$$

la quale si riduce a

$$\frac{1}{\psi^2}\left(157\frac{85}{96}k - 75\frac{197}{384}k\right).$$

Esprimiamo finalmente in chilogrammi la forza attrattiva fra i due prismi, e chiamiamo

$$\chi$$

il numero di questi chilogrammi, supposti pesati a Parigi; avremo

$$\chi = \frac{P}{g} = \frac{P}{9{,}8088}.$$

Lasciando per un momento da banda la χ, e facendo opportuna sostituzione degli altri valori or ora trovati, l'equazione [35] prenderà la forma seguente

$$P = 0{,}000000\ 000367\ 990 \cdot \frac{1}{\delta'} \cdot \Delta'\Delta' \cdot 1000000 \cdot h'^4 \left\{ 2{,}3025851 \cdot \text{L}.\psi + 0{,}8050867 + \frac{1}{\psi^2}\left(157\frac{85}{96}k - 75\frac{197}{384}k\right) \right\},$$

da cui, ponendo

$$\chi = \frac{P}{9{,}8088}$$

si avrà

$$\chi = \frac{0{,}000000\ 000367\ 990 \cdot \Delta'\Delta' \cdot 1000000 \cdot h'^4}{9{,}8088 \cdot \delta'} \cdot \left\{ 2{,}3025851 \cdot \text{L}.\psi + 0{,}8050867 + \frac{1}{\psi^2}\left(157\frac{85}{96}k - 75\frac{197}{384}k\right) \right\},$$

e facendo le occorrenti riduzioni numeriche

$$\chi = \frac{0{,}000367\ 990 \cdot 2{,}3025851}{9{,}8088} \cdot \frac{\Delta'\Delta' h'^4}{\delta'} \left\{ \text{Log}.\psi + \frac{0{,}8050867}{2{,}3025851} + \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{157\frac{85}{96}k}{2{,}3025851} - \frac{75\frac{197}{384}k}{2{,}3025851} \right) \right\}$$

$$= 0{,}000086\ 3845 \cdot \frac{\Delta'\Delta' h'^4}{\delta'} \left\{ \text{L}.\psi + 0{,}3496447 + \frac{1}{\psi^2}(68{,}568765 \cdot k - 32{,}794888 \cdot k) \right\},$$

ovvero, semplificando i due numeri che si trovano nella parte indeterminata, scrivendo $\frac{1}{1+\alpha}$, $\frac{1}{1+\beta}$ in luogo delle due k, e conservando soltanto sei cifre decimali nel numero 0,3496447, sarà

$$[36] \qquad \chi = 0{,}000086\ 3845 \cdot \frac{\Delta'\Delta' h'^4}{\delta'} \left\{ \mathrm{Log.}\psi + 0{,}349645 + \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{69}{1+\alpha} - \frac{33}{1+6} \right) \right\},$$

nella quale equazione, per richiamarlo alla memoria,

h' esprime l'altezza di ciascuno de' due prismi,

ψ il numero delle volte che quest' altezza contiene uno de' lati delle basi,

Δ' la densità a cui ciascuno de' due prismi si ridurrebbe se, senza cangiare di massa, venisse ad acquistare il volume di un cubo co' lati uguali a h',

α, 6 due quantità di cui non si conosce il preciso valore, ma delle quali si sa soltanto ch'esse dipendono da ψ e che sono reali e positive.

Può avvenire qualche volta che in luogo di avere nel valore di χ la densità fittizia Δ', giovi avere la densità reale Δ de' due prismi che si attirano. In questo caso, indicando con h (come già si disse al principio del presente numero) la lunghezza di ciascuno dei lati delle basi, e facendo

$$\Delta' = \frac{hh\Delta}{h'h'}$$

si ha

$$[37] \qquad \chi = 0{,}000086\ 3845 \cdot \frac{\Delta^2 h^4}{\delta'} \cdot \left\{ \mathrm{Log.}\psi + 0{,}349645 + \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{69}{1+\alpha} - \frac{33}{1+6} \right) \right\}.$$

Facendoci ora, dopo tutto questo calcolo, a considerare l'equazione [36], noi possiamo scorgere che per piccola che sia la quantità

$$0{,}000086\ 3845 \cdot \frac{\Delta'\Delta' h'^4}{\delta'},$$

la ψ è capace, con un sufficiente ingrandimento, di far crescere il secondo membro fino a una grandezza qualunque. In seguito a ciò si può dimostrare che il tessuto reticolare a fili abbastanza sottili, quando non si abbia difficoltà a volerlo ammettere, può rendere l'effetto della gravitazione uguale alla tenacità che si osserva effettivamente ne' corpi; intorno alla qual dimostrazione possiamo richiamarci alla memoria quanto abbiam detto al principio del presente numero.

Supponiamo per un caso particolare, che si abbia un corpo della forma di un prisma retto a basi quadrate, dell' altezza di due centimetri, co' lati delle basi della lunghezza di un centimetro, formato di fili sottilissimi distribuiti in tre direzioni fra loro perpendicolari cioè nelle direzioni degli spigoli di esso prisma; e supponiamo che la somma de' fili disposti secondo ciascuna delle tre direzioni abbia una massa uguale al terzo della massa totale del prisma. Immaginiamo inoltre che questi fili abbiano la forma di piccoli prismi retti a basi quadrate colle facce parallele alle facce del corpo totale, e che tutti questi fili sieno di uguali sezioni trasversali e di uguale densità e collocati, quelli aventi una stessa direzione, a uguali distanze l' uno dall' altro. E perchè ogni cosa sia data, supponiamo che i fili diretti secondo la lunghezza del prisma sieno in

numero di 10000, e che la densità dell'intero prisma sia quella del ferro, vale a dire uguale a 7,800; e poniamo

$$\delta' = 5{,}01\,.$$

Concependo che il prisma totale sia distinto in due parti uguali, mediante un piano parallelo alle basi e situato ad uguale distanza dall'una e dall'altra di esse, cerchiamo di dimostrare che col dare ai già descritti fili una sufficiente sottigliezza, le due parti del prisma totale così distinto possono, in grazia della sola gravitazione, rimanere attaccate l'una all'altra con una forza uguale alla tenacità di un prisma di ferro delle suddette dimensioni.

Facciamo uso dell'equazione [36], e in questa

χ rappresenti la forza colla quale si attirano, in conseguenza della gravitazione, le due metà di uno de' piccoli prismi diviso dal piano immaginato,

h' la lunghezza di ciascuna di queste metà del piccolo prisma,

Δ' la densità che questa metà acquisterebbe se ella, senza cangiare di massa, si rarefacesse sino ad acquistare il volume di un cubo di lato h'. Noi avremo

$$h' = 0{,}01$$

$$\Delta' = \frac{1}{30000} \cdot 7{,}800\,;$$

giacchè la massa del piccolo mezzo prisma è la trentamillesima parte della massa di mezzo il prisma totale, di maniera che esso piccolo mezzo prisma acquisterebbe la densità

$$\frac{1}{30000} \cdot 7{,}8\,,$$

prendendo il volume del mezzo prisma totale. Si avrà perciò

$$\chi = 0{,}000086\ 3845 \left(\frac{7{,}8}{30000}\right)^2 \cdot \frac{(0{,}01)^4}{5{,}01} \left\{ \text{Log.}\psi + 0{,}349645 + \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{69}{1+a} - \frac{33}{1+b}\right)\right\}.$$

Ora sommando le forze, colle quali dieci mille di questi mezzi prismi n'attirano altri dieci mille situati seco loro a contatto, ossia prendendo dieci mila volte l'attrazione colla quale uno di questi mezzi prismi attrae quello che gli è unito per una base e che secolui forma un piccolo prisma intero, avremo per risultamento la quantità

$$10000\,\chi$$

ossia

$$10000 \cdot 0{,}000086\ 3845 \cdot \left(\frac{7{,}8}{30000}\right)^2 \cdot \frac{(0{,}01)^4}{5{,}01} \left\{ \text{L.}\psi + 0{,}349645 + \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{69}{1+a} - \frac{33}{1+b}\right)\right\},$$

la quale coll'aumentarsi della ψ può benissimo divenir uguale a 4470, vale a dire alla tenacità di un prisma di ferro che abbia un centimetro quadrato di sezione.

Il valore che a quest'oggetto dovrà avere ψ sarà dato dall'equazione

$$4470 = 10000 \cdot 0,000086\ 3845 \cdot \left(\frac{7,8}{30000}\right)^2 \cdot \frac{(0,01)^6}{5,01} \left\{ L.\psi + 0,349645 + \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{69}{1+\alpha} - \frac{33}{1+\beta}\right)\right\}$$

la quale, eseguendo le convenienti operazioni, si riduce alla seguente

$$\text{Log.}\psi + 0,349645 + \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{69}{1+\alpha} - \frac{33}{1+\beta}\right) = 38\ 349767\ 000000\ 000000.$$

Trasportando nel secondo membro il numero 0,349645, dal quale esso secondo membro non verrà punto alterato, e considerando che in grazia del valore enorme che dee avere la ψ onde soddisfare l'equazione, il termine approssimativo o indeterminato è estremamente piccolo, e che trasportato nel secondo membro non ne può alterar punto le cifre significative (quelle cioè che non sono supplite dagli zeri), noi avremo più semplicemente

$$\text{Log.}\psi = 38\ 349767\ 000000\ 000000$$

da cui, tenendo conto di sole sei cifre significative, e liberando ψ dal simbolo logaritmico, si ha

$$\psi = 10^{38\ 349800\ 000000\ 000000}$$

dove ψ indica il numero delle volte che il lato della sezione trasversale di un filo è contenuto nella lunghezza di un centimetro.

Quando adunque i prismi di cui parliamo abbiano quella enorme sottigliezza che abbiam trovata, potrà la somma delle attrazioni esercitate fra le due metà di ciascuno dei prismi medesimi essere uguale alla tenacità che avrebbe un prisma di ferro della sezione di un centimetro quadrato.

La densità di questi sottilissimi prismi o fili sarà facile ad aversi, se si porrà mente che indicandola con Δ si ha

$$\Delta = \Delta'\psi^2 = \frac{7,8}{30000}\psi^2,$$

e che per conseguenza

$$\text{Log.}\Delta = 2\text{Log.}\psi + \text{Log.}\frac{7,8}{30000}$$

$$= 2\text{Log.}\psi - 3,5850267.$$

Sostituendo in quest'ultimo secondo membro il valore di Log.ψ, avremo

$$\text{Log.}\Delta = 76\ 699534\ 000000\ 000000$$

da cui, tenendo conto di sole sei cifre significative,

$$\Delta = 10^{76\ 699500\ 000000\ 000000}$$

ove il secondo membro è un numero sì grande, che per iscriverlo secondo il modo aritmetico ordinario abbisognerebbe di tante cifre da riempire tutta la superficie del globo!

Noi potremmo adunque col mezzo di questa densità enorme de' fili, e di questa inconcepibile loro sottigliezza ottenere dalla gravitazione un effetto uguale alla tenacità. Anzi avremmo qualche cosa di più; perciocchè converrebbe aggiungere gli effetti delle attrazioni che ciascuno de' mezzi fili longitudinali esercita sui mezzi fili pure longitudinali i quali fiancheggino l'altra sua metà nell'altro mezzo prisma totale; oltre a che vi sarebbero gli effetti delle attrazioni esercitate dall' un mezzo prisma verso l' altro in grazia della presenza de' fili trasversali; le quali cose aumenterebbero di una piccola frazione di grammo i 4470 chilogrammi che risultano dall'azione principale.

Diamo qualche maggiore generalità alla nostra conclusione, ritenendo però che si tratti ancora di un prisma delle medesime dimensioni come precedentemente, formato di sottilissimi fili prismatici simili ai precedenti, dal numero in fuori, e disposti nella medesima maniera. Chiamiamo perciò

n il numero di que' fili che hanno una direzione longitudinale,

δ la densità del corpo totale,

T la sua tenacità;

per determinare ψ noi avremo

$$\Delta' = \frac{\delta}{3n}$$

$$T = n\mathcal{X} = n \cdot 0{,}000086\ 3845 \left(\frac{\delta}{3n}\right)^2 \frac{h'^4}{\delta'} \left\{ \text{Log.}\psi + 0{,}349645 + \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{69}{1+\alpha} - \frac{33}{1+\beta}\right) \right\}$$

da cui

$$\text{Log.}\psi + 0{,}349645 + \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{69}{1+\alpha} - \frac{33}{1+\beta}\right) = \frac{9 \cdot T n \delta'}{0{,}000086\ 3845 \cdot \delta^2 h'^4};$$

e siccome per ipotesi si ha $h' = 0{,}01$, così sarà

$$\text{Log.}\psi + 0{,}349645 + \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{69}{1+\alpha} - \frac{33}{1+\beta}\right) = \frac{9 \cdot 100\ 000000 \cdot T n \delta'}{0{,}000086\ 3845 \cdot \delta^2},$$

ovvero più semplicemente, attesa l'enorme grandezza di ψ,

$$\text{Log.}\psi = \frac{900\ 000000\ T n \delta'}{0{,}000086\ 3845\, \delta^2}$$

$$= \frac{9\ 000000\ 000000\, T n \delta'}{0{,}863845\, \delta^2},$$

equazione che servirà a far conoscere la grossezza de' fili prismatici.

Se ne troverà la densità coll' osservare che il volume della somma di quelli che sono contenuti in un centimetro cubico è

$$3n \cdot h' \left(\frac{h'}{\psi}\right)^2,$$

laddove il volume del centimetro cubico è

$$(h')^3\,;$$

la densità perciò della loro materia sarà uguale a

$$\frac{\partial (h')^3}{3n\cdot h'\left(\frac{h'}{\psi}\right)^2}$$

ovvero a

$$\frac{\partial\psi^2}{3n}\,;$$

e indicandola con Δ, si avrà

$$\text{Log.}\Delta = 2\,\text{Log.}\psi + \text{Log.}\partial - \text{Log.}3n$$

$$= \frac{18\ 000000\ 000000\,Tn\partial'}{0,863845\,\partial^2} + \text{Log.}\partial - \text{Log.}3n\,,$$

dove il Logaritmo negativo è estremamente piccolo in confronto della somma degli altri due termini dell'ultimo secondo membro; e se la n aumenta, questo logaritmo negativo si va bensì ingrandendo, ma però in una ragione di gran lunga minore che non fa il primo termine del suddetto secondo membro.

Segue adunque da quanto abbiam detto che col mezzo delle sole leggi della Meccanica, e lasciata da banda ogni considerazione fisica d'altro genere, non è possibile il dimostrare che assolutamente l'attrazione universale non sia la causa della coesione.

Osservazione. Noi veggiamo ora la ragione perchè in alcune delle ipotesi esaminate nel secondo articolo non potè la nostra tesi, l'impossibilità cioè della conciliazione delle due attrazioni, venir dimostrata se non nel supposto che la materia occupasse una parte sensibile del volume totale del corpo (vedi al num. XI). Una tale ragione si è, che supponendo estremamente piccolo lo spazio effettivamente occupato dalla materia di un corpo, poteva questa materia avere una tessitura reticolare, la quale considerata soltanto dal lato della Meccanica poteva bastare per questa conciliazione.

Dicasi lo stesso (vedi al num. X nell'osservazione) del caso nel quale ammettendosi l'ipotesi di Laplace si supponesse altresì che la distanza vicendevole delle molecole variasse estremamente da un luogo ad un altro. La distribuzione di queste molecole potrebbe accostarsi alla struttura reticolare, essendo alcune di esse sì vicine le une alle altre da formare in certa guisa i fili, ed altre così lontane da lasciare de' vani analoghi agli intervalli fra i fili medesimi; di maniera che quest'ipotesi in cotal modo aggiustata potrebbe avere i medesimi vantaggi di quella del tessuto reticolare. Ma ella sarebbe altresì sottoposta alle medesime difficoltà che si oppongono a quest'ultima e le quali noi passiamo ad esporre.

XIV.

Quantunque guardando la cosa dal semplice lato della Meccanica non si riesca a dimostrare, come testè s' è veduto, essere assolutamente impossibile il ridurre la coesione de' corpi agli effetti dell'attrazione universale, si viene nulladimeno anche co' soli ragionamenti meccanici a scoprire una facilissima obbiezione contro questa riduzione; e questa obbiezione si è che per poter attribuire la coesion de' corpi alla gravitazione sarebbe d'uopo ammettere ne' corpi stessi un' inconcepibile rarezza di tessuto ossia piccolezza di spazio occupato effettivamente dalla materia costituente essi corpi, e una inconcepibile densità all' incontro negli spazii pieni.

Per tentare di formarci una debole idea di questa densità, considerandola di quella grandezza che ci è risultata nell' esempio numerico precedente, immaginiamoci uno spazio sferico di un raggio uguale alla distanza delle più lontane stelle che siensi scoperte col telescopio, raggio che la luce non possa percorrere che nella durata di qualche migliajo d' anni; concepiamo questo spazio tutto riempiuto di una materia molto densa quale sarebbe quella del platino; e immaginiamo che tutta questa materia venga a condensarsi in uno spazio uguale al volume del più minuto corpicello che sia visibile col microscopio, e che quindi con una nuova condensazione venga questa materia a ridursi a un volume che sia tante volte più piccolo di quest'atomo, quanto lo è quest'atomo del suddetto spazio sferico: noi saremo ancora con tutto questo assai lontani dall' aver raggiunta la densità che si dee attribuire alla materia per far dipendere la tenacità dalla gravitazione, e non si potrebbe arrivarvi che con un numero enorme di siffatti successivi gradi di condensazione.

Ora questa inconcepibile densità, quantunque non sia assolutamente impossibile, io credo che troverà molta difficoltà ad essere ammessa dai Fisici siccome effettivamente esistente nello stato reale delle cose. Nessun fenomeno della natura ci forza ad adottarla, e sarebbe poco saggio pensiero il voler ammettere senza una fortissima necessità una idea sì strana e sì difficile a concepirsi sulla costituzione della materia.

Chi però intendesse sostenere la contraria tesi, potrebbe notare che negli esempii precedenti noi non abbiamo supposto ne' fili del tessuto reticolare la forma più vantaggiosa agli effetti dell' attrazione, la qual forma sarebbe la cilindrica; che lo stesso può dubitarsi essere della loro disposizione, potendo forse esservi delle disposizioni per questi fili le quali sieno molto più favorevoli all'attrazione che non quella secondo tre direzioni fra loro perpendicolari. Oltre a ciò si potrebbe esigere che non si trascurassero le attrazioni secondarie le quali hanno luogo fra le parti che non sono ad assoluto contatto, quali sarebbero state nel precedente esempio numerico le attrazioni fra i fili trasversali dell' una metà del prisma totale e i fili trasversali dell' altra metà. Si potrebbe perciò dubitare che la sottigliezza necessaria ai fili potesse non essere sì enorme come noi abbiamo veduto.

Io non negherò che queste riflessioni non sieno atte al primo aspetto a spargere qualche dubbio sulla questione; io però spero di poterlo dissipare, e di dimostrare che in tutte le disposizioni possibili della materia è sempre necessario ammettere ne' corpi una enorme rarità di tessuto e una enorme densità della materia, se si vuole che la coesione possa dipendere dalla gravitazione.

Si supponga pertanto che si abbia un corpo di una tessitura reticolare, i cui fili sieno disposti nel modo che più piaccia; e se non si stima abbastanza efficace la disposizione a fili, si prenda quella a lamine o quell'altra qualsivoglia che si giudichi più acconcia; giacchè la dimostrazione che intendo di dare abbraccia tutte le diverse disposizioni possibili della materia. Si supponga anche non uniforme, se così aggrada, la densità della materia che occupa gli spazii pieni del corpo, ma ch'ella varii dall'un luogo all'altro nel modo che potrà sembrare più favorevole all'attrazione.

Si immagini che questo corpo sia stato tagliato alla sua superficie in maniera da prendere la forma di un prisma retto a basi quadrate, e lo si concepisca distinto in due parti per mezzo di un piano parallelo alle basi, condotto a distanze uguali da queste basi medesime. E si chiami

C questo corpo ridotto alla suddetta forma prismatica,

A, B le due parti di esso che vengono distinte l'una dall'altra per mezzo dell'immaginato piano,

h la lunghezza de' lati delle basi del corpo medesimo,

$2h'$ la sua altezza, che noi supponiamo maggiore di $2h$,

δ la sua densità, vale a dire la media densità che si ottiene paragonando la sua massa col suo volume totale,

$(1+\varepsilon)$ il numero delle volte che il suo total volume contiene lo spazio occupato dalla semplice materia; e qui, se questa materia non è dappertutto della medesima densità, s'intende che lo spazio di essa sia quello ch'essa occuperebbe venendo tutta ridotta alla più grande densità che ella abbia nel corpo; da ciò segue che

$(1+\varepsilon)\delta$ sarà la densità di questa materia negli spazii pieni; e se questa densità che ha luogo negli spazii pieni non è uniforme, la quantità $(1+\varepsilon)\delta$ esprimerà la maggiore densità che abbia luogo nel corpo. Sia

T la tenacità del corpo mostrata dalla sperienza, supposta espressa in chilogrammi,

V la forza colla quale le due parti A e B si attraggono vicendevolmente in virtù della gravitazione secondo la direzione degli spigoli longitudinali, nel medesimo modo come avevamo convenuto al num. IX, supposta anche questa forza espressa in chilogrammi.

Ciò posto concepiamo che questo corpo C, conservando la sua altezza $2h'$, si restringa nel verso laterale fino a perdere tutti gli interstizii voti, ed anche, nel caso di una densità non uniforme, sino a che tutta la materia abbia acquistata la più grande densità $(1+\varepsilon)\delta$; ma però di tal maniera che in questo restringimento la quantità di materia compresa fra due sezioni trasversali vicine

si mantenga frammezzo a queste due sezioni medesime, senza uscirne veruna porzione dallo spazio compreso fra i loro piani. Concepiamo inoltre che tutte le nuove sezioni trasversali (quelle che si ottengono col tagliare il solido, dopo il supposto restringimento del prisma primitivo), conservando le loro rispettive estensioni superficiali, e tenendosi ciascuna nel suo piano, si cangino in altrettanti cerchii co' centri in un medesimo asse perpendicolare ai loro piani. Chiamiamo

C' il corpo totale così cangiato,

A', B' le due parti che nascono rispettivamente da A e da B mediante il cangiamento indicato,

V' la forza colla quale si attraggono vicendevolmente queste due parti A', B', la quale opererà esattamente in direzione perpendicolare ai piani dei cerchii.

Egli è evidente che la densità di C' sarà $(1+\varepsilon)\delta$, e l'altezza $2h'$. Per quello che riguarda la forma, noi supporremo per ora, all'oggetto di dividere la difficoltà, che questo corpo differisca assai poco da un cilindro retto. Ammetteremo cioè che le irregolarità le quali possono aver luogo nella distribuzione della materia del corpo C, non si riscontrino che considerando degli spazii piccolissimi e paragonando fra loro le diverse parti di ciascuno di tali spazii, considerando p. e. la struttura delle singole molecole quando alcuno voglia riguardare il corpo siccome formato di molecole distinte; ma considerando esso corpo in totale e stando a quel che può apparire ai sensi, ammetteremo per ora che il corpo sembri omogeneo o di densità uniforme; e limiteremo così presentemente alle sole parti minime de'corpi la libertà di poterne noi immaginare il tessuto come più piaccia: e oltre a ciò ammetteremo che al restringersi delle diverse sezioni trasversali, succeda una tale compensazione fra le irregolarità della distribuzione della materia, che queste sezioni vengano a prendere delle estensioni superficiali pressochè uguali, e il corpo C' differisca assai poco, come abbiam detto, da un cilindro retto. Lasceremo pel numero seguente il caso generalissimo che abbia luogo qualsivoglia altra più grande irregolarità nella distribuzione della materia del corpo C, e che il corpo C' differisca comunque da un cilindro retto.

Concepiamo in fine che al corpo C' venga aggiunta all'intorno una quantità di materia della stessa sua densità, in maniera da presentare la figura di un prisma retto a basi quadrate, avente queste basi ne' piani medesimi delle basi del corpo C', e le facce laterali in contatto colla maggiore sezione trasversale dello stesso corpo C'. Chiamiamo

C'' questo prisma,

D la lunghezza dei lati delle sue basi,

A'', B'' le due parti che ne nascono dividendolo con un piano parallelo alle due basi e da esse equidistante,

V'' la forza colla quale esse due parti si attraggono vicendevolmente.

Noi cercheremo successivamente le relazioni fra V e V', fra V' e V'', e fra V'' e le dimensioni e la densità di C'', e procureremo quindi di trovare

quale debba essere questa densità, affinchè si abbia

$$V = T.$$

Osserveremo prima di tutto che

$$V' > V.$$

Se in fatti noi concepiamo che tanto le due parti A e B, quanto le due A', B' sieno divise in un grandissimo numero di lamine parallele alle basi, tutte di una medesima ma piccolissima altezza, egli è facile a vedersi che l'attrazione esercitata da una qualsivoglia delle lamine di A' verso una qualsivoglia delle lamine di B', sarà maggiore dell'attrazione esercitata fra le due corrispondenti lamine di A e di B. Perciocchè nelle due prime la materia ha una disposizione più favorevole all'attrazione che non nelle seconde, qualunque disposizione possa ella avere in queste ultime (1). Ora dall'essere tutte le attrazioni particolari fra le lamine di A' e quelle di B' maggiori delle attrazioni corrispondenti fra le lamine di A e quelle di B, ne risulta che l'attrazione totale fra A', B' è essa pure più grande di quella fra A e B, e che per conseguenza si ha

$$V' > V.$$

Si ha poi evidentemente

$$V'' > V';$$

e però anche

$$V'' > V,$$

ossia

$$V'' = (1 + \gamma) V,$$

essendo γ una quantità positiva.

Posto questo, siccome le densità di C e di C' stanno fra loro nella ragione di

$$1 : (1 + \varepsilon),$$

e le masse di essi due corpi sono uguali, così le sezioni dell'uno staranno alle sezioni dell'altro prossimamente come

$$(1 + \varepsilon) : 1,$$

e per conseguenza quelle di C' avranno un'area presso a poco uguale a

$$\frac{1}{1 + \varepsilon} hh;$$

alcune saranno qualche poco più piccole di questa quantità, ed alcune qualche

(1) Quantunque sia questa una verità per sè stessa evidente, ne ho nulladimeno cercata una rigorosa dimostrazione, la quale a cagione della troppa lunghezza a cui mi è cresciuta l'ho esposta a parte nella Nota collocata in fine della Memoria, ove questa dimostrazione è compresa nei paragrafi dal 1.° al 12.° inclusivamente.

poco più grandi, e la maggiore di tutte potrà essere espressa da

$$\frac{(1+\lambda)}{1+\varepsilon}\cdot hh\,,$$

essendo λ una quantità positiva generalmente assai piccola.

Siccome poi il diametro di questa maggior sezione è uguale a ciascuno de' lati delle basi del prisma C'', lati di cui noi abbiamo chiamato D la lunghezza, così sarà

$$\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2=\frac{1+\lambda}{1+\varepsilon}\cdot hh\,,$$

d'onde si avrà

$$D^2=\frac{4h^2}{\pi}\cdot\frac{1+\lambda}{1+\varepsilon}$$

e

$$D=\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{1+\lambda}}{\sqrt{1+\varepsilon}}\,.$$

Essendo ora nelle due metà A'', B'' del prisma C''

h' la lunghezza,

D uno qualunque de' lati delle basi,

$(1+\varepsilon)\delta$ la densità,

sarà la loro attrazione vicendevole (equazione [37]) data dall'equazione

$$V''=0{,}000086\;3845\cdot\frac{(1+\varepsilon)^2\delta^2D^4}{\delta'}\cdot\left\{\mathrm{L}.\psi+0{,}349645+\frac{1}{\psi^2}\left(\frac{69}{1+\alpha}-\frac{33}{1+6}\right)\right\},$$

essendo ψ uguale a $\dfrac{h'}{D}$; ovvero da

$$V''=0{,}000086\;3845\cdot\frac{(1+\varepsilon)^2\delta^2\cdot16\cdot h^4(1+\lambda)^2}{\delta'\pi^2(1+\varepsilon)^2}\cdot\left\{\mathrm{L}.\psi+0{,}349645+\frac{1}{\psi^2}\left(\frac{69}{1+\alpha}-\frac{33}{1+6}\right)\right\}$$

$$=0{,}000086\;3845\cdot\frac{16\cdot h^4\cdot\delta^2\cdot(1+\lambda)^2}{\pi^2\delta'}\cdot\left\{\mathrm{L}.\psi+0{,}349645+\frac{1}{\psi^2}\left(\frac{69}{1+\alpha}-\frac{33}{1+6}\right)\right\},$$

e siccome

$$V=\frac{1}{1+\gamma}V'',$$

così si avrà

$$V=0{,}000086\;3845\cdot\frac{16\delta^2h^4}{\pi^2\delta'}\cdot\frac{(1+\lambda)^2}{(1+\gamma)}\cdot\left\{\mathrm{L}.\psi+0{,}349645+\frac{1}{\psi^2}\left(\frac{69}{1+\alpha}-\frac{33}{1+6}\right)\right\}.$$

Per conseguenza, onde si abbia

$$V=T,$$

dovrà verificarsi l'equazione

$$T=0{,}000086\;3845\cdot\frac{16\delta^2h^4}{\pi^2\delta'}\cdot\frac{(1+\lambda)^2}{(1+\gamma)}\cdot\left\{\mathrm{L}.\psi+0{,}349645+\frac{1}{\psi^2}\left(\frac{69}{1+\alpha}-\frac{33}{1+6}\right)\right\}.$$

d'onde si trae

$$[38]\quad L.\psi + 0,349645 + \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{69}{1+\alpha} - \frac{33}{1+\beta}\right) = \frac{T\delta'\pi^2}{0,000086\ 3845\cdot 16\cdot\delta^2 h^4}\cdot\frac{1+\gamma}{(1+\lambda)^2},$$

dalla quale equazione, dando de' valori particolari a δ e ad h, supposto che quelli di h sieno piccoli, e che quelli di δ sieno quali convengono ai corpi naturali che noi conosciamo, si ricavano per ψ dei valori enormi.

Sia per un esempio

$$h = 0,001,$$

abbia cioè il prisma primitivamente considerato la sezione di un millimetro quadrato; inoltre sia

$$T = 44,7,$$

che è il valore di T corrispondente a un prisma di ferro d'una siffatta sezione,

$$\delta = 7,8$$

$$\delta' = 5,01$$

$$h' = 1,000.$$

Avremo

$$[39]\quad L.\psi + 0,349645 + \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{69}{1+\alpha} - \frac{33}{1+\beta}\right) = \frac{44,7\cdot 5,01\cdot\pi^2\cdot 1000^4}{0,000086\ 3845\cdot 16\cdot 7,8\cdot 7,8}\cdot\frac{1+\gamma}{(1+\lambda)^2};$$

e siccome, per ciò che si è detto poco sopra, la quantità λ si ritiene ora come assai piccola, mentre la γ è sempre di una grandezza sensibile, e siccome perciò alla quantità

$$\frac{(1+\gamma)}{(1+\lambda)^2}$$

si può dare la forma

$$1+\xi,$$

essendo ξ una quantità positiva, così, eseguendo le moltiplicazioni indicate, sarà

$$L.\psi + 0,349645 + \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{69}{1+\alpha} - \frac{33}{1+\beta}\right) = 26284\ 500000\ 000000\cdot(1+\xi);$$

e trasportando al secondo membro la quantità

$$0,349645 + \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{69}{1+\alpha} - \frac{33}{1+\beta}\right);$$

e quindi trascurandola, siccome quella che è piccolissima a paragone della quantità

$$26284\ 500000\ 000000\ (1+\xi),$$

dove introdotta non potrebbe alterare le cifre significative del coefficiente numerico ma solo quelle supplite dagli zeri, e sostituendo in fine per semplicità uno zero all'ultima delle suddette cifre significative, avremo

$$\text{Log.}\psi = 26284\ 000000\ 000000\ (1+\xi),$$

e $$\psi = 10^{26284\ 000000\ 000000\ (1+\xi)},$$

dove ψ esprime, come si detto, il numero delle volte che il lato D della sezione trasversale del prisma C'' trovasi contenuta nella metà h' della lunghezza del prisma medesimo, la quale h' nel nostro esempio viene supposta di un metro.

Da ciò si può riconoscere quanto sarebbe enorme il numero delle volte di che converrebbe poter impicciolire le sezioni trasversali del prisma primitivo C, e quanto grande dovrebbe essere la densità negli spazii occupati dalla sua materia, affinchè la coesione potesse essere una conseguenza della gravitazione.

Potrebbe però avvenire che le sezioni trasversali del corpo C' differissero l'una dall'altra assai più di quanto abbiamo supposto, e che perciò la più grande di esse superasse per un gran numero di volte quella di grandezza media, vale a dire che si avesse assai grande la quantità $(1+\lambda)$. In questo caso non si scorgerebbe più chiaramente essere

$$\frac{1+\gamma}{(1+\lambda)^2}$$

maggiore di 1. Quando nulladimeno questo valore di $(1+\lambda)$ non sia grandissimo, quando esso non ecceda, per esempio, il nnmero 50 ovvero il 100, noi possiamo ancora servirci della dimostrazione precedente; dalla quale, pel caso che si voglia far dipendere la coesione dalla gravitazione, possiamo ancora trarre degli enormi risultamenti per riguardo alla rarità del tessuto de' corpi e alla densità della loro materia.

E in fatti quantunque nel secondo membro dell'equazione [38] la quantità

$$\frac{T\partial'\pi^2}{0{,}000086\ 3845\cdot 16\cdot\partial^2 h^4}$$

venga divisa per 2500 ovvero per 10000 vale a dire per $(1+\lambda)^2$, con tutto ciò, semprechè si diano ad h de' valori piccoli, il quoziente che nascerà sarà ancora grandissimo, e si potrà ancora conchiudere che la quantità ψ dovrà essere espres-

sa da una lunghissima serie di cifre numeriche. Se, per un esempio, si avesse

$$(1+\lambda)=100,$$

il secondo membro dell'equazione [39] sarebbe

$$\frac{44,7\cdot 5,01\cdot 1000^4\cdot \pi^2}{16\cdot 7,8\cdot 7,8\cdot 0,000086\ 3845\cdot 10000}\cdot(1+\gamma),$$

ovvero

$$2\ 628450\ 000000\ (1+\gamma),$$

d'onde si otterrebbe

$$\psi=10^{2\ 628450\ 000000\ (1+\gamma)}.$$

XV.

Nel caso però che le sezioni trasversali del corpo C' avessero delle differenze molto più grandi, e che per conseguenza la $(1+\lambda)$ avesse de' valori grandissimi, allora la precedente dimostrazione non sarebbe più vantaggiosa, non sarebbe più atta cioè a farci conoscere le strane conseguenze a cui conduce l'ipotesi che combattiamo. In questo caso conviene immaginare qualche trasformazione di più; convien togliere dapprima queste grandi differenze e rendere più uniforme la grossezza del corpo C'; però mediante tali movimenti della sua materia che l'attrazione vicendevole delle due parti nelle quali esso si suppone distinto non venga minimamente a diminuire; a quest'uopo non venga a diminuire, perchè dal trovar piccola tale attrazione in sul fine si possa conchiudere ch'ella era piccola fin da principio. E qui mi permetterò di pregar d'attenzione il leggitore, stantechè la dimostrazione che sto per esporre io la stimo la più difficile e insieme la più importante di questo mio lavoro. Il pregherò eziandio di sofferenza al vedere che io il conduco per strade difficili ad esaminare delle ipotesi affatto stravaganti sulla costituzione de'corpi, e le quali non sono per niun modo probabili anche prescindendo dagli enormi risultamenti a cui esse guidano per riguardo alla densità della materia ed alla rarezza del tessuto de'corpi. Io stimo necessario il considerarle con diligenza, per togliere radicalmente il dubbio che secondo qualche maniera di concepir formati i corpi, si possa senza incontrar gravi difficoltà dar buona ragione degli effetti molecolari mediante la sola gravitazione. Perocchè se questo dubbio sorgesse in alcuno per riguardo a qualche ipotesi anche bizzarra, gli farebbe al certo un possente invito ad adottarla la speranza di poter ridurre le due attrazioni ad una sola, e poco effetto farebbero su lui le ragioni contrarie, delle quali, come il leggitore si accorgerà, è alquanto difficile la compiuta esposizione. Anche l'ipotesi di Laplace si sarà presentata in sulle prime al suo celebre autore sotto l'aspetto di un'opinione poco naturale; pure

l'averla stimata utile alla conciliazione delle due attrazioni e il non averne veduto chiare le difficoltà fecero sì ch'egli l'adottasse, ch'egli credesse vedere argomenti a di lei favore in altri fatti della natura, e che molti valenti Fisici il seguissero.

Concepiamo adunque, ripigliando da capo la dimostrazione, che si abbia un prisma C, nel quale, secondo che abbiamo già esposto nel numero precedente, la materia sia distribuita in una maniera qualunque; e poniamo che le indicazioni h, ϑ, $(1+\varepsilon)$, T abbiano lo stesso significato come nel numero precedente medesimo, e che $2h'$ sia ancora la lunghezza totale del prisma, la quale $2h'$ supporremo qui pure maggiore di $2h$.

Supponiamo che questo corpo C sia stato trasformato in un altro corpo C' mediante i medesimi cangiamenti che abbiamo già descritti nel precedente numero, vale a dire mediante il ristringimento nel verso laterale, e la riduzione delle sezioni trasversali ad altrettanti cerchii. E ammettiamo che questo corpo C' presenti de' rigonfiamenti e degli strozzamenti, le cui sezioni trasversali differiscano fra loro secondo rapporti anche grandissimi.

Noi cominceremo ad immaginare che tutto all'intorno del corpo C' venga aggiunta una certa quantità di materia della stessa densità di esso, la quale il riduca alla forma d'un aggregato di un gran numero di piccoli cilindri retti, collocati colle basi a vicendevole contatto, disposti intorno al medesimo asse del corpo C', con delle larghezze o sezioni trasversali che differiscano fra loro come è richiesto dalla forma del corpo C', essendo esse maggiori ove il corpo C' è più largo e viceversa, e con altezze o uguali fra loro o disuguali (il che non importa), ma tutte piccolissime, affinchè la materia da aggiungersi sia in piccola quantità (Si può avere un'idea di cotali cilindri dalla fig. 8, la quale rappresenta con punteggiamenti i cilindri medesimi segati mediante un piano passante pel loro asse, con insieme la sezione del corpo C' fatta dallo stesso piano). Per conseguire il quale intento si distinguerà il corpo C' in tante lamine per mezzo di piani paralleli alle basi, e si ridurrà ciascuna di queste lamine, coll'aggiungervi all'intorno una sufficiente quantità di materia, alla forma di un cilindro ad essa circoscritto. Ed è chiaro dalla geometria che prendendo questi cilindri abbastanza corti, la quantità totale di materia che converrà aggiungere potrà essere piccola quanto piaccia: egli è un problema in fatti non difficile quello di circoscrivere a un emisfero o ad un cono una serie di cilindri retti la cui somma differisca in solidità da questa sfera o da questo cono meno di una assegnata quantità qualunque; e la stessa operazione si può facilmente eseguire rispetto a qualsivoglia altro solido di rivoluzione, quantunque abbia de' numerosi rigonfiamenti e restringimenti. A noi però basterà che la materia da aggiungere al corpo C' non arrivi ad uguagliare in massa il terzo del corpo C' medesimo. Supporremo che in seguito vengano paragonate fra loro tutte le differenti larghezze de' piccoli cilindri, di maniera che, quando se ne presenti il caso, si possa scegliere fra essi cilindri quello o quelli che hanno la *prima* o più grande larghezza, quelli della *seconda* larghezza, que' della *terza*, della *quarta*, ecc.

E chiameremo

C'' il corpo risultante dall'unione di tutti questi piccoli cilindri.

Concepiamo dopo ciò che intorno all'asse del corpo C'' sia descritta una superficie cilindrica, che chiameremo

$$S,$$

il cui diametro sia doppio del diametro medio del corpo C', doppio cioè del diametro di un cilindro uguale a C' in lunghezza e in solidità (veggasi la fig. 8 suddetta). La lunghezza di questa superficie si prenderà poi o uguale a quella di questo corpo C' o anche alcun poco maggiore, se ciò sarà necessario per l'uso a cui essa superficie dee servire; presentemente questa lunghezza noi la lasceremo indeterminata. Egli è chiaro che questa superficie, fra due sezioni perpendicolari al di lei asse e collocate alla distanza $2h'$ l'una dall'altra, potrebbe contenere quattro volte il volume del corpo C', e più di tre volte quello del corpo C''. Contuttociò, attese le notabili differenze esistenti fra le diverse sezioni trasversali del corpo C', differenze che noi supponiamo poter essere anche grandissime, potrà avvenire che molti de' cilindri costituenti il corpo C'' superino in larghezza questa superficie od avanzino fuori di essa. E a considerare le cose davvicino, nel caso che queste differenze fra le sezioni suddette sieno appunto grandissime, vi saranno nella lunghezza del corpo C'' parecchi aggregati di cilindri o di dischi i quali sorpasseranno la superficie cilindrica S di cui parliamo; fra l'uno e l'altro di questi aggregati vi sarà per avventura qualche disco che avrà la superficie laterale o convessa a livello con essa superficie S; ma di necessità vi saranno eziandio molti intervalli o parti di questa superficie ne' quali essa racchiuderà degli spazii vani, corrispondendo ciascuno di questi intervalli ad uno o a parecchi contigui piccoli cilindri aventi i diametri più piccoli del diametro di una tale superficie S. L'oggetto della seguente trasformazione si è di far rientrare le parti sporgenti di questi piccoli cilindri, ne' luoghi appunto ove vi hanno de' vani.

Scegliamo a quest'uopo uno de' piccoli cilindri della *prima* o maggiore larghezza, e determiniamo la lunghezza

$$L$$

la quale esso prenderebbe, se conservando il medesimo volume e la forma cilindrica, si restringesse fino ad avere per diametro il diametro della suddetta superficie cilindrica S. Supponiamo quindi che perpendicolarmente all'asse di questa superficie cilindrica sieno condotti due piani, l'uno dall'una banda del piccolo cilindro scelto e l'altro dalla banda opposta, e i quali sieno per modo collocati, che:

1.° Prendendo le lunghezze di tutti gli intervalli frapposti ad essi corrispondentemente ai quali la superficie cilindrica S ha dei vani, e prendendo altresì le lunghezze delle parti di intervallo che si potrebbero trovare comprese fra i medesimi due piani nel caso che da questi piani venisse segato attraverso al-

cuno di siffatti intervalli, e aggiungendo a queste lunghezze la piccola lunghezza del cilindro scelto, sia la somma di tutte queste lunghezze uguale a L;

2.° Determinando il comun centro di massa o di *gravità* di tanti cilindri tutti della medesima densità e le cui superficie laterali o convesse consistano nelle suddette separate parti della superficie cilindrica S concorrenti a formare la lunghezza L, compresa eziandio in queste parti quella porzione della superficie S la quale si trova entro il piccolo cilindro scelto, e nel supposto che queste parti di superficie cilindrica rimangano ai loro luoghi di prima anche quando servono di superficie laterali ai nuovi cilindri che ora immaginiamo, coincida questo centro di massa col centro di massa o di figura del piccolo cilindro scelto.

Di queste due condizioni la prima può agevolmente venir soddisfatta, nè a persuadersene si ha d'uopo di dimostrazione. E il può facilmente anche la seconda; giacchè se per una qualche posizione de' piani seganti, il centro di massa de' cilindri in questione si troverà fuori del luogo che noi desideriamo, potrà esso venirvi rimesso coll' avvicinare convenientemente a questo luogo quello de' due piani seganti che si trova dalla banda verso cui troppo s' avanza il suddetto centro di massa, e col trasportare quindi più lontano l'altro piano segante dalla nuova posizione data al primo. E siccome potrebbe avvenire che non bastasse all'uopo quella parte della superficie cilindrica S, la quale si trova compresa fra i piani delle basi del corpo C', così si potrà in questo caso chiamare in sussidio anche una conveniente parte della medesima superficie S presa al di fuori delle basi suddette, trattando questa nuova parte come uno degli intervalli ove essa superficie S racchiude degli spazii vani.

Determinati questi due piani seganti, e determinati altresì tutti gli intervalli e le porzioni di intervallo che si comprendono fra questi piani e ove la superficie cilindrica racchiude de' voti, immaginiamo:

1.° Che il piccolo cilindro scelto, rimanendo col suo centro di massa al proprio posto, e conservando la sua medesima larghezza e la sua medesima massa, si estenda secondo l' asse e si rarefaccia fino ad acquistare la lunghezza L;

2.° Che il cilindro risultante da questo allungamento si divida in diverse parti, delle quali una, avente la stessa lunghezza del piccolo cilindro scelto prima che si allungasse, venga collocata nel luogo precedentemente occupato da questo medesimo piccolo cilindro; una seconda avente la lunghezza di uno di quegli intervalli, esistenti fra i due piani seganti, ne' quali la superficie S comprende de' vani, sia trasportata al luogo di questo intervallo in modo da occuparne esattamente la lunghezza; una terza di dette parti, della lunghezza di un altro di quegli intervalli, venga trasportata in un modo somigliante nel luogo di questo; e così dicasi delle altre parti in cui si verrà a dividere il cilindretto allungato; colla quale disposizione le diverse parti di questo cilindro verranno ad occupare tutti gli intervalli e le porzioni di intervallo che si erano determinate, aggiuntavi la posizione primitiva del piccolo cilindro scelto, senza che nulla avanzi della massa di questo cilindro, senza che nulla avanzi di que-

gli intervalli e di quelle porzioni di intervallo formanti la lunghezza L, e senza che punto si cangi il centro di massa della materia che componeva il suddetto piccolo cilindro scelto. Immaginiamo;

3.° Che in seguito ciascuna di queste parti separate del cilindro allungato si restringa nel verso laterale, in guisa da formare intorno al medesimo asse un cilindro della stessa di lei lunghezza ma di un diametro uguale a quello della superficie S, il quale cilindro perciò si trovi esattamente contenuto sotto la porzione che gli corrisponde di essa superficie S medesima, occupandone tutta la larghezza; senza aver riguardo in questo restringimento alla materia preesistente sotto questa superficie S, la quale materia preesistente si suppone rimanere immobile in tutte queste operazioni e di allungamento del cilindretto scelto, e di separazione e di restringimento della sua massa; di maniera che ne' luoghi ove si avevano de' vani sotto essa superficie, in questi luoghi vani dopo il restringimento la densità sia $(1+\varepsilon)\delta$, e ne' luoghi in vece ove vi aveva di questa materia, la densità sia doppia cioè $2(1+\varepsilon)\delta$.

Terminate queste operazioni pel primo piccolo cilindro, prendiamone un altro che sia similmente, se ve n'ha ancora, della prima o maggiore larghezza; e fra gli intervalli che dopo le precedenti operazioni rimangono ancora con dei vani sotto la superficie cilindrica S, scegliamone alcuni dalle due bande del nuovo piccolo cilindro, i quali sieno compresi come precedentemente fra due piani condotti perpendicolarmente all'asse della superficie S, l'uno dall'una banda del nuovo piccolo cilindro e l'altro dall'altra, operando in modo che la somma delle lunghezze di questi intervalli scelti e il comun centro di massa de' cilindri che vi si possono comprendere abbiano quelle stesse condizioni rispetto al nuovo piccolo cilindro, le quali avevano luogo precedentemente pel primo piccolo cilindro; e colle medesime operazioni facciamo che quella parte di materia del nuovo piccolo cilindro la quale eccede la superficie cilindrica S passi al di sotto della medesima negli intervalli già scelti. Lo stesso facciamo, se ve n'ha ancora, per un terzo cilindretto della maggiore larghezza, la cui parte di materia eccedente la superficie S si faccia con somiglianti operazioni passare al di sotto di essa in intervalli non pieni tuttora sussistenti e ad esso terzo cilindretto laterali. E così si continui a fare per tutti gli altri minimi cilindri della maggiore larghezza che ancora vi possono essere, prendendoli l'un dopo l'altro con quell'ordine che meglio piaccia. Prendiamo di poi i piccoli cilindri della *seconda* larghezza, cioè quelli che dopo i precedenti sono i più larghi di tutti gli altri, ed eseguiamo anche su questi le stessissime operazioni. Quindi passiamo a quei della *terza* larghezza, a que' della *quarta* ecc. fino a che tutta la materia eccedente la superficie cilindrica S sia passata al di sotto di questa; e chiamiamo

C''' il corpo che risulta da C'' dopo tutte queste operazioni.

Fermandoci a fare qualche considerazione sulle particolarità di questo corpo C''', noi scorgeremo primieramente ch'esso si troverà interamente al di sotto della immaginata superficie cilindrica S, occupandola in alcuni luoghi

per tutta la di lei larghezza, ma in alcuni luoghi però lasciando degli spazii voti, lasciando cioè degli intervalli ove le sezioni di esso corpo C''' avranno un diametro minore di quello della superficie cilindrica S; perciocchè a riempiere tutta intera questa superficie cilindrica, per tutta la lunghezza del corpo C''', il quale non è punto più corto di C o di C', converrebbe impiegare, nel nostro supposto che la materia aggiunta a C' onde ridurlo a C'', cioè a tanti contigui cilindretti, fosse meno del terzo di quella di esso C', converrebbe, dico, impiegare oltre al triplo della massa di C'''.

La densità di C''' in certi luoghi sarà

$$2(1+\varepsilon)\delta;$$

e questi saranno i luoghi ove la materia preesistente si sarà compenetrata colla materia trasportata. In altri luoghi essa densità rimarrà ancora

$$(1+\varepsilon)\delta.$$

Siccome l'area media delle sezioni del corpo C' (num. XIV) è

$$hh\cdot\frac{1}{1+\varepsilon},$$

e il corrispondente diametro, il quale chiameremo

$$D',$$

è dato dall'equazione

$$\pi\left(\frac{D'}{2}\right)^2=\frac{hh}{1+\varepsilon},$$

ovvero da

$$D'=\frac{2h}{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{1+\varepsilon}},$$

così il diametro della superficie cilindrica S sarà uguale a

$$\frac{4h}{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{1+\varepsilon}},$$

e tale sarà in molti luoghi anche il diametro del corpo C'''.

La lunghezza di C''' può essere la medesima di quella di C, di C', e di C'', vale a dire $2h'$; ma ella potrebbe anche essere più grande, potendosi nelle operazioni colle quali si è ottenuto C''' essersi dovuta trasportare della materia oltre le estremità del corpo C''. Per quanto poi riguarda queste parti del corpo C''' le quali potrebbero eccedere la lunghezza di C'', non volendo noi entrare

in sottigliezze nè trattenere troppo a lungo il lettore in uno stato di cose cotanto lontano dello stato reale, ci contenteremo di osservare che, unite insieme le parti di lunghezza eccedenti alle due estremità, la somma loro non può arrivare al terzo della lunghezza del corpo C''. Perocchè se vi fosse un sì grande eccesso di lunghezza, vi sarebbe nella sola parte eccedente più materia che non in tutto intero il corpo C'''.

Dividiamo ora, con dei piani perpendicolari all'asse del corpo C''', in tre parti di ugual lunghezza quella porzione di esso C''' la quale corrisponde a tutta la lunghezza di C'': egli è certo che in quella di mezzo fra queste tre parti vi sarà qualcuno degli intervalli ove la superficie cilindrica S, ad onta dei trasporti di materia, non si troverà interamente riempiuta; giacchè se fosse altrimenti, vi sarebbe in questa sola parte di mezzo più materia che in tutto il corpo C'''. Scegliamo uno di questi intervalli, e col mezzo di un piano perpendicolare all'asse del corpo C''' e passante per questo intervallo dividiamo esso corpo C''' in due parti che chiameremo

$$A''',\ B'''.$$

Compiuta così questa terza trasformazione, e venendo ad una quarta immaginiamo che entro alla superficie cilindrica S, sì fra le due estremità del corpo C''' che al di là di queste due estremità, sia aggiunta dell'altra materia, di maniera che tanto A''' quanto B''' vengano ad essere dappertutto della densità

$$2(1+\varepsilon)\delta,$$

del diametro

$$\frac{4h}{\sqrt{\pi(1+\varepsilon)}},$$

e della lunghezza

$$2h'.$$

È evidente che per dare a ciascuna di queste due parti una tale lunghezza è indispensabile lo aggiungere nuova materia al di là di entrambe le estremità del corpo C'''. Perciocchè la lunghezza di una qualunque di esse due parti, p. e. di A''' si componeva precedentemente: 1.° di un intero terzo della lunghezza di C', terzo che è uguale a $\frac{1}{3}2h'$; 2.° della lunghezza di una porzione della media fra le tre parti che erano state distinte nella lunghezza di C'', porzione che è più corta di $\frac{1}{3}2h'$; 3.° di quella parte di lunghezza di cui C''' può sopravanzare C'' alla estremità appartenente ad A''', parte di lunghezza che similmente è più piccola di $\frac{1}{3}2h'$. E così essa lunghezza di A''' (ed è lo stesso per riguardo a B''') era minore di $2h'$.

Chiamiamo

$$A^{iv},\ B^{iv}$$

le parti A''', B''' dopo l'aggiunta di materia che abbiamo supposto.

Immaginiamo in fine che intorno a queste due parti A^{iv}, B^{iv} venga aggiunta della materia della medesima loro densità, di maniera che ne risultino due prismi

$$A^{v},\ B^{v}$$

a basi quadrate, ciascuno della lunghezza $2h'$, e co'lati delle basi uguali al diametro di A^{iv} e di B^{iv}. Avendo questi prismi per densità, per altezza e per lunghezza de'lati delle basi rispettivamente le quantità

$$2(1+\varepsilon)\delta,\ 2h',\ \frac{4h}{\sqrt{\pi(1+\varepsilon)}},$$

avranno per vicendevole attrazione espressa in chilogrammi (vedi l'equazione [37]) la quantità

$$0{,}000086\ 3845\cdot 4(1+\varepsilon)^2\delta^2\cdot\frac{(4h)^4}{\pi^2(1+\varepsilon)^2}\cdot\frac{1}{\delta'}\left\{\mathrm{L}.\psi+0{,}349645+\frac{1}{\psi^2}\left(\frac{69}{1+\alpha}-\frac{33}{1+6}\right)\right\},$$

ovvero quest'altra, a cui la precedente agevolissimamente si riduce

$$[a]\qquad \frac{0{,}000086\ 3845\cdot 1024\cdot\delta^2 h^4}{\pi^2\delta'}\cdot\left\{\mathrm{L}.\psi+0{,}349645+\frac{1}{\psi^2}\left(\frac{69}{1+\alpha}-\frac{33}{1+6}\right)\right\},$$

dove si ha

$$\psi=\frac{h'\sqrt{\pi(1+\varepsilon)}}{2h}.$$

Se ora noi chiamiamo

A, B le due parti che sarebbonsi ottenute dal dividere il prisma primitivo C col mezzo di un piano perpendicolare agli spigoli longitudinali, fatto passare per quel medesimo luogo ove abbiamo immaginato operarsi la divisione del corpo C''' nelle due parti A''', B'''; e se noi chiamiamo

V la forza, espressa in chilogrammi, colla quale queste due parti A e B si sarebbero attratte per la gravitazione, secondo la direzione degli spigoli longitudinali del corpo C, noi possiamo riconoscere che questa forza riceve sempre degli aumenti nelle varie successive trasformazioni che abbiamo immaginato eseguirsi sul corpo C. Abbiamo infatti già veduto nel numero precedente che colla prima di tali trasformazioni la materia delle due parti A e B prende una disposizione più favorevole all'effetto dell'attrazione secondo la già detta direzione. Nella seconda trasformazione, vale a dire

in quella con cui si riduce il corpo ad un aggregato di corti cilindri, questa materia viene accresciuta senza che si cangi la disposizione di quella che già si aveva, e però la detta attrazione viene evidentemente ancora aumentata. In quanto alla terza trasformazione noi cominceremo ad osservare ch'ella si eseguisce per mezzo di tre movimenti della materia, che sono: 1.° l'allungamento de'piccoli cilindri senza cangiamento di massa, 2.° la separazione di ciascuno di questi cilindri in parecchie parti, e l'allontanamento scambievole di queste parti senza spostamento del loro comun centro di massa, 3.° il restringimento nel verso laterale di queste separate parti; in ciascuno dei quali movimenti la materia situata dalla banda di A per rispetto al piano che separa A da B, rimane tutta quanta da questa banda senza che ne passi veruna minima quantità dalla banda opposta o di B, e similmente tutta la materia situata dalla banda di B rimane da questa banda; in fatti la separazione fra A e B si trova in un luogo dove in seguito la superficie cilindrica S conserva un intervallo con dello spazio voto, il quale intervallo non viene ad essere riempito di materia ne'suddetti di lei smovimenti, e nemmeno da essa materia per cotali suoi smovimenti sopravanzato, stantechè badando al modo con cui si suppongono eseguiti questi smovimenti si vede che la materia non può con essi sopravanzare un intervallo ove vi sia del voto, senza prima riempirlo. Ciò posto osserveremo che in ciascuno de' tre suddetti movimenti, l'attrazione fra le due parti derivanti da A e da B si va aumentando. Ella s'aumenta nell'allungamento de'piccoli cilindri, perciocchè supponendo, per fissare le idee, che si venga ad allungare un piccolo cilindro esistente dalla banda di A l'attrazione fra esso e tutti i piccoli cilindri situati dalla banda di B, i quali sono tutti o d'un raggio uguale al suo o d'un raggio minore, si rende più grande, come si ricava dai paragrafi 14 e 15 della Nota posta in fine della Memoria. Si aumenta pure l'attrazione allorquando il piccolo cilindro allungato si divide in parecchie parti che si allontanano l'una dall'altra nel modo già dichiarato; giacchè supponendo ancora ch'esso cilindretto si trovi dalla banda di A, la sua attrazione nella direzion dell'asse verso tutti i punti materiali appartenenti alla parte B si aumenta con questo allontanamento, come risulta dai paragrafi 16 e 17 della Nota suddetta. L'aumento d'attrazione in fine che viene cagionato dal restringimento delle parti separate del piccolo cilindro, viene dimostrato nei paragrafi 7, 11 e 13 della Nota medesima. Dal che segue che l'attrazione fra A''' e B''' è maggiore di V. Venendo di poi alle ultime trasformazioni ella è cosa evidente che l'attrazione fra A^{v} e B^{v} è maggiore di quella fra A''' e B''', e che quella fra A^{v} e B^{v} è più grande di quella fra A^{v} e B^{v}. Noi possiamo adunque porre quella fra A^{v} e B^{v} uguale a

$$(1+\gamma)V,$$

essendo γ una quantità positiva. E siccome questa medesima attrazione fra A^{v} e B^{v} è misurata dall'espressione [a] esposta poco sopra, così sarà

$$(1+\gamma)V = \frac{0{,}000086\ 3845\cdot 1024\cdot\delta^2 h^4}{\pi^2\delta'}\left\{L.\psi + 0{,}349645 + \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{69}{1+\alpha} - \frac{33}{1+6}\right)\right\},$$

d'onde, posto $V = T$,

$$[40] \quad L.\psi + 0{,}349645 + \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{69}{1+\alpha} - \frac{33}{1+6}\right) = \frac{\pi^2\delta' T\cdot(1+\gamma)}{1024\cdot 0{,}000086\ 3845\cdot\delta^2 h^4}.$$

Per venire ad un esempio particolare facciamo

$$h = 0{,}001$$

$$h' = 1$$

$$\delta = 7{,}8$$

$$T = 44{,}7$$

$$\delta' = 5{,}01\ ,$$

i quali valori si avrebbero nel caso che il corpo primitivo C fosse un sottil prisma di ferro della sezione di un millimetrò quadrato e della lunghezza di due metri, e che si assumesse per densità della terra la media aritmetica de' risultamenti corretti di Cavendish e di Maskelyne. In questo caso noi avremo

$$\text{Log.}\,\psi + 0{,}349645 + \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{69}{1+\alpha} - \frac{33}{1+6}\right) = \frac{\pi^2\cdot 5{,}01\cdot 44{,}7\cdot 1000^4\cdot(1+\gamma)}{1024\cdot 0{,}000086\ 3845\cdot 7{,}8\cdot 7{,}8}$$

$$= 410\ 695000\ 000000\ (1+\gamma),$$

ovvero più semplicemente, trascurando per la loro piccolezza il secondo e il terzo termine del primo membro,

$$\text{Log.}\,\psi = 410\ 695000\ 000000\ (1+\gamma);$$

e siccome

$$\psi = \frac{h'\sqrt{\pi(1+\varepsilon)}}{2h} = 500\cdot\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{1+\varepsilon},$$

così

$$\text{Log.}\,500 + \frac{1}{2}\,\text{Log.}\,\pi + \frac{1}{2}\,\text{Log.}(1+\varepsilon) = 410\ 695000\ 000000(1+\gamma),$$

$$\text{Log.}(1+\varepsilon) = 821\ 390000\ 000000\ (1+\gamma) - 2\,\text{Log.}\,500 - \text{Log.}\,\pi\,;$$

e siccome i due ultimi termini del secondo membro dopo ridotti a numeri

vengono a confondersi colle ultime cifre del fattore noto del primo termine le quali sono supplite dagli zeri, così si potrà fare più semplicemente

$$\text{Log.}(1+\varepsilon)=821\ 390000\ 000000\ (1+\gamma),$$

da cui

$$(1+\varepsilon)=10^{821\ 390000\ 000000\ (1+\gamma)},$$

ossia anche

$$(1+\varepsilon)=(1+\gamma')\cdot 10^{821\ 390000\ 000000},$$

essendo γ' una nuova quantità positiva; nella quale ultima equazione il fattore noto del secondo membro è un numero di tale grandezza che ad essere scritto secondo il metodo comune abbisognerebbe di una fila di cifre (supposto che mille di queste occupino la lunghezza di un metro) atta a cingere 20000 volte il globo terrestre. Ora il numero $(1+\varepsilon)$ esprime, come si è già detto più sopra, il numero delle volte che la densità del supposto prisma di ferro, ne'luoghi della sua massa ove questa è più densa, dovrebbe essere maggiore della densità del ferro che ci vien data dagli attuali metodi fisici; ed esprime altresì quante volte il volume totale del prisma conterrebbe il volume occupato dalla sola materia, se questa mediante un opportuno restringimento, fosse dappertutto ridotta alla più grande densità che abbia luogo nel corpo.

Si sarebbero avuti de' risultamenti ancor più grandi, se in luogo di prendere un prisma della sezione di un millimetro quadrato, si fosse preso un filo più sottile; ma credo che il risultamento ottenuto nell' esempio precedente basti per mostrare a quali strane conseguenze si arrivi quando voglia ammettersi la gravitazione per causa della coesione.

E similmente il fattore cognito del secondo membro dell' equazione [40] sarebbe stato più grande, se si fosse tenuto conto di alcune quantità che noi abbiamo trascurate e se si fosse fatto uso di più sottili ragionamenti. Ma in questo caso la dimostrazione sarebbe stata ancor più lunga, e d' altronde il risultamento ottenuto è così enorme che si poteva ben trascurare con di lui svantaggio qualche piccola quantità, senza rischio che venisse a mancare la conclusione.

E faremo nuovamente osservare che questo risultamento ha luogo per tutte le possibili disposizioni della materia, tanto per quelle già immaginate quanto per quelle che si potrebbero ancora immaginare. Qualunque di esse si volesse ammettere, converrebbe sempre supporre, per far dipendere la coesione dalla gravitazione, una rarezza di tessuto e una densità di materia della enorme grandezza data dall' equazione [40].

(sarà continuato)

PARTE SECONDA

Seguono quattro Capitoli che continuano la prima Sezione del TRATTATO SUL CALCOLO DEGLI INTEGRALI DEFINITI *(Vedi Fascicolo I, pag.* 73)

CAPO VI.

Riflessioni sulla necessità della convergenza nelle serie infinite di cui si fa uso per la ricerca di varii integrali definiti.

37. All'oggetto di procedere colla maggior possibile chiarezza non dispiaccia richiamare alcune nozioni elementari intorno alla formazione delle serie. È noto che si danno espressioni algebriche *diverse nella forma ed eguali nel valore*. Fra queste havvene una classe degna di particolare attenzione nelle quali *un certo numero di termini progredisce con una legge manifesta e finalmente vi è un ultimo termine modificato in una maniera particolare*: sono esse le serie finite: tali i secondi membri delle equazioni

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

essendo n numero qualunque intero positivo. Una facilissima e sicuramente legittima operazione, cioè in questo caso la moltiplicazione per $1-x$ e la susseguente riduzione, prova che tutte le anzi scritte equazioni sono identiche, epperò vere per qualunque valore di x positivo, negativo, grandissimo, piccolissimo, reale, immaginario. La circostanza poi particolare a questa classe di equazioni identiche che *l'ultimo termine nella serie del secondo membro può mandarsi lontano quanto si vuole e che i termini antecedenti si producono l'uno dopo l'altro con una legge manifesta*, ha stabilito l'uso di non iscrivere d'ordinario che i primi termini delle serie, e dopo alcuni finire con un segno che indichi la sua indefinita continuazione, cioè fare nell'esempio adotto

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \text{ecc.}$$

38. In questo uso, se non si pone molta attenzione, può esservi il principio di gravi errori. In fatti esaminiamo quale è lo stato delle nostre idee rapporto a simili espressioni. Intendiamo noi che la serie sotto l'indicazione ultimamente menzionata rimanga *finita*, cioè che presto o tardi, o anche tardissimo si ponga finalmente l'ultimo termine avente quella particolare modificazione che fa finire la serie? Se così è, non abbiamo a dubitare di nulla, e l'equazione è vera per qualunque valore di x. Ma d'ordinario lo stato delle nostre idee re-

lativamente a simili espressioni è totalmente diverso: siamo soliti di chiamarle *serie infinite*, e dal potere rimuovere l'ultimo termine lontano quanto ne aggrada, ci pare d'essere autorizzati a non porlo più: o se ciò espressamente non diciamo, ne lasciamo perdere l'idea fra le oscurità dalle quali è per noi accompagnata la nozione dell'infinito. Ma si sa, principalmente dai Metafisici, che il progresso all'infinito non può fare le veci di una esistenza necessaria per isfuggire un errore: e anche senza questa speculazione niuno può negare che tra il progresso all'infinito e la posizione di un'ultimo termine non si vede quella relazione d'identità che permette di sostituire una cosa per l'altra. Adunque non può dirsi legittima l'equazione tra una funzione sotto forma finita e la serie infinita che ne è dedotta con metodi analitici (ver. gr. col teorema di Taylor) quando (intendiamoci bene) si tengono le lettere in quella assoluta generalità in cui rappresentano soltanto posti di quantità qualunque, e l'idea della serie infinita è quella di una successione di termini che vengono gli uni dopo gli altri e che non termina mai.

39. La mentovata eguaglianza che non può sostenersi nell'assoluta generalità delle espressioni letterali, può nondimeno talvolta accettarsi in un altro senso e dietro un tutto diverso principio quando si discende a riguardare le lettere come aventi determinati valori numerici. È noto che allora nasce nella serie la *convergenza* o la *divergenza*, che sono due *fatti* i quali non si possono riconoscere che nei numeri: credo di poter essere dispensato dal dichiarare in che consistono, giacchè se ne hanno idee chiarissime. Se ha luogo la convergenza, si può accettare l'equazione fra l'espressione finita e la serie infinita corrispondente, purchè il primo membro possa considerarsi *un vero limite* a cui la somma dei termini del secondo membro sempre più si accosta quanti più termini si prendano fino a ridurre la differenza minore d'ogni quantità assegnabile. È vero che anche in questo caso l'eguaglianza, rigorosamente parlando, non è mai vera *in atto*, ma pure si deve ammettere razionalmente, perchè la nozione dell'infinito viene a supplire a quel pochissimo di differenza fra i due membri, che pur sempre rimane anche dopo qualunque sforzo d'immaginazione per concepire sommato nel secondo membro un numero stragrande di termini. Ma quando nella serie infinita numerica ha luogo la divergenza, allora l'eguaglianza anzidetta è manifestamente assurda: infatti non si tratta di un errore il quale si va sempre attenuando e svanisce nell'infinito, come nel caso della convergenza, ma di un errore che va sempre crescendo, e che perciò il progresso all'infinito non verrà già a togliere, ma a consolidare. Notisi che anche nel caso della convergenza per la verità dell'equazione fra l'espressione finita (che chiamo E), e la serie infinita, si è posta la condizione che la prima sia un vero limite della somma (che chiamo S) di un numero n di termini della seconda; perchè potrebbe avvenire che al crescere di n, la S si accostasse continuamente ad E, ma non come a limite, accostandosi come a limite ad un'altra quantità E' che tenesse con E una differenza assegnabile. Allora E' e non E sarebbe eguale alla serie infinita: e l'equazione tra questa ed E sarebbe ancora falsa.

40. Riassumendo il sin qui detto, conviene tener fermo il principio che l'eguaglianza tra una espressione finita e una serie infinita non si può mai rigorosamente accettare se non colla condizione espressa o tacita che la serie sia convergente: non basta: che sia convergente verso quella espressione finita come a suo limite. Ammessa questa dottrina, sorge naturalmente una grave difficoltà: siccome la convergenza non si manifesta se non nel caso in cui le lettere hanno valori numerici, dovremo noi diffidare di tutti quei calcoli, che pur son molti, nei quali, tenendo le lettere in tutta la loro generalità, si sostituiscono alle funzioni i corrispondenti sviluppi in serie? Rispondo; varii di questi sviluppi, siccome dirassi qui dopo, sono serie sempre convergenti: essi dunque potranno in ogni caso sostituirsi alle funzioni equivalenti senza timore. Per gli altri niente c' impedisce di avere in quelle sostituzioni di mira il numero, che spesso è ancora infinito, dei casi in cui nelle serie starà la convergenza. La generalità delle lettere abbraccerà questi soli casi, e non dando alla medesima una estensione maggiore non vi sarà pericolo di errore. Non così uscendo dai limiti dentro i quali ha luogo la convergenza: e se la questione sarà di tal natura che nelle serie adoperate si abbiano appunto a considerare, anche solo in parte, quei valori delle variabili pei quali le serie si fanno divergenti, i risultamenti del calcolo saranno per lo meno dubbiosi, ma il più sovente strani e falsissimi. Nè è meraviglia: impiegando mezzi insussistenti, non è possibile, a meno di un compenso di errori, ottenere la verità. Parmi che d'Alembert sia stato il primo a indicare ai Geometri questo così nascosto principio di fallacia. Egli dice chiaramente (*) « lo sviluppo della frazione $\frac{1}{1-x}$ in $1+x+x^2+x^3+$ ecc. rappresenta in una maniera falsissima il valore di questa frazione quando x è più grande dell' unità, e in conseguenza ogni proposizione fondata sulla pretesa eguaglianza di queste due espressioni sembrami affatto dubbiosa » e poco più innanzi: « in generale ogni ragionamento fondato sopra serie divergenti che si suppongono eguali a quantità finite sembrami soggettissimo ad errore. »

41. Che l' uso intermedio delle serie divergenti conduca all'errore, è un'avvertenza principalmente necessaria nella ricerca dei valori di parecchi integrali definiti. Sono questi quegli integrali i quali si trovano eseguibili alla maniera ordinaria sviluppando in serie una parte della funzione posta sotto il segno d'integrazione. Se la serie messa in uso non si mantiene convergente per tutti i valori della variabile compresi fra i limiti assegnati all' integrale, non possiamo assicurare l' esattezza delle formole che si ottengono. Potrei io qui essere lunghissimo nel mostrare varii casi in cui l' uso di una serie divergente conduce a formole d'integrali definiti che sono erronee: mi limiterò ad un solo esempio recato dal Frullani nel luogo più sopra citato.

(*) *Opuscules Mathématiques*. Tom. IV. Mem. 25, num. 10.

Sia proposta la frazione $\frac{1}{1+n\cos.z}$ da svilupparsi in serie ordinata pei coseni degli angoli multipli di z. A tale effetto pongasi attenzione all'equazione identica

$$\frac{1}{1+n\cos.z}=\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left\{\frac{1}{1+\frac{1}{n}(1-\sqrt{1-n^2})e^{z\sqrt{-1}}}-\frac{1}{1+\frac{1}{n}(1+\sqrt{1-n^2})e^{z\sqrt{-1}}}\right\}$$

che si dimostra facilmente *a posteriori* riducendo per mezzo di facili operazioni il secondo membro alla forma $\frac{1}{1+\frac{n}{2}(e^{z\sqrt{-1}}+e^{-z\sqrt{-1}})}$ e quindi subito a quella del primo. Mettendo per abbreviare

$$(\alpha)\qquad a=\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}$$

e osservando essere

$$\frac{1}{a}=\frac{1+\sqrt{1-n^2}}{n};$$

la precedente equazione diventa

$$\frac{1}{1+n\cos.z}=\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left(\frac{1}{1+a\,e^{z\sqrt{-1}}}-\frac{1}{1+\frac{1}{a}e^{z\sqrt{-1}}}\right)$$

da cui, svolgendo in serie infinite le due frazioni,

$$(\beta)\qquad \frac{1}{1+n\cos.z}=-\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left\{\left(a-\frac{1}{a}\right)e^{z\sqrt{-1}}\right.$$

$$\left.-\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)e^{2z\sqrt{-1}}+\cdots\mp\left(a^i-\frac{1}{a^i}\right)e^{iz\sqrt{-1}}\pm\text{ecc.}\right\}$$

si sommi questa coll'altra equazione che se ne deduce ponendo $-z$ per z, e si avrà mediante la nota trasformazione delle risultanti quantità esponenziali in coseni

$$(\gamma)\qquad \frac{1}{1+n\cos.z}=-\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left\{\left(a-\frac{1}{a}\right)\cos.z\right.$$

$$\left.-\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)\cos.2z+\cdots\mp\left(a^i-\frac{1}{a^i}\right)\cos.iz\pm\text{ecc.}\right\}.$$

Ora si moltiplichi per $\cos.iz$, indi si integri per z fra i limiti *zero*, π; a motivo delle formole

$$\int_0^\pi dz\cdot\cos.kz\cos.iz=0,\quad \int_0^\pi dz\cdot(\cos.iz)^2=\frac{\pi}{2}$$

che facilmente si dimostrano e possono anche dedursi dalle (ζ) del num. 31 avremo

$$(\delta) \qquad \int_0^\pi dz \cdot \frac{\cos. i z}{1 + n \cos. z} = \pm \frac{a^i - a^{-i}}{\sqrt{1 - n^2}} \cdot \frac{\pi}{2} \qquad \begin{cases} + \text{ se } i \text{ è pari} \\ - \text{ se } i \text{ è dispari} \end{cases}.$$

Questa formola dà un risultato falso quando $n < 1$, giacchè, siccome dimostreremo in seguito, è in tal caso

$$(\varepsilon) \qquad \int_0^\pi dz \cdot \frac{\cos. i z}{1 + n \cos. z} = \pm \frac{a^i \pi}{\sqrt{1 - n^2}} \qquad \begin{cases} + \text{ se } i \text{ è pari} \\ - \text{ se } i \text{ è dispari} \end{cases}.$$

La ragione di questa anomalia sta in ciò, che essendo $n < 1$, una delle due serie in cui la (γ) è decomponibile si trova necessariamente divergente. Infatti si capisce senza fatica dalla (α) che se $n < 1$ è anche $a < 1$, e però $\frac{1}{a} > 1$.

Quando $n > 1$, nè a nè $\frac{1}{a}$ possono dirsi maggiori dell'unità, perchè constano, come ora subito vedremo, di due parti una reale ed una immaginaria ciascuna delle quali è dell'unità minore, considerando quanto alla seconda il coefficiente del $\sqrt{-1}$. Cessa allora la divergenza nel secondo membro della (γ), e cessata la cagione dell'errore, la formola (δ) dà un risultato giusto.

Per vederlo, faremo in similitudine di quanto insegnò il Poisson in un caso simile (*)

$$\cos. \theta = \frac{1}{n}, \quad \sin. \theta = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - 1}$$

riuscendo θ un angolo reale e assegnabile, e avremo per la (α)

$$a = \cos. \theta - \sqrt{-1} \sin. \theta ; \quad \frac{1}{a} = \cos. \theta + \sqrt{-1} \sin. \theta$$

quindi

$$a^i = (\cos. \theta - \sqrt{-1} \sin. \theta)^i = \cos. i\theta - \sqrt{-1} \sin. i\theta$$

$$a^{-i} = (\cos. \theta + \sqrt{-1} \sin. \theta)^i = \cos. i\theta + \sqrt{-1} \sin. i\theta.$$

Laonde dalla (δ) si ottiene

$$(\zeta) \qquad \int dz \cdot \frac{\cos. i z}{1 + n \cos. z} = \mp \frac{\pi}{n} \cdot \frac{\sin. i\theta}{\sin. \theta} \qquad \begin{cases} - \text{ se } i \text{ è pari} \\ + \text{ se } i \text{ è dispari} \end{cases}$$

formola esatta, siccome proveremo più innanzi, prendendola nel senso che ivi sarà convenientemente spiegato.

(*) *Journal Polytechnique*. Cah. XIX pag. 485.

42. È pertanto necessario avere un criterio dietro il quale giudicare della convergenza delle serie secondo il principio più sopra espresso al cominciare del num. 40. Non ignoro che io tocco qui un argomento il quale ha un' estensione che abbraccia molti teoremi (*), ma potrà bastare per l' oggetto nostro restringersi a quanto segue.

Sia $F(x)$ una funzione di x che si svolge in una serie di termini i quali procedono o per le potenze ascendenti della variabile, o per seni o per coseni di archi multipli della medesima, o con qualsivoglia altra legge espressa nel termine generale u_n corrispondente al posto $(n+1)$ esimo: e dicasi $R(n,x)$ il resto della stessa serie dopo un numero n di termini, talchè

$$(\eta) \qquad F(x) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + R(n,x);$$

se il resto $R(n,x)$ è tale funzione di n, x, che per $n = \infty$ abbiasi

$$(\vartheta) \qquad R(\infty, x) = 0$$

allora siamo sicuri che la serie

$$u_0 + u_1 + u_2 + \text{ecc. all'inf.}$$

può francamente sostituirsi alla funzione $F(x)$ per qualsivoglia uso analitico. Infatti la somma di n termini della serie chiamata S sulla fine del n.° 39 è per la precedente (η) eguale ad $F(x) - R(n,x)$: essa mantiene sempre questa eguaglianza comunque si ingrandisca il numero n, onde quando $n = \infty$ essa per una parte rappresenta la somma della serie infinita, e per l'altra è provata eguale ad $F(x)$ a motivo della (ϑ). Ora qui occorrono tre osservazioni importanti: 1.ª alcune volte l' equazione (ϑ) sussiste essendo x qualunque: 2.ª altre volte la sussistenza dell'equazione (ϑ) non può riconoscersi se non per valori di x ristretti fra certi limiti: 3.ª qualche rara volta l'equazione (ϑ) non può stare per nessun valore di x. Nel primo caso la serie è sempre convergente; nel secondo è convergente dentro certi limiti e divergente fuori di essi; nel terzo è sempre divergente: epperò l' uso della serie sarà legittimo o illegittimo secondo si spiegò al num. 40. Ecco esempj dei primi due casi.

43. I notissimi sviluppi delle tre funzioni e^x, $\sin. x$, $\cos. x$ sono serie sempre convergenti per qualunque valore di x da $-\infty$ a $+\infty$.

Per la prima si prova facilmente dietro un teorema noto (**) che il resto $R(n,x)$ è sempre compreso fra le due quantità

$$\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots (n-1)n}; \qquad e^x \frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots (n-1)n}.$$

(*) Cauchy. *Cours d'Analyse*. Chap. VI, *Exercices de Mathématiques*. T. II, pag. 221.
(**) Bordoni. *Lezioni di calcolo sublime*. Tom. I, pag. 162, num. 117.

Scrivendo la quantità

$$\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots (n-1)n}$$

nella maniera seguente

$$\frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdots\frac{x}{n-1}\cdot\frac{x}{n},$$

si capisce che avendo x un qualunque valore anche grandissimo, gli ultimi fattori dell'antecedente prodotto sono *zero* per $n=\infty$, e quindi è zero tutta la quantità. Dunque i limiti fra cui nel caso attuale è compreso il resto $R(n,x)$ sono entrambi zero qualunque sia x per $n=\infty$; dunque anche un tal resto.

Per la seconda si prova coll'uso dello stesso teorema che il resto $R(n,x)$ è sempre compreso fra i limiti

$$\text{o},\ \sin.x\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)n};\ \text{ovvero}\ \frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)n},\ \cos.x\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)n}$$

$$\text{ovvero}\quad \text{o},\ -\sin.x\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)n};$$

$$\text{ovvero}\quad -\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)n},\quad -\cos.x\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)n}$$

secondo che n si prende della forma $4p$, ovvero $4p+1$, ovvero $4p+2$, ovvero $4p+3$: e siccome nel modo or ora usato si riconosce subito che questi limiti sono tutti zero per $n=\infty$, si conchiude la stessa cosa del resto in questione.

La dimostrazione è affatto simile per la seguente funzione semplice $\cos.x$.

44. Nel caso della serie riferita ai num. 37, 40 abbiamo

$$R(n,x)=\frac{x^n}{1-x}$$

quindi perchè si verifichi la (3) bisogna che sia $x^\infty=0$, cioè x numero minore dell'unità astrazion fatta dal segno, ossia (ciò che è lo stesso) bisogna che x abbia valori compresi fra -1, $+1$.

Il Poisson (*) dimostra le equazioni

$$(\iota)\quad\begin{cases}\dfrac{1-p\cos.x}{1-2p\cos.x+p^2}=1+p\cos.x+p^2\cos.2x+p^3\cos.3x+\text{ecc.}\\[2ex]\dfrac{p\sin.x}{1-2p\cos.x+p^2}=p\sin.x+p^2\sin.2x+p^3\sin.3x+\text{ecc.}\end{cases}$$

(*) *Journal Polyt.* Cah. XIX, pag. 405.

da ritenersi vere nel solo caso in cui p è minore dell' unità, astrazion fatta dal segno. Per veder ciò si parta dalle equazioni identiche

$$2\cdot\frac{1-p\cos.x}{1-2p\cos.x+p^2}=\frac{1}{1-pe^{x\sqrt{-1}}}+\frac{1}{1-pe^{-x\sqrt{-1}}}$$

$$2\cdot\frac{p\sin.x\sqrt{-1}}{1-2p\cos.x+p^2}=\frac{1}{1-pe^{x\sqrt{-1}}}-\frac{1}{1-pe^{-x\sqrt{-1}}}$$

facilmente verificabili riducendo i secondi membri in modo che vi spariscano gli esponenziali immaginarj. Svolgansi ora in serie le frazioni dei secondi membri fino ad un numero n di termini, e tenendo sempre di mira le formole che danno i seni e coseni per esponenziali immaginarj, si caveranno le due

$$\frac{1-p\cos.x}{1-2p\cos.x+p^2}=1+p\cos.x+p^2\cos.2x+\cdots+p^{n-1}\cos.(n-1)x+R_1(n,p)$$

$$\frac{p\sin.x}{1-2p\cos.x+p^2}=p\sin.x+p^2\sin.2x+\cdots+p^{n-1}\sin.(n-1)x+R_2(n,p)$$

essendo

$$R_1(n,p)=\frac{1}{2}p^n\left\{\frac{e^{nx\sqrt{-1}}}{1-pe^{x\sqrt{-1}}}+\frac{e^{-nx\sqrt{-1}}}{1-pe^{-x\sqrt{-1}}}\right\}$$

$$R_2(n,p)=\frac{1}{2\sqrt{-1}}p^n\left\{\frac{e^{nx\sqrt{-1}}}{1-pe^{x\sqrt{-1}}}-\frac{e^{-nx\sqrt{-1}}}{1-pe^{-x\sqrt{-1}}}\right\}$$

espressioni che facilmente si trasformano nelle seguenti

$$R_1(n,p)=p^n\cdot\frac{\cos.nx-p\cos.(n-1)x}{1-2p\cos.x+p^2};\quad R_2(n,p)=p^n\cdot\frac{\sin.nx-p\sin.(n-1)x}{1-2p\cos.x+p^2}$$

Adunque perchè siano $R_1(\infty,p)=0$, $R_2(\infty,p)=0$, conviene che p sia minore dell' unità astrazion fatta dal segno. Allora infatti il fattore p^∞ è zero, e sarebbe infinito nel caso opposto.

CAPO VII.

Metodi di Mascheroni e di Bidone.

Il ch. sig. Bidone nella celebre sua Memoria sugli integrali definiti (*) adotta nel primo articolo un metodo di Mascheroni proposto da questo illustre geometra nelle sue Annotazioni al calcolo integrale d'Eulero, e ne prende motivo per fare all'Autore un elogio, che io non intendo di contraddire. Solo credo di non andare lontano dal vero nell' asserire che riproducendo a' nostri dì un tal metodo come sta esposto ne' due luoghi citati sarebbe malagevole il rispondere ad ogni difficoltà possibile a promuoversi in occasione di quella lettura: giacchè bisogna pur confessare che talvolta di que' tempi non si usava in simili ricerche tutta quella circospezione, che poi si trovò necessaria. È mio pensiero, siccome dissi nell'introduzione, il cercare piuttosto di far penetrare agli studiosi lo spirito dei diversi metodi proprj della teorica, di quello che raccogliere tutti i materiali di essa: quindi sarebbe stato mio vivo desiderio il far conoscere le meditazioni di un bell' ingegno italiano nella lusinga, che per lo studio di loro, si potesse aprire, come non di rado avviene, anche qualche nuova veduta. Mi riescirebbe però impossibile persuadere agli altri ciò di cui non valgo a pienamente convincermi io stesso; quindi trovo più savio partito ommettere quel metodo: ommissione che già non fa danno, mentre tutto ciò che si trovò mediante il medesimo si sa adesso ottenere seguendo altre vie più spedite e sicure. Ne esporrò in vece un altro che il Bidone si formò studiando sulle ricerche del Mascheroni; non già che anche intorno ad esso io non senta qualche difficoltà sulla quale non passerò del tutto in silenzio; ma un tal metodo è tanto ingegnoso che sarebbe una vera mancanza il non farne almeno un breve cenno: se non per altro oggetto, per mettere sott'occhio ai lettori certe finezze di ripieghi analitici, che possono giovare in altre circostanze. Dissi almeno un cenno, giacchè consapevole del molto viaggio che mi resta a fare, mi limiterò ad una indicazione in generale accompagnata da qualche esempio, e ripeterò ai lettori che non sarebbe da consigliarsi in questa e in altre occasioni il seguire tutte le deduzioni già fatte dagli inventori di simili metodi, ora che siamo ricchi di altri mezzi migliori per ottenere i medesimi risultati.

45. Ecco il metodo. Suppongo di voler ottenere un' integrale

$$\int_0^\infty dx \cdot \phi(x)\,,$$

e suppongo di avere in serie l'integrale indefinito e incompleto

(*) *Mémoire sur diverses intégrales définies.* Turin, 1812.

$$(a) \qquad \int dx\cdot\varphi(x)=f(x)+\frac{a_x}{x}+\frac{b_x}{x^2}+\frac{c_x}{x^3}+\text{ecc.}=F(x)$$

(denominazione quest'ultima introdotta per brevità) dove $f(x)$, a_x, b_x, c_x, ecc. sono funzioni di x che ricevono un valore finito per $x=\infty$. In tali circostanze si viene a conoscere il valore dell'integrale nel secondo limite, cioè $F(\infty)$, perchè la precedente espressione dà $F(\infty)=f(\infty)$; ma il suo valore nel primo limite, cioè $F(0)$, non si può conoscere, risultando nella stessa espressione un numero infinito di termini infiniti, spesso di segno contrario, dai quali (essendo la serie divergente) non è lecito di nulla conchiudere. Pertanto a trovare il valore di $F(0)$ si usa il seguente artifizio. Si pone $x=\frac{1}{z}$, e con facili trasformazioni (10, 12) si cava

$$(b) \qquad \int_0^x dx\cdot\varphi(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} dz\cdot\frac{1}{z^2}\,\varphi\left(\frac{1}{z}\right).$$

Immaginiamo adesso di avere l'integrale indefinito

$$(c) \qquad \int dz\cdot\frac{1}{z^2}\,\varphi\left(\frac{1}{z}\right)=\psi(z)+\frac{\alpha_z}{z}+\frac{\beta_z}{z^2}+\frac{\gamma_z}{z^3}+\text{ecc.}=\Psi(z)$$

(denominazione quest'ultima introdotta per brevità) con una espressione affatto simile alla precedente (a), che come quella, dà noto il valore di $\Psi(\infty)$. Siccome la (b) si risolve nella

$$(d) \qquad F(x)-F(0)=\Psi(\infty)-\Psi\left(\frac{1}{x}\right);$$

se $F(x)$, $\Psi\left(\frac{1}{x}\right)$ sono, dietro le note espressioni (a), (c), sviluppabili in serie infinite ordinate per le potenze ascendenti e discendenti della variabile: se possono cioè ammettersi le forme di sviluppo

$$(e) \qquad \begin{cases} F(x)=A+\begin{matrix} B_1x+B_2x^2+B_3x^3+\text{ecc.} \\ C_1x^{-1}+C_2x^{-2}+C_3x^{-3}+\text{ecc.}\end{matrix} \\[2ex] \Psi\left(\frac{1}{x}\right)=L+\begin{matrix} M_1x+M_2x^2+M_3x^3+\text{ecc.} \\ N_1x^{-1}+N_2x^{-2}+N_3x^{-3}+\text{ecc.}\end{matrix}\end{cases}$$

(dove interessa di conoscere A, L, e degli altri coefficienti basta sapere razionalmente la possibilità della determinazione), sostituendo tali espressioni nella (d), è da credersi che le due parti che contengono essenzialmente la variabile

faranno equazione da se, talchè rimarrà l'equazione tra le parti costanti

$$A - F(0) = \Psi(\infty) - L$$

da cui $F(0) = A + L - \Psi(\infty)$, e finalmente

$$(f) \qquad \int_0^\infty dx \cdot \varphi(x) = F(\infty) + \Psi(\infty) - A - L.$$

Un esempio rischiarerà ogni cosa.

46. Vogliasi $\int_0^\infty dx \cdot \frac{\cos.rx}{m^2+x^2}$. Sviluppando la frazione $\frac{1}{m^2+x^2}$ per le potenze negative di x^2, otterrassi

$$(g) \qquad \int dx \cdot \frac{\cos.rx}{m^2+x^2} = \int dx \cdot \frac{\cos.rx}{x^2} - m^2 \int dx \cdot \frac{\cos.rx}{x^4} + m^4 \int dx \cdot \frac{\cos.rx}{x^6} - \text{ecc.}$$

Ora dalle due equazioni identiche facilmente verificabili

$$\int dx \cdot \frac{\cos.rx}{x^k} = -\frac{\cos.rx}{(k-1)x^{k-1}} - \frac{r}{k-1} \int dx \cdot \frac{\sin.rx}{x^{k-1}}$$

$$\int dx \cdot \frac{\sin.rx}{x^h} = -\frac{\sin.rx}{(h-1)x^{h-1}} + \frac{r}{h-1} \int dx \cdot \frac{\cos.rx}{x^{h-1}}$$

si cava per continua sostituzione

$$\int dx \cdot \frac{\cos.rx}{x^{2n}} = \cos.rx \left\{ -\frac{1}{(2n-1)x^{2n-1}} + \frac{r^2}{(2n-1)(2n-2)(2n-3)x^{2n-3}} \cdots\cdots \pm \frac{r^{2n-2}}{(2n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot x} \right\}$$

$$+ \sin.rx \left\{ \frac{r}{(2n-1)(2n-2)x^{2n-2}} - \frac{r^3}{(2n-1)\cdots(2n-4)x^{2n-4}} \cdots\cdots \pm \frac{r^{2n-3}}{(2n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot x^2} \right\}$$

$$\pm \frac{r^{2n-1}}{(2n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} \int dx \cdot \frac{\sin.rx}{x}$$

dove negli ultimi termini sotto le parentesi, e nell'altro contenente l'integrale ha luogo il segno + se n è pari, e il — se n è dispari, quindi

$$\int dx \cdot \frac{\cos.rx}{x^2} = -\frac{\cos.rx}{x} - r\int dx \cdot \frac{\sin.rx}{x}$$

$$-m^2\int dx \cdot \frac{\cos.rx}{x^4} = \frac{m^2\cos.rx}{3x^3} - \frac{m^2 r\sin.rx}{3\cdot 2\cdot x^2} - \frac{m^2 r^2\cos.rx}{3\cdot 2\cdot 1\cdot x} - \frac{m^2 r^3}{3\cdot 2\cdot 1}\int dx \cdot \frac{\sin.rx}{x}$$

$$+m^4\int dx \cdot \frac{\cos.rx}{x^6} = -\frac{m^4\cos.rx}{5x^5} + \frac{m^4 r\sin.rx}{5\cdot 4\cdot x^4} + \frac{m^4 r^2\cos.rx}{5\cdot 4\cdot 3\cdot x^3} - \frac{m^4 r^3\sin.rx}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot x^2}$$

$$-\frac{m^4 r^4\cos.rx}{5\cdot 4 \cdots 1\cdot x} - \frac{m^4 r^5}{5\cdot 4\cdots 1}\int dx \cdot \frac{\sin.rx}{x}$$

ecc. ecc. ecc.

Per queste e per la (g) si vede che il valore del proposto integrale $\int dx \cdot \frac{\cos.rx}{m^2+x^2}$ può mettersi sotto la forma (a), essendo

$$f(x) = -\left(r + \frac{m^2 r^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{m^4 r^5}{1\cdot 2\cdots 5} + \frac{m^6 r^7}{1\cdot 2\cdots 7} + \text{ecc.}\right)\int dx \cdot \frac{\sin.rx}{x}$$

$$= -\frac{1}{2m}\left(e^{mr} - e^{-mr}\right)\int dx \cdot \frac{\sin.rx}{x}$$

$$a_x = -\left(1 + \frac{m^2 r^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{m^4 r^4}{1\cdot 2\cdots 5} + \frac{m^6 r^6}{1\cdot 2\cdots 7} + \text{ecc.}\right)\cos.rx$$

$$= -\frac{1}{2mr}\left(e^{mr} - e^{-mr}\right)\cos.rx$$

$$b_x = -\left(\frac{m^2 r}{2\cdot 3} + \frac{m^4 r^3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{m^6 r^5}{2\cdot 3\cdots 7} + \text{ecc.}\right)\sin.rx$$

$$= -\frac{1}{2mr^2}\left(e^{mr} - e^{-mr} - 2mr\right)\sin.rx$$

$$c_x = +\left(\frac{m^2}{3} + \frac{m^4 r^2}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{m^6 r^4}{3\cdot 4\cdots 7} + \text{ecc.}\right)\cos.rx$$

$$= \frac{1}{mr^3}\left(e^{mr} - e^{-mr} - 2mr\right)\cos.rx$$

$$d_x = +\left(\frac{m^4 r}{4\cdot 5} + \frac{m^6 r^3}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \text{ecc.}\right)\sin.rx$$

$$= \frac{3}{mr^4}\left(e^{mr} - e^{-mr} - 2mr - \frac{1}{3}m^3 r^3\right)\sin.rx$$

$$e_x = -\left(\frac{m^4}{5} + \frac{m^6 r^2}{5\cdot 6\cdot 7} + \text{ecc.}\right)\cos.rx$$

$$= -\frac{3\cdot 4}{mr^5}\left(e^{mr} - e^{-mr} - 2mr - \frac{1}{3}m^3 r^3\right)\cos.rx$$

ecc. ecc. ecc.

per le quali espressioni si riconosce che a_x, b_x, c_x, ecc. non prendono un valore infinito per $x=\infty$. Quanto a $f(x)$, chiamiamo per un momento $\theta(x)$ l'integrale indefinito $\int dx \cdot \frac{\sin.rx}{x}$, e svolgendo $\sin.rx$ troveremo per serie

$$(k)\qquad \theta(x)=rx-\frac{r^3}{2\cdot 3}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{r^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{r^7}{2\cdot 3\cdots 7}\cdot\frac{x^7}{7}+\text{ecc.}$$

La formola (λ) del num. 32 ci dà

$$\theta(\infty)-\theta(0)=\frac{\pi}{2}$$

e siccome per l'antecedente valore di $\theta(x)$ in serie si riconosce $\theta(0)=0$, caveremo $\theta(\infty)=\frac{\pi}{2}$. Pertanto il fin qui detto ci somministra

$$F(\infty)=f(\infty)=-\frac{\pi}{4m}(e^{mr}-e^{-mr}).$$

Abbiamo poi, fatto $x=\frac{1}{z}$,

$$(h)\qquad \int dz\cdot\frac{\cos.\frac{r}{z}}{1+m^2z^2}=\int dz\cdot\frac{1}{1+m^2z^2}-\frac{r^2}{2}\int dz\cdot\frac{1}{z^2(1+m^2z^2)}$$

$$+\frac{r^4}{2\cdot 3\cdot 4}\int dz\cdot\frac{1}{z^4(1+m^2z^2)}-\frac{r^6}{2\cdots 6}\int dz\cdot\frac{1}{z^6(1+m^2z^2)}+\text{ecc.}$$

ed essendo in generale, dietro la teorica della scomposizione delle frazioni

$$\frac{1}{z^{2n}(1+m^2z^2)}=\frac{1}{z^{2n}}-\frac{m^2}{z^{2n-2}}+\frac{m^4}{z^{2n-4}}-\cdots\mp\frac{m^{2n-2}}{z^2}\pm\frac{m^{2n}}{1+m^2z^2}$$

dove nell'ultimo termine ha luogo il segno + se n è pari, e il — se n è dispari, e in conseguenza

$$\int dz\cdot\frac{1}{z^{2n}(1+m^2z^2)}=-\frac{1}{(2n-1)z^{2n-1}}+\frac{m^2}{(2n-3)z^{2n-3}}-\frac{m^4}{(2n-5)z^{2n-5}}+\frac{m^6}{(2n-7)z^{2n-7}}\cdots$$

$$\pm\frac{m^{2n-2}}{z}\pm m^{2n-1}\,\text{Arc.tan.}mz\ ;$$

quindi nei casi particolari

$$\int dz\cdot\frac{1}{1+m^2z^2}=\frac{1}{m}\,\text{Arc.tan.}mz$$

$$-\frac{r^2}{2}\int dz\cdot\frac{1}{z^2(1+m^2z^2)}=\frac{r^2}{2z}+\frac{mr^2}{2}\,\text{Arc.tan.}mz$$

$$+\frac{r^4}{2\cdot 3\cdot 4}\int dz\cdot\frac{1}{z^4(1+m^2z^2)}=-\frac{r^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 3z^3}+\frac{m^2r^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot z}+\frac{m^3r^4}{2\cdot 3\cdot 4}\,\text{Arc.tan.}mz\ ;$$

ecc. ecc. ecc.

si ha l'integrale per serie corrispondente alla (*c*), essendo

$$\psi(z)=\frac{1}{m}\left(1+\frac{m^2r^2}{2}+\frac{m^4r^4}{2\cdot3\cdot4}+\frac{m^6r^6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}+\text{ecc.}\right)\text{Arc.tan.}mz=\frac{1}{2m}(e^{mr}+e^{-mr})\text{Arc.tan.}mz$$

$$a_z=\frac{r^2}{2}+\frac{m^2r^4}{2\cdot3\cdot4}+\frac{m^4r^6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}+\text{ecc.}=\frac{1}{2m^2}(e^{mr}+e^{-mr}-2)$$

$$\beta_z=0\,;\quad \gamma_z=-\frac{1}{6m^4}(e^{mr}+e^{-mr}-2-m^2r^2)\,;\quad \delta_z=0\,;\ \text{ecc.}$$

Quando $z=\infty$ abbiamo $\psi(\infty)=\Psi(\infty)=\frac{\pi}{4m}(e^{mr}+e^{-mr})$, e a_z, β_z, γ_z, ecc. non provano alcuna alterazione essendo costanti.

Tutto pertanto corrisponde all'enunciazione generale del metodo: e resta solo a vedere se $F(x)$, $\Psi\left(\frac{1}{x}\right)$ sono in questo caso sviluppabili nel modo espresso dalle equazioni (*e*), ed essendolo, quale è il valore delle costanti A, L.

Se nella forma di sviluppo indicata dalla (*a*) si mettono per $f(x), a_x, b_x$, ecc. i valori superiormente trovati, e per $\int dx\cdot\frac{\sin.rx}{x}$, $\sin.rx$, $\cos.rx$ le note serie (essendo la prima quella della equazione (*k*)) si vedono facilmente nascere le due serie ordinate per le potenze ascendenti e discendenti di x con $A=0$. Dicasi lo stesso della forma di sviluppo indicata dalla (*c*), ritenendovi, come si è trovato, a, β, γ, ecc. costanti; e

$$\psi(z)=\frac{1}{2m}(e^{mr}+e^{-mr})\text{Arc.tan.}mz=\frac{1}{2m}(e^{mr}+e^{-mr})\left(mz-\frac{m^3z^3}{3}+\frac{m^5z^5}{5}-\text{ecc.}\right);$$

poscia sostituendo $\frac{1}{x}$ a z; finita l'operazione si vede essere nulla la costante designata con L nella seconda delle equazioni (*e*).

Per conclusione la (*f*) ove mettansi per $F(\infty)$, $\Psi(\infty)$ i trovati valori, e ritengansi A, L eguali a zero dà

$$(i)\qquad \int_0^\infty dx\cdot\frac{\cos.rx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2m}e^{-mr}\,.$$

47. Possono vedersi nella citata memoria del signor Bidone altri esempj, per alcuno dei quali le costanti A, L nella precedente (*f*) non sono zero. Sul conto di tali costanti bisogna osservare l'ufficio che prestano per togliere una indeterminazione che sulle prime sembra rimanere, usando il metodo esposto. Agli integrali indefiniti e incompleti $F(x)$, $\Psi(z)$ si può togliere od aggiungere una parte costante qual più piace, la quale sparisce nelle differenze come $F(x)-F(0)$; ma nella formola (*f*) superiormente ottenuta sembra che non abbia luogo questa elisione della parte arbitraria. Se ben si rifletta però, aggiunta o sottratta una tale quantità costante ai secondi membri (*a*), (*c*), verrebbe anche aggiunta o sottratta alle costanti A, L nei secondi membri delle (*e*), e scomparirebbe nella (*f*) come negli integrali definiti presi al modo ordinario.

48. *Scolio.* Dissi che il metodo surriferito quantunque ingegnosissimo non va esente da difficoltà: infatti, che nella equazione (d) ove ad $F(x)$, $\Psi\left(\frac{1}{x}\right)$ si sostituiscono le espressioni (e), debbano far equazione da se le due parti contenenti essenzialmente la variabile, è questa una proposizione di cui io non so formarmi una dimostrazione al tutto soddisfacente. Per trovare ragionevole un tal dubbio, osservisi che se una delle funzioni $F(x)$, $\Psi\left(\frac{1}{x}\right)$ si sviluppi in una serie la quale contenga le sole potenze ascendenti, come può agevolmente farsi nell'esempio adotto svolgendo la frazione $\frac{1}{m^2+x^2}$ nella serie $\frac{1}{m^2}-\frac{x^2}{m^4}+\frac{x^4}{m^6}-$ecc., non è più vero che nella (d) le parti contenenti essenzialmente la variabile facciano equazione da se. Si provi e vedrassi, che se la cosa deve riuscire a buon termine, bisogna che nei due membri della (d) vi siano tanto le serie ascendenti quanto le discendenti: il che è lo stesso che dire, bisogna che vi siano due serie infinite delle quali quando una è convergente, l'altra è divergente. Conviene credere che allora l'errore portato dalle serie divergenti si bilanci in ambi i membri, e ne esca la verità. Basta, se non m'inganno, questa osservazione a persuadere che metodi simili all'esposto non possono più accontentare chi si attiene al rigore attualmente voluto nell'analisi.

49. Potrei qui dilungarmi a riferire le ricerche fatte sull'integrale $\int dx \cdot \frac{e^{-x}}{x}$ definito fra certi limiti, ma converrà piuttosto restringersi a qualche cenno per non invilupparsi in difficoltà della stessa indole di quella sopra toccata. Dirò solo che lo sviluppo in serie somministra subito l'integrale indefinito e incompleto

$$\int dx \cdot \frac{e^{-x}}{x} = \log. x - x + \frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{x^3}{3} + \text{ecc.}$$

da cui

$$(l)\quad \int_1^x dx \cdot \frac{e^{-x}}{x} = \log. x - x + \frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{x^3}{3} + \text{ecc.} - 0{,}7965996599$$

la quale frazion decimale equivale alla somma delle serie

$$1 - \frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{3} - \text{ecc.},$$

e che fatto $e^{-x}=z$, il proposto integrale si trasforma nell'altro

$$\int dz \cdot \frac{1}{\log. z},$$

di cui non potendosi avere l'espressione sotto forma finita e ordinaria, si creò (vedi num. 3) un nuovo trascendente chiamato da alcuni *iperlogaritmo*, o *logologaritmo*, o *logaritmo integrale*, ed è dotato di alcune notabili proprietà.

CAPO VIII.

Principali proprietà della funzione $\Gamma(p)$.

50. Considerando l'integrale definito

$$\int_0^1 dx \cdot \left(\log. \frac{1}{x}\right)^{p-1}$$

si capisce subito ch'esso è una funzione della sola p, la quale dopo Legendre, è dai Geometri comunemente indicata con $\Gamma(p)$. Si adottò questa maniera di scrivere come caratteristica di un nuovo trascendente (vedi num. 3) perchè la detta funzione di p non si trovò assegnabile sotto forma finita per quantità algebraiche, o per trascendenti esponenziali, logaritmici, o circolari; e nondimeno si dovette convenire ch'essa è di grand'uso nel calcolo integrale e per tutta l'analisi. Eulero fu il primo a trovarvi notabilissime proprietà, e però la *gamma* si denomina altresì il secondo integrale Euleriano. Esporrò qui alcune di queste proprietà che hanno relazione all'oggetto principale di questa opera, rimandando al Trattato degli integrali Euleriani del Legendre (Chap. VII, et suiv.) il lettore che desidera seguire il nuovo trascendente in tutti i particolari fino alla costruzione delle tavole.

51. Cominceremo ad osservare che l'equazione

$$(a) \qquad \Gamma(p) = \int_0^1 dx \cdot \left(\log. \frac{1}{x}\right)^{p-1}$$

si cambia nella

$$(b) \qquad \Gamma(p) = \int_0^\infty dx \cdot e^{-x} x^{p-1}$$

ponendo $x = e^{-y}$, e poi restituendo x in luogo d'y. Per veder ciò facciasi uso dei teoremi esposti ai numeri 10, 12, riflettendo che ai limiti $x = 0$, $x = 1$, corrispondono i valori $y = \infty$, $y = 0$. A dimostrare le proprietà di $\Gamma(p)$ si adopera, secondo torna più vantaggioso, l'una o l'altra delle due precedenti espressioni.

52. L'integrazione a parti dà

$$\int dx \cdot e^{-x} x^p = -e^{-x} x^p + p \int dx \cdot e^{-x} x^{p-1}$$

e da questa per la precedente (*b*) si ha subito l'equazione fondamentale

$$(c) \qquad \Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$$

quando sia provato che la funzione $e^{-x}x^p$ è eguale a zero tanto per $x=0$, quanto per $x=\infty$. Che lo sia per $x=0$, supposta p quantità positiva, si vede immediatamente; per rilevare poi che è zero anche quando $x=\infty$, conviene trasformarla mettendo $x=\frac{1}{z}$. Allora essa si riduce $\frac{1}{z^p e^{\frac{1}{z}}}$, e siccome ad $x=\infty$ corrisponde $z=0$, la proposizione sarà vera se $z=0$ renderà infinita la quantità $z^p e^{\frac{1}{z}}$, lo che si dimostra facilmente. Sostituiscasi ad $e^{\frac{1}{z}}$ il suo sviluppo, ed avrassi

$$z^p e^{\frac{1}{z}} = z^p + z^{p-1} + \frac{1}{2} z^{p-2} + \frac{1}{2\cdot 3} z^{p-3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} z^{p-4} + \text{ecc.}$$

dove le potenze di z decrescono all'infinito; talchè per quanto grande vogliasi p, siamo certi che arriveremo a un termine in cui avremo potenze negative, e sempre negative da quel termine in poi. Pertanto $z=0$ renderà nulli molti termini della serie precedente, ma dal punto in cui compajono le potenze negative renderà tutti i termini delle serie infiniti; e siccome questi termini sono tutti di segno positivo (condizione necessaria, perchè se i segni sono alternati il raziociuio può fallire) si conchiuderà che il valor della serie per $z=0$, e quindi anche il valore della funzione equivalente $z^p e^{\frac{1}{z}}$, è infinito. Non si può muovere alcun dubbio intorno a una tale dimostrazione appoggiandosi al detto nel Capo VI, perchè (num. 43) la serie infinita che si è sostituita ad $e^{\frac{1}{z}}$, è sempre convergente.

Adunque è dimostrata la (c) colla condizione che p sia quantità positiva.

53. Sì l'una che l'altra delle (a), (b) serve a provar subito la

$$(d) \qquad \Gamma(1)=1;$$

e la (c), ove facciasi $p=1$, dà pure

$$(e) \qquad \Gamma(2)=1$$

talchè $\Gamma(p)$ eguaglia l'unità tanto per $p=1$, quanto per $p=2$. La (c) dà poi, facendo $p=0$

$$(f) \qquad \Gamma(0)=\infty$$

che potevasi anche provare dietro il num. 49, riflettendo che la (b) ci porge

$$\Gamma(0)=\int_0^\infty dx\cdot\frac{e^{-x}}{x}.$$

Su quest'ultima (f) potrebbe muoversi una difficoltà che sarà tolta nel seguito.

54. Si cavano dalla (c) le due serie di equazioni

$$\begin{array}{ll}
\Gamma(p+1)=p\Gamma(p) & \Gamma(p+1)=p\Gamma(p) \\
\Gamma(p+2)=(p+1)\Gamma(p+1) & \Gamma(p)\quad=(p-1)\Gamma(p-1) \\
\Gamma(p+3)=(p+2)\Gamma(p+2) & \Gamma(p-1)=(p-2)\Gamma(p-2) \\
\vdots & \vdots \\
\Gamma(p+n+1)=(p+n)\Gamma(p+n) & \Gamma(p-n+1)=(p-n)\Gamma(p-n).
\end{array}$$

Ora se si moltiplicano fra loro tutte le equazioni della prima serie, e poi si divide l'equazione risultante pel fattore $\Gamma(p+1)\Gamma(p+2)\cdots\Gamma(p+n)$ comune ai due membri, si ha

$$(g)\qquad p(p+1)(p+2)(p+3)\cdots(p+n)=\frac{\Gamma(p+n+1)}{\Gamma(p)}.$$

In un modo affatto simile si deduce dalle equazioni della seconda serie la

$$(h)\qquad p(p-1)(p-2)(p-3)\cdots(p-n)=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n)}.$$

La (g) nella quale facciasi $p=1$, e mettasi $n-2$ in vece di n, somministra a motivo della (d)

$$(i)\qquad \Gamma(n)=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots(n-2)(n-1)$$

da cui si vede che $\Gamma(p)$, quando p è numero intero, non è più un trascendente, ma il prodotto di tutti i numeri interi positivi minori del dato.

55. Mettasi nella (g) $1-p$ per p, il che potrà farsi se alla condizione di p positiva si aggiunge la condizione di p minore dell'unità.
Risulterà

$$(1-p)(2-p)(3-p)(4-p)\cdots(n-p)=\frac{\Gamma(n+1-p)}{\Gamma(1-p)}$$

dopo aver posta $n-1$ in luogo di n. Il prodotto di questa e della (g) ci presenta, dividendo per p,

$$(1-p^2)(2^2-p^2)(3^2-p^2)(4^2-p^2)\cdots(n^2-p^2)=\frac{\Gamma(n+1-p)\Gamma(n+1+p)}{p\Gamma(p)\Gamma(1-p)}$$

che divisa per l'equazione identica a motivo della (i)

$$1^2\cdot2^2\cdot3^2\cdot4^2\cdots n^2=[\Gamma(n+1)]^2$$

può scriversi

$$\left(1-\frac{p^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{p^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{p^2}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{p^2}{n^2}\right)=\frac{\Gamma(n+1-p)\Gamma(n+1+p)}{[\Gamma(n+1)]^2}\cdot\frac{1}{p\Gamma(p)\Gamma(1-p)}.$$

Qui il primo fattore del secondo membro si accosta in valore continuamente all'unità più che n diventa grande, ed è l'unità stessa quando n si fa infinita:

allora

$$\left(1-\frac{p^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{p^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{p^2}{3^2}\right)\cdots \quad . \quad = \frac{1}{p\,\Gamma(p)\Gamma(1-p)}$$

dove è facile ridurre il primo membro a forma finita. Sappiamo essere (*)

$$\sin. u = u\left(1-\frac{u^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{u^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{u^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots$$

da cui, dividendo per u, e poi facendo $u = p\pi$

$$\frac{\sin. p\pi}{p\pi} = \left(1-\frac{p^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{p^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{p^2}{3^2}\right)\cdots.$$

Pertanto la trovata equazione si riduce alla

$$(l) \qquad \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin. p\pi}$$

molto importante nel calcolo del nostro trascendente. Eccone subito un osservabilissimo corollario: fatta $p = \frac{1}{2}$, ne discende

$$(m) \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

formola feconda di tante conseguenze, che pochi risultati in analisi ne presentano un numero maggiore.

56. Diansi a p nella (l) successivamente i valori

$$\frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \frac{3}{n},\ \cdots\ \frac{n-1}{n}$$

dove n esprime un numero intero positivo: risulteranno le $n-1$ equazioni

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{\pi}{\sin.\frac{\pi}{n}}\ ; \quad \Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right) = \frac{\pi}{\sin.\frac{2\pi}{n}}\ ;\ \cdots$$

$$\cdots\ \Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{\pi}{\sin.\frac{n-2}{n}\pi}\ ; \quad \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{\sin.\frac{n-1}{n}\pi}\ ;$$

si moltiplichino fra di loro tutte queste equazioni, nelle ultime delle quali è visibilmente ripetuto il primo membro delle prime; avremo nel primo membro dell'equazione risultante il quadrato della quantità $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)$,

(*) Eulero. *Int. in analysin inf.* Tom. I, num. 158.

e però estraendo la radice

$$(n)\qquad \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{\left\{\sin.\frac{\pi}{n}\,\sin.\frac{2\pi}{n}\cdots\sin.\frac{n-1}{n}\,\pi\right\}}}\,.$$

Ora osservisi essere

$$\sin.\frac{\pi}{n}=2\sin.\frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\cos.\frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}=2\sin.\frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\sin.\frac{n-1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\sin.\frac{2\pi}{n}=2\sin.\frac{2}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\cos.\frac{2}{n}\cdot\frac{\pi}{2}=2\sin.\frac{2}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\sin.\frac{n-2}{n}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots$$

$$\sin.\frac{n-1}{n}\pi=2\sin.\frac{n-1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\cos.\frac{n-1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}=2\sin.\frac{n-1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\sin.\frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}$$

e dal prodotto di tutte queste equazioni si caverà

$$(o)\qquad \sin.\frac{\pi}{n}\sin.\frac{2\pi}{n}\cdots\sin.\frac{n-1}{n}\pi=2^{n-1}\left\{\sin.\frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\sin.\frac{2}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\cdots\sin.\frac{n-1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right\}^2.$$

Ci conviene presentemente occuparci di quest'altro ragionamento. La nota risoluzione dell'equazione a due termini ci fa capire che la quantità $x^{2n}-1$, in cui n è numero qualunque positivo ed intero, può risolversi in un numero n di fattori, dei quali $n-1$ sono trinomiali: si ha cioè

$$x^{2n}-1=(x^2-1)\left(x^2-2x\cos.\frac{\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos.\frac{2\pi}{n}+1\right)\cdots\left(x^2-2x\cos.\frac{n-1}{n}\pi+1\right);$$

per un'altro verso abbiamo identicamente

$$x^{2n}-1=(x^2-1)(x^{2n-2}+x^{2n-4}+x^{2n-6}+\cdots+x^2+1);$$

confrontando adunque i due valori di $x^{2n}-1$, e dividendo per x^2-1, formeremo l'equazione identica con n qualunque

$$\left(x^2-2x\cos.\frac{\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos.\frac{2\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos.\frac{3\pi}{n}+1\right)\cdots\left(x^2-2x\cos.\frac{n-1}{n}\pi+1\right)$$

$$=x^{2n-2}+x^{2n-4}+x^{2n-6}+\cdots+x^2+1$$

dove i termini del secondo membro sono n di numero. Facciasi in questa $x=1$; il fattore trinomiale generico $x^2-2x\cos.\frac{h}{n}\pi+1$ che può rappresentare uno qualunque dei fattori del primo membro, si cangia in $2\left(1-\cos.\frac{h}{n}\pi\right)=4\left(\sin.\frac{h}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)^2$, e il secondo membro diventa n: quindi

$$2^{2(n-1)}\left\{\sin.\frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\sin.\frac{2}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\sin.\frac{3}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\cdots\sin.\frac{n-1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right\}^2=n\,.$$

Una tal formola cangia la (o) nella

$$\sin.\frac{\pi}{n}\sin.\frac{2\pi}{n}\sin.\frac{3\pi}{n}\cdots\sin.\frac{n-1}{n}\pi=\frac{n}{2^{n-1}}$$

e la (n) in conseguenza diventa

$$(p)\qquad \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}$$

formola interessante che contiene la (m) come caso assai particolare.

57. Uno dei vantaggi della funzione $\Gamma(p)$ si è quello di darci per mezzo del suo logaritmo l'espressione dell'integrale finito $\Sigma\log.p$ preso per la p, essendo l'aumento finito eguale all'unità. Un tale integrale è noto soltanto mediante una di quelle funzioni che Eulero chiama inesplicabili, cioè per $\log.(p-1)(p-2)(p-3)\cdots+\text{Cost.}$ e non può servire se non nel caso che p significhi un numero intero e positivo. Era dunque desiderabile di avere $\Sigma\log.p$, come si hanno $\Sigma\sin.p$, Σa^p, ecc., cioè mediante formole che lasciano alla p la sua generalità. Ora è $\Sigma\log.p=\log.\Gamma(p)$ e può subito dimostrarsi prendendo la differenza di questa equazione e passando dai logaritmi ai numeri, ciò che riproduce l'equazione (c). Siccome poi la precedente espressione è evidentemente un integrale particolare, avremo il completo per la formola

$$\Sigma\log.p=\log.\Gamma(p)+\text{Cost.}$$

e più generalmente per la seguente

$$(q)\qquad \Sigma\log.p=\log.\Gamma(p)+\log.\phi(\sin.2p\pi)$$

ovvero

$$(r)\qquad \Sigma\log.p=\log.\phi(\sin.2p\pi)\,\Gamma(p)$$

essendo ϕ una funzione arbitraria di $\sin.2p\pi$. Tra i molti vantaggi che possono ricavarsi dal trovato integrale notabilissimo è quello avvertito dal Paoli (*) di potere col suo mezzo dimostrare speditamente alcuni interessanti teoremi che altrimenti sono conseguenze di lunghi calcoli. Ritenendo la sostanza delle dimostrazioni di questo grande geometra, mi si concederà di allungarle di qualche poco per toglierne, dove è possibile, l'ipotesi di cui egli fece uso, e provare che i teoremi sono veri in generale.

58. Dalla (g), ove mettasi $n-1$ per n, e quindi np in luogo di p, si deduce

$$\frac{\Gamma\big(n(p+1)\big)}{\Gamma(np)}=n^np\left(p+\frac{1}{n}\right)\left(p+\frac{2}{n}\right)\left(p+\frac{3}{n}\right)\cdots\left(p+\frac{n-1}{n}\right).$$

(*) Memorie della Società Italiana, Tom. XX, pag. 260.

Prendendo i logaritmi, la quantità $\log.\Gamma\big(n(p+1)\big)-\log.\Gamma(np)$ che risulta nel primo membro è veramente la differenza finita di $\log.\Gamma(np)$ presa per p nella supposizione dell'aumento eguale all'unità; quindi integrando

$$\log.\Gamma(np)=np\log.n+\Sigma\log.p+\Sigma\log.\left(p+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\Sigma\log.\left(p+\frac{n-1}{n}\right).$$

Mettansi qui nel secondo membro in luogo delle somme le quantità equivalenti somministrate dalla (r): nè faccia difficoltà l'esservi in tutte, fuori della prima, la variabile p aumentata di una costante che non trovasi nel primo membro della stessa (r), giacchè si può benissimo in questa (r) surrogare $p+a$ a p, essendo $p+a$ una quantità che aumenta dell'unità egualmente come p. Otterremo passando dai logaritmi ai numeri

$$\Gamma(np)=\psi(\sin.2p\pi,\,n)n^{np}\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(p+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(p+\frac{n-1}{n}\right)$$

avendo posto per compendio $\psi(\sin.2p\pi,\,n)$ in luogo della espressione

$$\phi(\sin.2p\pi)\,\phi\left(\sin.2\left(p+\frac{1}{n}\right)\pi\right)\phi\left(\sin.2\left(p+\frac{2}{n}\right)\pi\right)\cdots\phi\left(\sin.2\left(p+\frac{n-1}{n}\right)\pi\right).$$

A provare che nell'ottenuta equazione la funzione arbitraria ψ non può contenere la p, basta, per quanto parmi, fare in essa $n=1$, giacchè ne viene $\Gamma(p)=\phi(\sin.2p\pi)\Gamma(p)$, e quindi $\phi(\sin.2p\pi)=1$. Sarà dunque ψ funzione solamente di n: per determinarla pongasi $p=\frac{1}{n}$, e a motivo della formola (p) trovata al num. 56 avremo

$$\Gamma(1)=\psi(n)n\Gamma(1)\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}};$$

cavato da questa il valore di $\psi(n)$ e sostituito nell'ultima equazione, risulta

$$(s)\qquad \Gamma(np)=n^{np-\frac{1}{2}}.\frac{\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(p+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(p+\frac{n-1}{n}\right)}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}.$$

formola d'importanza primaria pel calcolo del nostro trascendente.

59. Un altro integrale definito, che chiamasi il primo integrale Euleriano, è niente meno del *gamma* celebre nel calcolo integrale; siccome però esso si riduce a questo secondo mediante una formola elegantissima, non dirò delle sue proprietà se non quanto è necessario per trovare tal formola. Esso è

$$(t)\qquad \int_0^1 dx\cdot x^{p-1}(1-x)^{q-1}=(p,\,q)$$

e si è adottato d' indicarlo compendiosamente per (p, q) espressione in cui sono marcati entrambi i suoi elementi p, q, che debbono essere quantità positive. Ecco le proprietà che accennai.

1.° Si trasformi l'integrale ponendo $x=1-y$, avremo

$$(p,q)=-\int_1^0 dy\cdot(1-y)^{p-1}y^{q-1}=\int_0^1 dy\cdot y^{q-1}(1-y)^{p-1}$$

cioè lo stesso integrale da cui siamo partiti ove sono permutate le lettere p, q. Adunque una tale permutazione non ne altera il valore e si ha

$$(u) \qquad (p,q)=(q,p).$$

2.° Osservisi l'equazione identica $(1-x)^q=(1-x)^{q-1}-x(1-x)^{q-1}$ e si riconoscerà identica anche la seguente fra integrali indefiniti

$$\int dx\cdot x^{p-1}(1-x)^q=\int dx\cdot x^{p-1}(1-x)^{q-1}-\int dx\cdot x^p(1-x)^{q-1}.$$

Passando alle definizioni fra *zero*, 1, e adottando la notazione (t), si caverà

$$(x) \qquad (p,q+1)+(p+1,q)=(p,q).$$

3.° L'integrazione a parti o la posteriore derivazione convince subito della seguente equazione fra integrali indefiniti

$$\int dx\cdot x^{p-1}(1-x)^q=\frac{1}{p}x^p(1-x)^q+\frac{q}{p}\int dx\cdot x^p(1-x)^{q-1}.$$

Si passi ai definiti fra *zero*, 1, e si osservi che la parte del secondo membro non affetta da segno integrale svanisce in ambi i limiti: conchiuderassi

$$\int_0^1 dx\cdot x^{p-1}(1-x)^q=\frac{q}{p}\int_0^1 dx\cdot x^p(1-x)^{q-1} \quad \text{ossia}$$

$$(y) \qquad \frac{1}{q}(p,q+1)=\frac{1}{p}(p+1,q).$$

60. Eliminando $(p+1,q)$ dalle precedenti (x), (y) viene

$$(p,q+1)=\frac{q}{p+q}(p,q)$$

e prendendo i logaritmi

$$\log.(p,q+1)-\log.(p,q)=\log.q-\log(p+q).$$

Il primo membro dell' ottenuta equazione può riguardarsi come la differenza finita di $\log.(p,q)$ presa parzialmente per la q; quindi integrando

$$\log.(p,q)=\Sigma\Delta q\cdot\log.q-\Sigma\Delta q\cdot\log.(p+q)$$

dove ho assunta, come già altrove (*), la notazione $\Sigma\Delta q$ invece della semplice Σ per indicare la variabile relativamente alla quale deve integrarsi. Sostituisco agli integrali del secondo membro le espressioni equivalenti date dalla formola (r), e marcando nella funzione arbitraria l'altra variabile p trattata come una costante, conchiudo

$$(p, q) = \phi(\sin. 2q\pi, p)\frac{\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Ora si permutino le lettere p, q: il primo membro non cambia di valore (equazione (u)), epperò dall'eguaglianza dei secondi membri si caverà facilmente

$$\frac{\phi(\sin. 2q\pi, p)}{\Gamma(p)} = \frac{\phi(\sin. 2p\pi, q)}{\Gamma(q)}.$$

Quest'equazione ci dice che la quantità $\frac{\phi(\sin. 2q\pi, p)}{\Gamma(p)}$ rimane costante al variare di p; adunque non può essere che una funzione di $\sin. 2p\pi$. La esprimo per $\psi(\sin. 2q\pi, \sin. 2p\pi)$, e cavato dalla equazione che ne risulta il valore di $\phi(\sin. 2q\pi, p)$, riduco la trovata formola alla

$$(p, q) = \psi(\sin. 2p\pi, \sin. 2q\pi)\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

dove rimane ancora a determinarsi la funzione arbitraria.

61. Quando sia $q=1$, l'equazione fondamentale (t) dà subito $(p, 1) = \frac{1}{p}$, e per essere $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, $\Gamma(1) = 1$ si ha dalla precedente

$$\psi(\sin. 2p\pi, 0) = 1\ ;$$

convien dunque dire che $\sin. 2p\pi$ o non siavi nella ψ, o se vi è, siavi in qualche parte di essa moltiplicata per $\sin. 2q\pi$, la quale osservazione basta per conchiudere che la ψ è sempre l'unità quando una delle due quantità p, q è numero intero. Estendere l'equazione

$$(z) \qquad (p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

dimostrata vera quando o p o q è numero intero alla supposizione di p, q quantità qualunque, è cosa di cui lo stesso Paoli non potè venire a capo senza mettere un'ipotesi: vedremo però più tardi un altro andamento di calcolo che prova la (z) in generale.

(*) Memorie della Società Italiana. Tom. XX, pag. 651.

62. Le facoltà numeriche del Kramp o i fattoriali del Vandermonde sono espressioni di cui si può fare a meno in analisi dopo l'introduzione del *gamma*. Chiamasi fattoriale e s'indica per $[p]^n$ il prodotto di un numero n di fattori decrescenti per una stessa differenza eguale all'unità; si ha cioè

$$(aa) \qquad [p]^n = p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)\,.$$

Questo modo di scrivere fu in prima introdotto per abbreviazione, motivo per avventura non sufficiente a giustificare l'uso d'una nuova notazione; in seguito, del fattoriale, che quando n è numero intero è una funzione intera, se ne è fatto un trascendente per n numero fratto. Ma, come notollo il Legendre, l'equazione (aa) in cui sta la definizione del fattoriale, non somministra allora più alcun senso. Se però a cagione della precedente equazione (h) (num. 54) si osserva essere

$$(bb) \qquad [p]^n = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-n)}\,;$$

il secondo membro di questa equazione mantiene al primo un senso nel caso di n numero fratto; giacchè la Γ è una funzione che sostiene il suo significato anche quando il suo elemento è frazionario. Pertanto l'equazione (bb) esprime una *proprietà di relazione* tra il fattoriale e la *gamma* nel caso di n numero intero, e deve considerarsi una *definizione* nel caso del fattoriale ad esponente fratto diretta a stabilire il senso di quest'ultimo. Noterò che l'equazione (bb) è stata data la prima volta dal sig. Cisa de Gresy (*).

Può ancora domandarsi come si debba interpretare il fattoriale $[p]^n$ nel caso che n sia una frazione impropria maggiore di $p+1$, perchè allora nella (bb) compare una *gamma* ad elemento negativo, il che è un altro imbarazzo dovendo tale elemento (rivedi il num. 52) essere positivo. Si risponde che colla (aa) può verificarsi subito quest'altra

$$(cc) \qquad [p]^{i+n} = [p-n]^i\,[p]^n$$

quando i, n sono numeri interi. Essendo uno di essi, per es. n, numero fratto si ritiene il secondo membro della precedente (cc) onde spiegare il senso del primo; al fattore $[p-n]^i$ si dà il significato chiarissimo della (aa), e il fattore $[p]^n$ s'interpreta colla (bb). Conseguenza di questo ragionamento è che nella (bb) col fattoriale ad esponente frazionario può questo ritenersi una frazione minore dell'unità.

63. *Scolio.* I due numeri precedenti servono a provare una non piccola utilità del trascendente *gamma*, giacchè vi si vedono ridotti due altri trascendenti celebri, (p, q), $[p]^n$. Esso ha sui medesimi il grande vantaggio di contenere

(*) Memorie della reale Accademia delle Scienze di Torino. Tom XXVI, pag. 252.

un solo elemento invece di due: talchè, ridotto a tavole, riescono queste a semplice e non a doppia entrata. Tali tavole sono poi assai più brevi di quello che può sembrare a prima vista. Osservando l' equazione (g) si capisce senza difficoltà come si abbia prontamente la *gamma* di qualunque numero (che a maggior comodo si esprime per mezzo del suo logaritmo) quando il trascendente sia calcolato pei soli numeri compresi fra *zero* e 1, ovvero fra 1 e 2. Diede il Legendre simili tavole computate di millesimo in millesimo e con dodici decimali: e vi aggiunse le differenze prime, seconde e terze all'oggetto di facilitare la ricerca del valore del trascendente pei valori intermedj dell' *argomento* usando il metodo d' interpollazione (*).

CAPO IX.

Prime applicazioni e conseguenze della funzione gamma.

64. La funzione *gamma* occorre in varie espressioni d' integrali definiti; a mostrarne immediatamente l'uso riprendasi l'equazione di posizione

$$\int_0^\infty dx \cdot e^{-x} x^{p-1} = \Gamma(p) \, ;$$

facciasi $x = ay^n$ essendo a, n quantità positive, e osservando che i limiti rimangono i medesimi, si otterrà

$$na^p \int_0^\infty dy \cdot e^{-ay^n} y^{np-1} = \Gamma(p) \, ;$$

ora si ponga $np = q$, e si rimetta l' x, avrassi

$$(a) \qquad \int_0^\infty dx \cdot e^{-ax^n} x^{q-1} = \frac{1}{na^{\frac{q}{n}}} \Gamma\left(\frac{q}{n}\right)$$

formola assai rimarcabile. Quando $q=1$, $a=1$, $n=2$, ne discende per essere (num. 55) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$$(b) \qquad \int_0^\infty dx \cdot e^{-x^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

che è una delle più note in questo ramo di calcolo.

65. Applicando alla precedente formola il primo corollario del num. 22 se ne inferisce

$$\int_{-\infty}^\infty dx \cdot e^{-x^2} = \sqrt{\pi} \, .$$

(*) *Traité des Fonctions Elliptiques et des Integrales Euleriennes.* Tom. II, pag. 489.

Facciasi in questa $x = y + a$ essendo a una qualunque quantità reale: i limiti rimangono gli stessi, giacchè il non soffrir cambiamento per l'aggiunta o la sottrazione di una qualunque quantità finita è appunto quella proprietà che costituisce la natura dell'infinito matematico; dedurremo dalla surriferita l'equazione

$$e^{a^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \cdot e^{-y^2} \cdot e^{-2ay};$$

mettansi per e^{a^2}, e^{-2ay} i corrispondenti sviluppi in serie, e scomponendo il secondo membro in una somma d'integrali per ciascuno dei quali può tirarsi fuori del segno la corrispondente potenza della a, facciasi l'osservazione che a motivo della indeterminata a dovranno eguagliarsi i coefficienti delle eguali potenze di essa nei due membri. Rilevando allora che nel secondo membro si hanno potenze dispari di a che non sono nel primo, concluderemo in generale

$$(\gamma) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dy \cdot y^{2n-1} e^{-y^2} = 0;$$

e dal confronto dei coefficienti di a^{2n} avremo

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} = \frac{2^{2n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n \cdot \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \cdot y^{2n} e^{-y^2};$$

riflettendo quindi all'identità numerica

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdots (2n-1) \cdot 2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

ci risulterà

$$(\delta) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dy \cdot y^{2n} e^{-y^2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}.$$

Questa maniera elegantissima di dimostrare le formole (γ), (δ) devesi a Fourier (*); la prima di esse però si poteva dedurre immediatamente dal secondo corollario del num. 22.

65. Laplace ha fatto un uso felice delle precedenti (γ), (δ) nel seguente modo (**). Si sviluppi $\varphi(x + 2\theta y)$ col teorema di Taylor, essendo φ simbolo di funzione qualunque:

$$\varphi(x + 2\theta y) = \varphi(x) + \varphi'(x)\frac{2y\theta}{1} + \varphi''(x)\frac{2^2 y^2 \theta^2}{1 \cdot 2} + \varphi'''(x)\frac{2^3 y^3 \theta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$
$$+ \varphi^{IV}(x)\frac{2^4 y^4 \theta^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \varphi^{V}(x)\frac{2^5 y^5 \theta^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \text{ecc.}$$

(*) *Théorie de la Chaleur*, pag. 467.
(**) *Journal Polyt.* Cah. XV, pag. 240.

ora si moltiplichi per e^{-y^2} tutta l'equazione, e poi si integri per y fra i limiti $-\infty$, ∞; osservando le formole

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \cdot y e^{-y^2} = 0\,; \quad \int_{-\infty}^{\infty} dy \cdot y^3 e^{-y^2} = 0\,; \text{ ecc.}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \cdot e^{-y^2} = \sqrt{\pi}\,; \quad \int_{-\infty}^{\infty} dy \cdot y^2 e^{-y^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,; \quad \int_{-\infty}^{\infty} dy \cdot y^4 e^{-y^2} = \frac{1\cdot 3}{2^2}\sqrt{\pi}\,; \text{ ecc.}$$

che sono altrettanti casi particolari delle (γ), (δ), avrassi

$$(\varepsilon) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dy \cdot \varphi(x + 2\theta y) e^{-y^2}$$

$$= \sqrt{\pi}\left\{\varphi(x) + \varphi''(x)\theta^2 + \varphi^{IV}(x)\frac{\theta^4}{2} + \varphi^{VI}(x)\frac{\theta^6}{2\cdot 3} + \varphi^{VIII}(x)\frac{\theta^8}{2\cdot 3\cdot 4} + \text{ecc.}\right\}.$$

Il teorema espresso in questa equazione è di alta importanza per un oggetto di cui verrà occasione di parlare nella seconda Sezione del presente Trattato; ma può anche servire a ottenere risultati analoghi a quelli considerati in questa prima Sezione tutte le volte che la serie del secondo membro è convergente e sommabile.

66. Sia per un esempio $\varphi(x) = \cos.x$ avremo

$$\varphi''(x) = -\cos.x\,; \quad \varphi^{IV}(x) = \cos.x\,; \quad \varphi^{VI}(x) = -\cos.x\,; \quad \varphi^{VIII}(x) = \cos.x\,; \text{ ecc.}$$

quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \cdot \cos.(x + 2\theta y) e^{-y^2} = \sqrt{\pi}\cos.x\left\{1 - \theta^2 + \frac{\theta^4}{2} - \frac{\theta^6}{2\cdot 3} + \frac{\theta^8}{2\cdot 3\cdot 4} - \text{ecc.}\right\};$$

si vede manifestamente che la serie del secondo membro è sommabile, ed espressa da $e^{-\theta^2}$: adunque

$$(\zeta) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dy \cdot \cos.(x + 2\theta y) e^{-y^2} = \sqrt{\pi}\cos.x e^{-\theta^2}.$$

Qui la x è qualunque: facciasi eguale a zero, indi si applichi il primo corollario del num. 22 per ridurre alla metà il corso della variabile: otterremo

$$\int_{0}^{\infty} dy \cdot \cos.(2\theta y) e^{-y^2} = \frac{1}{2} e^{-\theta^2}\sqrt{\pi}\,;$$

cangisi la variabile ponendo $y = x\sqrt{a}$ dove a è una quantità qualunque positiva, e in seguito mettasi $2\theta\sqrt{a} = b$ nuova indeterminata, conchiuderassi

$$(\eta) \qquad \int_{0}^{\infty} dx \cdot e^{-ax^2}\cos.bx = \frac{1}{2} e^{-\frac{b^2}{4a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

formola di grand' uso.

67. Il calcolo delle differenze finite ha in confronto del calcolo differenziale ordinario un difetto osservabile (*), quello di non poter assegnare l'integrale della formola semplicissima $\frac{1}{p}$; un tale difetto è ora tolto, come quello indicato al num. 57 mediante il nuovo trascendente. Presi i logaritmi nei due membri dell'equazione $\Gamma(p+1)=p\,\Gamma(p)$, e fatta per brevità

$$(\vartheta) \qquad Z(p)=\log.\Gamma(p)$$

abbiamo $Z(p+1)-Z(p)=\log.p$; questa si derivi per p, viene

$$Z'(p+1)-Z'(p)=\frac{1}{p}$$

da cui integrando per p nel sistema delle differenze finite coll'aumento 1:

$$(\iota) \qquad \Sigma\,\frac{1}{p}=Z'(p)+\text{Cost.}=\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)}+\text{Cost.}$$

dove gli apici indicano le derivate alla maniera di Lagrange.

Conviene però rammentarsi anche qui che la costante può cambiarsi con una funzione arbitraria di $\sin.2\pi p$.

68. Una bella applicazione della formola (ι) è stata fatta dal Paoli (**) per la ricerca del valore dell'integrale

$$\int_0^1 dx\cdot\frac{x^{p-1}-x^{r-1}}{1-x}$$

dove p, r sono numeri qualunque positivi. Abbiamo dalla (ι) del num. 59

$$(\varkappa) \qquad (p,0)=\int_0^1 dx\cdot\frac{x^{p-1}}{1-x}$$

quindi

$$(p+1,0)-(p,0)=\int_0^1 dx\cdot\frac{x^p-x^{p-1}}{1-x}=-\int_0^1 dx\cdot x^{p-1}=-\frac{1}{p}.$$

Integriamo nel sistema delle differenze finite, essendo p la variabile ed 1 l'aumento: ci verrà

$$(\lambda) \qquad (p,0)=-\Sigma\,\frac{1}{p}$$

e per la (ι)

$$(p,0)=-Z'(p)+\text{Cost.}$$

(*) Lacroix. *Traité du Calcul.* Tom. III, pag. 86.
(**) Memorie della Società Italiana. Tom. XX, pag. 266.

Essendo r un altro numero positivo avrassi parimenti

$$(r,0) = -Z'(r) + \text{Cost}.$$

Sottraggasi quest'equazione dalla precedente: si otterrà

$$(p,0)-(r,0)=Z'(r)-Z'(p)$$

ossia, sostituendo ai due termini del primo membro gl'integrali equivalenti per la $(\varkappa)$

$$(\mu) \qquad \int_0^1 dx \cdot \frac{x^{p-1}-x^{r-1}}{1-x} = Z'(r)-Z'(p).$$

69. Anche l'integrale $\int_0^1 dx \cdot \frac{x^{a-1}}{1+x}$, ove a è un numero qualunque positivo, può ridursi alle funzioni Z': ecco l'artificio usato dal sig. Legendre (*). Abbiamo evidentemente

$$\int_0^1 dx \cdot \frac{x^{a-1}}{1+x} = \int_0^1 dx \cdot \frac{x^{a-1}-x^a}{1-x^2};$$

ora si faccia $x=y^{\frac{1}{2}}$ da cui $y=x^2$, e si vedrà che i limiti rimangono gli stessi, ottenendo

$$\int_0^1 dx \cdot \frac{x^{a-1}}{1+x} = \frac{1}{2}\int_0^1 dy \cdot \frac{y^{\frac{a}{2}-1}-y^{\frac{a}{2}-\frac{1}{2}}}{1-y}.$$

Il secondo membro di questa è confrontabile col primo della precedente formola (μ) ponendo $p=\frac{a}{2}$, $r=\frac{a+1}{2}$.

Adunque a motivo della stessa (μ)

$$(\nu) \qquad \int_0^1 dx \cdot \frac{x^{a-1}}{1+x} = \frac{1}{2}Z'\left(\frac{a+1}{2}\right) - \frac{1}{2}Z'\left(\frac{a}{2}\right).$$

70. Vedemmo l'uso della funzione $Z'(p)$, derivata prima per p della $\log.\Gamma(p)$, all'oggetto di determinare i valori di alcuni integrali definiti: terminerò questo Capo col mostrare, dietro la scorta di Paoli e di Legendre, l'uso della funzione $Z^{(n)}(p)$, derivata (n) esima per p della stessa $\log.\Gamma(p)$, all'oggetto di trovare la somma di una serie infinita che frequentemente occorre.

La serie è

$$\frac{1}{p^n} + \frac{1}{(p+1)^n} + \frac{1}{(p+2)^n} + \text{ecc.}$$

(*) *Exercices de Calcul Intégral.* Vme P. num. 4.

dove n è un numero intero positivo. Se ne indichi la somma per $s(p,n)$ funzione di p, n che trattasi di voler conoscere.

Abbiamo derivando per p

$$s'(p, n) = -n\left(\frac{1}{p^{n+1}} + \frac{1}{(p+1)^{n+1}} + \frac{1}{(p+2)^{n+1}} + \text{ecc.}\right) = -n\,s(p, n+1).$$

Di qui

$$s(p, n+1) = -\frac{1}{n}\,s'(p, n);$$

e diminuendo successivamente n di una unità

$$s(p, n) = -\frac{1}{n-1}\,s'(p, n-1)$$

$$s(p, n-1) = -\frac{1}{n-2}\,s'(1, n-2)$$

$$\vdots$$

$$s(p, n-m) = -\frac{1}{n-m-1}\,s'(p, n-m-1).$$

Cavasi da queste per continuata sostituzione

$$s(p, n) = \frac{1}{(n-1)(n-2)}\,s''(p, n-2)$$

$$= -\frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)}\,s'''(p, n-3)$$

e in generale

$$(\xi) \qquad s(p, n) = \pm\frac{1}{(n-1)(n-2)\cdots(n-m)}\,s^{(m)}(p, n-m)$$

dove nel secondo membro m è anch'essa un numero intero qualunque indipendente da n, ed ha luogo il segno $+$ se m è pari, il $-$ se m è dispari. Fatta $m=n-2$ la precedente formola dà

$$(o) \qquad s(p, n) = \pm\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)}\,s^{(n-1)}(p, 1)$$

col segno $+$ se n è dispari, e col $-$ se n è pari: circostanza che indicheremo mettendo al secondo membro il fattore $-(-1)^n$.

Notisi essere per la primitiva denominazione

$$s(p, 1) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \text{ecc.}$$

quindi

$$s(p+1,1)=\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}+\text{ecc.}$$

e sottraendo l'una all'altra queste due equazioni

$$s(p+1,1)-s(p,1)=-\frac{1}{p}.$$

S'integri per p nel sistema delle differenze finite coll'aumento 1, avremo

$$s(p,1)=-\Sigma\frac{1}{p}$$

ossia a motivo della formola (ι) del num. 67

$$s(p,1)=-Z'(p)+\text{Cost.}$$

e questo valore sostituito nella (o) darà la formola desiderata

$$(\pi)\qquad s(p,n)=\frac{(-1)^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}Z^{(n)}(p)$$

la quale comincia ad essere giusta da $n=2$ in avanti, ma non lo è per $n=1$, giacchè in tal caso non si elimina colla derivazione la costante del valore di $\Sigma\frac{1}{p}$ dato dalla (ι) (*).

Per vederne un uso particolare; quando $n=2$ abbiamo dalla (π) ove sostituiscasi a $Z''(p)$ il suo valore dedotto dalla (ϑ)

$$(\rho)\qquad \frac{1}{p^2}+\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{1}{(p+2)^2}+\text{ecc.}=\frac{\Gamma''(p)}{\Gamma(p)}-\left(\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)}\right)^2.$$

Simili espressioni potranno farsi per $n=3$, $n=4$, ecc. contenenti nei secondi membri $\Gamma'''(p)$, $\Gamma^{\text{IV}}(p)$, ecc. E siccome quando n è pari, e p numero intero, le somme delle serie de' primi membri sono altrimenti note (**), potranno aversi relazioni curiose fra i valori delle funzioni $\Gamma(p)$, $\Gamma'(p)$, $\Gamma''(p)$, ecc. nel caso particolare di p numero intero.

(*) *Exercices de Calcul Intégral* IVme P. num. 21.

(**) Eulero. *Introductio in analysin inf.* T. I, num. 170.

(sarà continuato)

PARTE PRIMA

LA MECCANICA
DE' CORPI NATURALMENTE ESTESI
TRATTATA COL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

DI

GABRIO PIOLA

INTRODUZIONE

La Meccanica de' corpi estesi secondo le tre dimensioni, solidi e fluidi d'ogni sorta, è stata recentemente promossa mediante le ricerche di due insigni geometri francesi Poisson e Cauchy i quali trattarono problemi assai difficili per l'addietro non toccati. Il secondo di essi ne' suoi *Esercizj di Matematica* diede alcune soluzioni in doppio, cioè nell'ipotesi della materia continua, e nell'ipotesi della materia considerata come l'aggregato di molecole distinte a piccolissime distanze: il primo invece, credendo (*) che la supposizione della materia continua non basti a rendere ragione di tutti i fenomeni della natura, si attenne di preferenza all'altra supposizione, bramando rifare con essa da capo tutta la Meccanica (**). Prima dei sullodati geometri, Lagrange avea trattati varii problemi relativi alla meccanica de' solidi e de' fluidi, creando una nuova scienza per queste come per tutte le altre quistioni di equilibrio e di moto: intendo parlare della Meccanica Analitica, opera cui anche oggidì si danno molte lodi, e viene chiamata la vera meccanica filosofica (***), ma che nel fatto si riguarda poco più che un oggetto di erudizione. Avendo io avuta nella mia prima giovinezza particolare occasione di fare su quest'opera uno studio pertinace (****), erami formata un'idea così elevata della generalità e della forza de' suoi metodi, che giunsi a riputarli, in confronto dei metodi antecedentemente usati, un prodigio d'invenzione non minore di quello del cal-

(*) *Mémoires de l'Institut de France.* Tom. VIII, pag. 400.
(**) *Ibid.* pag. 361.
(***) *Ibid.* Tom. X, *Eloge de Laplace.*
(****) *Sull'applicazione de' principj della M. A. di Lagrange.* Memoria coronata dall'Istituto Italiano.

colo differenziale e integrale in confronto dell'analisi cartesiana: e pensai e scrissi essere impossibile che per l'innanzi ogni ricerca di meccanica razionale non si facesse per questa via. Esaminate in seguito le recenti memorie, e avendo notato come in esse non si faccia uso (se non forse qualche rara volta in maniera secondaria) dell'analisi che tanto mi avea colpito, credetti d'essermi ingannato, che cioè le nuove questioni di meccanica non si potessero assoggettare ai metodi della Meccanica Analitica. Provai però a convincermene anche per mezzo di un esperimento: e allora fu molta la mia sorpresa nell'accorgermi che in quella vece esse vi si accomodano egregiamente, e ne ricevono molta chiarezza: un andamento di dimostrazione che accontenta lo spirito: conferma in alcuni luoghi: cangiamento in alcuni altri: e quel che è più, aggiunta di nuovi teoremi. Ecco il motivo che mi determinò a pubblicare una serie di Memorie sull'enunciato argomento, per tentare di ridurre alla mia opinione qualche lettore: ma innanzi alle prove di fatto pensai mettere alcune riflessioni generali dirette a indicare, per quanto almeno è della mia capacità, il profondo di quella sapienza che trovasi nella maggior opera del sommo Geometra italiano.

I. La generalità dei metodi è ragione assai forte per indurci a preferirli ad altri più particolari. Nessuno leggerebbe di presente uno scritto in cui si proponesse di tirare le tangenti alle curve con alcuno dei metodi che precedettero il leibniziano, nè farebbe buona accoglienza alla quadratura di uno spazio piano curvilineo conchiusa dietro ragionamenti simili a quelli con cui Archimede quadrò la parabola. Ora l'aver trovato nel calcolo delle variazioni quel punto altissimo in cui si uniscono tutte le questioni di meccanica, e possono in conseguenza essere tutte trattate di una maniera uniforme, è forse qualche cosa di meno grande che l'aver trovata la prima questione geometrica solubile in generale per mezzo della derivata, e la seconda per mezzo della primitiva dell'ordinata che riguardisi come funzione dell'ascissa? (Veggasi la M. A. Tom. I, pag. 74, num. 1).

II. Il metodo della M. A. non risulta (se ben si esamina) dalla traduzione in analisi di un solo e semplice principio meccanico, ver. gr. del principio del parallelogrammo, o del principio di D'Alembert: è un metodo che può dirsi l'elaborato di tutti i principj successivamente scoperti nella meditazione delle leggi della natura, e che però colla riunita potenza di tutti si fa strada alla soluzione de' problemi. È noto che un principio meccanico di massimo o minimo trovato da Eulero dietro la considerazione delle cause finali e sviluppato nel secondo supplemento al suo libro *Methodus inveniendi lineas curvas* ecc., è quello da cui prese Lagrange le prime mosse per l'invenzione del suo metodo

fondato sul calcolo delle variazioni (vedi le Miscellanee di Torino, Tom. II, pag. 196).

III. Una questione di meccanica presenta sovente varie parti: i punti alle superficie dei corpi abbisognano di considerazioni particolari che non hanno egualmente luogo per quelli che sono nell'interno de' corpi stessi: e anche per linee individuate in queste superficie e per punti in queste linee possono darsi particolari circostanze. Con metodi meno generali le indicate diverse parti sono discusse successivamente: ma la M. A. le abbraccia tutte a una volta, perchè nella sua equazione generalissima, dietro un principio noto nel calcolo delle variazioni, si fanno separatamente nulle quantità opportunamente disposte sotto integrali triplicati, duplicati, e semplici: il che distribuisce in varie masse tutte le equazioni dietro le quali si analizza il moto o l'equilibrio compiutamente.

IV. All'utilità di darci il problema svolto e anatomizzato, per così dire, in tutti i particolari un'altra se ne aggiunge non meno importante, quella di farci vedere l'indipendenza in cui rimangono alcune delle indicate equazioni dai cambiamenti introdotti in alcune altre. Se, per esempio, si vogliono trasportare dal caso dell'equilibrio a quello del moto i teoremi fra le pressioni alle superficie dei corpi, si sente il bisogno di una dimostrazione. La M. A. vi supplisce colla semplice osservazione che il passaggio dall'equilibrio al moto introduce mutazione nella sola quantità sottoposta all'integrale triplicato, non alterando quelle che stanno sotto i duplicati, e che quindi le equazioni dedotte da questi ultimi restano le stesse. Come mai dopo veduta questa gran luce potremo ancora adattarci a' ripieghi che in qualche parte sono in urto colla natura della questione?

V. Ecco il maggior vantaggio del sistema della Meccanica Analitica. Esso ci fa mettere in equazione *fatti* di cui abbiamo idee chiare senza obbligarci a considerare le cagioni di cui abbiamo idee oscure: fatti certi invece di cagioni a esprimere l'azione delle quali si formano ipotesi dubbie e non troppo persuadenti. È desso un sistema che abbisogna appunto di quelle sole cognizioni a cui arriva la mente umana con sicurezza, e si astiene o può astenersi dal pronunciare appunto dove non pare possibile mettere un fondo sodo ai nostri ragionamenti. Un sistema che assume pochi dati invece di un gran numero di elementi; un sistema in cui colla stessa fiducia si seguono i più vicini e i più lontani svolgimenti di calcolo, perchè non vi si fanno da principio ommissioni di quantità insensibili, che lasciano qualche sospetto di errore non egualmente insensibile nel progresso. Convincersi di tutte queste proposizioni è il frutto di lungo studio sulla M. A.: soggiungerò qualche parola a schiarimento di alcuna di esse.

VI. L'azione delle forze interne attive o passive (secondo una nota distinzione di Lagrange) è qualche volta tale che possiamo farcene un concetto, ma il più sovente rimane alla corta nostra veduta torbida così da lasciarci tutto il dubbio che il magistero della natura sia ben diverso da quelle immagini manchevoli colle quali ci sforziamo di rappresentarcelo. Per un esempio: se trattisi del moto di un punto obbligato a stare sopra una superficie, possiamo rappresentarci con chiarezza la resistenza della superficie siccome una forza che opera normalmente alla superficie stessa, e stabilire con questa sola considerazione le equazioni generali del moto. Se trattisi invece di quelle forze che mantengono la continuità nelle masse in moto, io confesso che, almeno per me, il loro modo d'agire è sì inviluppato, che non posso accontentarmi alle maniere con cui vorrei immaginarmelo. Quando pertanto dietro alcuna di queste maniere io volessi stabilire le equazioni del movimento, non potrei attaccare fede ai risultati del mio calcolo: e molto più se facessi altresì delle supposizioni secondarie, e parecchie di quelle ommissioni accennate più sopra. Ma nella M. A. si contemplano gli effetti delle forze interne e non le forze stesse, vale a dire le equazioni di condizione che debbono essere soddisfatte, o certe funzioni che dalle forze sono fatte variare: questi effetti sono chiari anche nel secondo caso, e in tal modo, saltate tutte le difficoltà intorno alle azioni delle forze, si hanno le stesse equazioni sicure ed esatte che si avrebbero da una perspicua cognizione di esse azioni. Ecco il gran passo: si può poi, se si vuole, rivestire della rappresentazione delle forze i coefficienti indeterminati introdotti in maniera istrumentale, e allora, determinati questi coefficienti *a posteriori* mediante le equazioni meccaniche, acquistare delle cognizioni intorno alle forze stesse. Seguendo un tal metodo nel primo dei due casi sopraccennati il risultato del calcolo si trova perfettamente d'accordo colla rappresentazione che ci eravamo fatta intorno all'intervento della forza passiva, e ciò non può che riuscire di molta soddisfazione. Nel secondo caso poi il risultato è d'accordo con quel tanto che vedevamo *a priori*: ed è poi un gran conforto il sapere ch'esso è sicuramente giusto anche dove i ragionamenti *a priori* erano deboli, anche dove entrando essenzialmente l'infinito non potevamo vedere al di là di poche congruenze, anche dove la punta della nostra intelligenza non poteva direttamente in nessuna guisa penetrare.

VII. Insisto su queste idee perchè ne consegue, di qualunque valore esser possa, la mia opinione intorno a quella Meccanica fisica che si vuole adesso far sorgere a lato (*) della Meccanica Analitica. Applaudo a questa nuova

(*) *Mémoires de l'Institut de France.* Tom. VIII, pag. 361.

scienza: ma invece di vederla sorgere a lato della M. A., bramerei vedervela sorgere sopra: e mi spiego. Quando le equazioni dell'equilibrio e del moto siano stabilite dietro principj inconcussi, sarà lecito il far delle ipotesi sulla costituzione interna dei corpi in modo di avere altrimenti le stesse equazioni: e allora quelle ipotesi, se non con sicurezza, almeno con probabilità potranno essere ricevute. Ciò anche servirà per determinare in qualche maniera certe quantità sulle quali l'analisi lagrangiana non pronuncia. Supponendo quindi i corpi come quelle ipotesi danno, potranno dedursi altre ed altre conseguenze che non avranno maggiore probabilità della ipotesi originaria: ma se poi in questo cammino ci sarà dato di avere altri punti di confronto colla natura nei quali non ci troviamo fuori di strada, l'ipotesi primaria acquisterà sempre maggiore consistenza. Non vorrei io però una meccanica fisica di cui le prime equazioni ragionate sopra supposizioni alquanto incerte non ottennessero se non una lontana conferma, scendendo dal generale al particolare, per qualche corrispondenza con fenomeni osservati. La buona filosofia fatta esperta dalle aberrazioni di molti fra que' pensatori che fabbricarono sistemi intorno alle cose naturali, deduce dalla moltiplicità stessa e contrarietà delle loro opinioni, che non è retto quel metodo di filosofare il quale, senza sufficiente appoggio nel suo principio, ne ha uno soltanto nel suo fine. Se queste riflessioni sono giuste, ognun vede quanto interessi rimettere in credito e in pratica lo studio della M. A. la quale è la sola che a stabilire l'equazioni fondamentali abbisogna di pochi dati la cui verità non è disputabile.

VIII. Resta a sciogliere qualche difficoltà: la M. A. non è scienza al tutto perfetta: essa presenta alcuni passi mancanti e meno veri: essa conduce qualche volta a calcoli intrattabili. Gli ammiratori di Lagrange non vorranno pienamente ammettere queste asserzioni: ma quand'anche si ammettano, esse null'altro provano se non che a Lagrange come a Leibnitz mancò il tempo a riconoscere per intero la vastità di quel concepimento che si era formato nella sua mente, e riconosciutala, informarne altri a tutto agio. Leibnitz lasciò molto a fare ai suoi successori i quali compierono l'edificio di cui egli avea gettati i fondamenti ed crette molte parti: e i Rolle, i Lagny, i Nieuventyt che non vollero portar pietre a questo edificio certamente la sbagliarono. Tocca ai geometri successori di Lagrange a perfezionare la grand'opera ch'egli fondò e portò a tanta altezza: a rettificarne qualche luogo in cui egli pagò un lieve tributo all'umanità senza conseguenze che intacchino la sostanza del metodo, a spianarne qualche altro ove sono certe asprezze, a supplire alcune parti che tuttora si desiderano. E quanto alla malagevolezza e complicazione dei calcoli diremo: nulla è la fatica di un lungo calcolo, quando nel seguirlo sappiamo a

non dubitarne che siamo uniti colla verità e che colla verità giungeremo al fine: è gioja, è godimento in questa fatica sostenuta dall'aspettativa di un largo profitto. I grandi perfezionamenti poi introdotti nella scienza del calcolo dopo la morte di Lagrange valgono a superare alcune difficoltà a cui egli stesso erasi arrestato: ciò che rimane è un invito prezioso onde promuovere anche l'analisi col doppio scopo dell'invenzione e dell'applicazione.

Premesse queste riflessioni generali per fissare l'attenzione dei leggitori sull'eccellenza del metodo lagrangiano a cui intendo di attenermi: farò un brevissimo cenno di quella disposizione che penso dare alle seguenti memorie. Comincerò da una sui corpi solidi rigidi nella quale si vedrà chiaro il modo con cui le nuove ricerche si attaccano alla M. A., e si troverà preparata l'analisi fondamentale che servir deve anche per quanto avrò a dire in appresso. Passerò nella seguente a parlare dei corpi estesi in generale: e quindi le teoriche saranno successivamente sviluppate secondo la concatenazione più naturale.

MEMORIA PRIMA

SUL MOTO E SULL' EQUILIBRIO DELLE PARTI INTERNE DI UN CORPO SOLIDO RIGIDO (*).

1. Lagrange nel Cap. IV della Sez. V della prima Parte della M. A. ha date le equazioni generali che debbono essere soddisfatte nell'equilibrio di un corpo solido di figura qualunque, e per giungervi ha dimostrato che le variazioni ∂x, ∂y, ∂z delle coordinate del punto generico sono espresse colle formole

$$[1] \quad \begin{aligned} \partial x &= l - yp + zq \\ \partial y &= m + xp - zr \\ \partial z &= n - xq + yr \quad (^{**}) \end{aligned}$$

dove l, m, n, p, q, r sono sei arbitrarie che non mutano passando dall'uno all'altro punto del corpo. I precedenti valori delle variazioni (come l'Autore chiaramente asserisce nel luogo citato sul principio del num. 61) soddisfanno di già per se stessi alle variate di quelle equazioni di condizione in cui sta espressa la solidità del corpo; però egli non fa che sostituirli nella formola integrale dovuta ai momenti delle forze acceleratrici

$$[2] \quad S(X\partial x + Y\partial y + Z\partial z)Dm\,;$$

e siccome nella ipotesi che il corpo sia libero nello spazio non havvi altra forza a contemplare, questa formola dopo una tale sostituzione si eguaglia a zero: di qui le sei equazioni che trovansi registrate nel seguente num. 62.

2. Riflettendo sul riferito passo della M. A. si capisce che in esso trovansi formole integrali a compor le quali concorrono le quantità spettanti a tutti i punti del corpo: ma non trovansi già le equazioni a cui debbono soddisfare le coordinate di un solo punto del corpo. Per avere queste ultime, come in altri luoghi della stessa opera, bisogna introdurre tutte le forze interne operanti

(*) Mi è necessario premettere un'avvertenza. Eulero, Lagrange ed altri geometri che fiorirono verso la fine del passato secolo ritenevano sinonime le espressioni di corpo solido e corpo rigido: giacchè chiamavano solido quel corpo in cui le distanze fra due punti qualunque sono invariabili. Presentemente chiamasi solido anche un corpo che si condensa e si dilata, e può cambiare di forma. Riserbandomi a parlare in seguito di tali solidi a figura variabile, starò in questa Memoria alla definizione antica che ognuno intende chiaramente.

(**) Le arbitrarie qui denominate l, m, n, p, q, r hanno veramente nella M. A. le espressioni ∂l, ∂m, ∂n, ∂N, ∂M, ∂L: siccome però non è necessario il simbolo ∂ affisso a quest'ultime, mi sono permesso un tale cambiamento per maggiore semplicità.

sul punto generico (x, y, z), ossia (ciò che è lo stesso nel linguaggio della M. A.) bisogna aggiungere al termine [2] dovuto ai momenti delle forze acceleratrici gli altri

$$S\lambda\partial L + S\mu\partial M + \text{ecc.}$$

essendo λ, μ, ecc. altrettanti coefficienti indeterminati, e

$$L = o\,; \quad M = o\,; \quad \text{ecc.}$$

le equazioni di condizione portate dalla natura della questione, cui debbono soddisfare le coordinate x, y, z del punto generico. Allora le variazioni $\partial x, \partial y, \partial z$ sono libere da ogni vincolo, e si prova che debbono essere zero i loro coefficienti totali sotto gl'integrali simili nella equazione generalissima

$$[3] \qquad S(X\partial x + Y\partial y + Z\partial z)Dm + S\lambda\partial L + S\mu\partial M + \text{ecc.} \;= o$$

avendo fatto subire ai termini $\lambda\partial L$, $\mu\partial M$, ecc., se ve ne era bisogno, le trasformazioni insegnate nel calcolo delle variazioni. Accenno qui sommariamente e di fuga un tale andamento analitico, perchè suppongo che il lettore sia conoscitore dell'esposto metodo lagrangiano.

3. Per applicare un tale processo al problema che mi sono proposto dell'equilibrio e anche del moto delle parti interne di un corpo solido (giacchè è meglio trattare il caso più generale del moto), converrebbe conoscere le equazioni di condizione alle cui variate soddisfanno i valori [1] delle $\partial x, \partial y, \partial z$; saranno esse le $L = o$, $M = o$, ecc. da usarsi per piegare l'equazione generalissima [3] alla nostra questione, e i coefficienti λ, μ, ecc. rappresenteranno le forze interne costituenti la solidità del corpo. Le equazioni che se ne dedurranno fra le coordinate del punto generico saranno allora confrontabili con quelle che il Cauchy desunse da altre considerazioni (*): e avremo anche tutto quel rimanente che si richiede per analizzare il problema in ogni sua parte. Non trovansi nella M. A. le accennate equazioni di condizione, epperò nemmeno quelle spettanti all'equilibrio o al moto di un punto nel solido ed espresse alla maniera anzidetta. Lagrange non fece questo, perchè non potea far tutto: ma i suoi metodi si prestano spontaneamente anche a tale ricerca, siccome è scopo di questa Memoria il mostrare.

4. Cerchiamo le equazioni di condizione portate dalla solidità del corpo. A questo oggetto rammentiamoci che, trattandosi di sistemi a tre dimensioni, le coordinate x, y, z di un punto qualunque di essi debbono immaginarsi così composte da soddisfare a due sorte di variabilità; ad una variabilità per cui in una posizione qualunque fra le infinite che prende il corpo durante il movimento si possa passare dall'uno all'altro de' suoi punti e percorrerli tutti; e ad una variabilità per cui si possa tener di mira la trajettoria di un solo punto del

(*) *Exercices de Mathématiques*. Tom. III, pag. 166.

corpo, facendo astrazione dalla massa che gli sta d'intorno. Queste due variabilità sono in generale complicate insieme in funzioni di difficile determinazione, ma nel moto di un solido a densità uniforme si ha la circostanza vantaggiosissima di poter assegnare a dirittura la forma di tali funzioni per riguardo alle variabili della prima specie, restando a determinarsi per le diverse questioni di moto sei quantità che sono funzioni della sola variabile tempo. Si giunge a questo intento mediante la seguente considerazione. S'immaginano tre assi rettangolari connessi invariabilmente col corpo per modo che l'accompagnino in tutti i suoi movimenti; dette allora a, b, c le coordinate di un punto qualunque del solido relativamente a tali assi fissi nel corpo e mobili nello spazio, le coordinate x, y, z dello stesso punto relativamente a tre assi fissi nello spazio si riconoscono esprimibili per le a, b, c mediante le equazioni

$$[4] \quad \begin{aligned} x &= f + \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c \\ y &= g + \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c \\ z &= h + \alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c \end{aligned}$$

essendo f, g, h le coordinate che alla fine del tempo t corrispondono al punto d'origine degli assi mobili col corpo, e $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ nove quantità angolari di cui scrivo la significazione

$$[5] \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= \cos.(a \cdot x)\,; & \beta_1 &= \cos.(b \cdot x)\,; & \gamma_1 &= \cos.(c \cdot x) \\ \alpha_2 &= \cos.(a \cdot y)\,; & \beta_2 &= \cos.(b \cdot y)\,; & \gamma_2 &= \cos.(c \cdot y) \\ \alpha_3 &= \cos.(a \cdot z)\,; & \beta_3 &= \cos.(b \cdot z)\,; & \gamma_3 &= \cos.(c \cdot z) \end{aligned}$$

e tra le quali si hanno le 21 equazioni

$$[6] \quad \begin{aligned} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 &= 1\,; & \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 &= 0 \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 &= 1\,; & \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3 &= 0 \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1\,; & \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$[7] \quad \begin{aligned} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1\,; & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 &= 0 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1\,; & \alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3 &= 0 \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 &= 1\,; & \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$[8] \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2\,; & \alpha_2 &= \beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3\,; & \alpha_3 &= \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 \\ \beta_1 &= \alpha_3\gamma_2 - \alpha_2\gamma_3\,; & \beta_2 &= \alpha_1\gamma_3 - \alpha_3\gamma_1\,; & \beta_3 &= \alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2 \\ \gamma_1 &= \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2\,; & \gamma_2 &= \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3\,; & \gamma_3 &= \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \end{aligned}$$

che però sono sostanzialmente soltanto sei, cioè le [6], o le [7], cavandosi tutte

le altre da combinazioni delle medesime. In conseguenza di tali sei equazioni rimangono nelle [4] sei quantità fra le dodici f, g, h; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ funzioni incognite del tempo, e del solo tempo, giacchè basta poca attenzione per capire dietro la loro rappresentazione geometrica ch' esse non mutano passando dall' uno all' altro punto del corpo.

5. Essendo le dodici quantità f, g, h; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ indipendenti dalle a, b, c, si derivano dalle [4] le seguenti

$$\left(\frac{dx}{da}\right)=\alpha_1\ ;\quad \left(\frac{dx}{db}\right)=\beta_1\ ;\quad \left(\frac{dx}{dc}\right)=\gamma_1$$

[9] $$\left(\frac{dy}{da}\right)=\alpha_2\ ;\quad \left(\frac{dy}{db}\right)=\beta_2\ ;\quad \left(\frac{dy}{dc}\right)=\gamma_2$$

$$\left(\frac{dz}{da}\right)=\alpha_3\ ;\quad \left(\frac{dz}{db}\right)=\beta_3\ ;\quad \left(\frac{dz}{dc}\right)=\gamma_3$$

epperò le equazioni [6], [7], [8] possono scriversi di nuovo colle precedenti derivate parziali: esse diventano

$$\left(\frac{dx}{da}\right)^2+\left(\frac{dy}{da}\right)^2+\left(\frac{dz}{da}\right)^2=1$$

$$\left(\frac{dx}{db}\right)^2+\left(\frac{dy}{db}\right)^2+\left(\frac{dz}{db}\right)^2=1$$

$$\left(\frac{dx}{dc}\right)+\left(\frac{dy}{dc}\right)^2+\left(\frac{dz}{dc}\right)^2=1$$

[10] $$\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dx}{db}\right)+\left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dy}{db}\right)+\left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{dz}{db}\right)=0$$

$$\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right)+\left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right)+\left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right)=0$$

$$\left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right)+\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right)+\left(\frac{dz}{db}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right)=0$$

$$\left(\frac{dx}{da}\right)^2+\left(\frac{dx}{db}\right)^2+\left(\frac{dx}{dc}\right)^2=1$$

$$\left(\frac{dy}{da}\right)^2+\left(\frac{dy}{db}\right)^2+\left(\frac{dy}{dc}\right)^2=1$$

[11] $$\left(\frac{dz}{da}\right)^2+\left(\frac{dz}{db}\right)^2+\left(\frac{dz}{dc}\right)^2=1$$

$$\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dy}{da}\right)+\left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dy}{db}\right)+\left(\frac{dx}{dc}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right)=0$$

$$\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dz}{da}\right)+\left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dz}{db}\right)+\left(\frac{dx}{dc}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right)=0$$

$$\left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dz}{da}\right)+\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{dz}{db}\right)+\left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right)=0$$

[12]
$$
\begin{aligned}
\left(\frac{dx}{da}\right) &= \left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right) - \left(\frac{dz}{db}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right)\\
\left(\frac{dx}{db}\right) &= \left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right) - \left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right)\\
\left(\frac{dx}{dc}\right) &= \left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dz}{db}\right) - \left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{dy}{db}\right)\\
\left(\frac{dy}{da}\right) &= \left(\frac{dz}{db}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right) - \left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right)\\
\left(\frac{dy}{db}\right) &= \left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right) - \left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right)\\
\left(\frac{dy}{dc}\right) &= \left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{dx}{db}\right) - \left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dz}{db}\right)\\
\left(\frac{dz}{da}\right) &= \left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right) - \left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right)\\
\left(\frac{dz}{db}\right) &= \left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right) - \left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right)\\
\left(\frac{dz}{dc}\right) &= \left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dy}{db}\right) - \left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dx}{db}\right).
\end{aligned}
$$

6. Le precedenti equazioni [10], ovvero [11] sono quelle accennate ai numeri 3, 4 che ci eravamo proposti di cercare. Se così è, le loro variate, cioè

[13]
$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{d\delta x}{da}\right) + \left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{d\delta y}{da}\right) + \left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{d\delta z}{da}\right) = 0\\
&\left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{d\delta x}{db}\right) + \left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{d\delta y}{db}\right) + \left(\frac{dz}{db}\right)\left(\frac{d\delta z}{db}\right) = 0\\
&\left(\frac{dx}{dc}\right)\left(\frac{d\delta x}{dc}\right) + \left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{d\delta y}{dc}\right) + \left(\frac{dz}{dc}\right)\left(\frac{d\delta z}{dc}\right) = 0\\
&\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{d\delta x}{db}\right) + \left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{d\delta y}{db}\right) + \left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{d\delta z}{db}\right)\\
+&\left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{d\delta x}{da}\right) + \left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{d\delta y}{da}\right) + \left(\frac{dz}{db}\right)\left(\frac{d\delta z}{da}\right) = 0\\
&\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{d\delta x}{dc}\right) + \left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{d\delta y}{dc}\right) + \left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{d\delta z}{dc}\right)\\
+&\left(\frac{dx}{dc}\right)\left(\frac{d\delta x}{da}\right) + \left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{d\delta y}{da}\right) + \left(\frac{dz}{dc}\right)\left(\frac{d\delta z}{da}\right) = 0\\
&\left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{d\delta x}{dc}\right) + \left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{d\delta y}{dc}\right) + \left(\frac{dz}{db}\right)\left(\frac{d\delta z}{dc}\right)\\
+&\left(\frac{dx}{dc}\right)\left(\frac{d\delta x}{db}\right) + \left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{d\delta y}{db}\right) + \left(\frac{dz}{dc}\right)\left(\frac{d\delta z}{db}\right) = 0
\end{aligned}
$$

ovvero le

$$\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{d\delta x}{da}\right)+\left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{d\delta x}{db}\right)+\left(\frac{dx}{dc}\right)\left(\frac{d\delta x}{dc}\right)=0$$
$$\left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{d\delta y}{da}\right)+\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{d\delta y}{db}\right)+\left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{d\delta y}{dc}\right)=0$$
$$\left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{d\delta z}{da}\right)+\left(\frac{dz}{db}\right)\left(\frac{d\delta z}{db}\right)+\left(\frac{dz}{dc}\right)\left(\frac{d\delta z}{dc}\right)=0$$
$$[14]\quad \begin{aligned}&\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{d\delta y}{da}\right)+\left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{d\delta y}{db}\right)+\left(\frac{dx}{dc}\right)\left(\frac{d\delta y}{dc}\right)\\&+\left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{d\delta x}{da}\right)+\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{d\delta x}{db}\right)+\left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{d\delta x}{dc}\right)=0\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}&\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{d\delta z}{da}\right)+\left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{d\delta z}{db}\right)+\left(\frac{dx}{dc}\right)\left(\frac{d\delta z}{dc}\right)\\&+\left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{d\delta x}{da}\right)+\left(\frac{dz}{db}\right)\left(\frac{d\delta x}{db}\right)+\left(\frac{dz}{dc}\right)\left(\frac{d\delta x}{dc}\right)=0\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}&\left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{d\delta z}{da}\right)+\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{d\delta z}{db}\right)+\left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{d\delta z}{dc}\right)\\&+\left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{d\delta y}{da}\right)+\left(\frac{dz}{db}\right)\left(\frac{d\delta y}{db}\right)+\left(\frac{dz}{dc}\right)\left(\frac{d\delta y}{dc}\right)=0\end{aligned}$$

dovranno essere soddisfatte dai valori [1] delle variazioni δx, δy, δz trovati da Lagrange: si provi e vedrassi che la cosa è appunto così.

7. Che le [10], ovvero [11] siano equazioni di condizione cui le coordinate del punto generico nel corpo solido debbono soddisfare, è proposizione provata per gli antecedenti; ma interessa di assicurarsi che non ve ne possano essere altre le quali non siano mere combinazioni delle medesime, talchè sia certo, che nelle [10], o nelle [11] è espresso tutto ciò che costituisce la solidità del corpo. Questo passo è un po' difficile, e per vincerlo converrà provare che partendo dalle sole [10], ovvero [11] si può risalire alle [4] formate con quelle dodici funzioni incognite del solo tempo: perchè siccome in quest'ultime è pienamente espressa la natura del moto qualunque di un corpo solido, bisognerà allora conchiudere ch'essa è tutta espressa anche nelle [10] ovvero [11]. Mi riuscì questo calcolo, che essendo alquanto lungo rimando a due note poste in fondo della Memoria, nella prima delle quali provo come per solo andamento analitico, senza intermedio di considerazioni geometriche si conseguiscano dalle sole [10], ovvero [11] le altre quindici delle 21 equazioni [10], [11], [12]. Dimostro poi nella seconda nota che mediante l'uso delle menzionate 21 equazioni le 18 equazioni derivate parziali dedotte dalle [10] ovvero [11] si riducono alle 18 semplicissime

$$[15]\quad \begin{aligned}&\left(\frac{d^2x}{da^2}\right)=0;\ \left(\frac{d^2x}{dadb}\right)=0;\ \left(\frac{d^2x}{dadc}\right)=0;\ \left(\frac{d^2x}{db^2}\right)=0;\ \left(\frac{d^2x}{dbdc}\right)=0;\ \left(\frac{d^2x}{dc^2}\right)=0\\&\left(\frac{d^2y}{da^2}\right)=0;\ \left(\frac{d^2y}{dadb}\right)=0;\ \left(\frac{d^2y}{dadc}\right)=0;\ \left(\frac{d^2y}{db^2}\right)=0;\ \left(\frac{d^2y}{dbdc}\right)=0;\ \left(\frac{d^2y}{dc^2}\right)=0\\&\left(\frac{d^2z}{da^2}\right)=0;\ \left(\frac{d^2z}{dadb}\right)=0;\ \left(\frac{d^2z}{dadc}\right)=0;\ \left(\frac{d^2z}{db^2}\right)=0;\ \left(\frac{d^2z}{dbdc}\right)=0;\ \left(\frac{d^2z}{dc^2}\right)=0.\end{aligned}$$

Con questo artificio di discendere ad ulteriore derivazione, piuttosto che tentare direttamente l'integrazione delle [10] ovvero [11], la salita dalle ottenute [15] alle [4] è affare di nessuna difficoltà. Infatti le prime tre tra le [15] danno subito

$$\left(\frac{dx}{da}\right)=\phi(b,c)\,;\quad \left(\frac{dx}{da}\right)=\psi(a,c)\,;\quad \left(\frac{dx}{da}\right)=\chi(a,b)$$

le quali vogliono dire che fatto $\left(\frac{dx}{da}\right)=\alpha_1$, questa α_1 non deve per la prima contenere a, non deve per la seconda contenere b, e non deve per la terza contenere c: resta che α_1 sia soltanto una funzione incognita del tempo. La seconda, la quarta, e la quinta delle [15] usate egualmente provano la stessa cosa di 6_1, avendo posto $\left(\frac{dx}{db}\right)=6_1$; e la terza, quinta e sesta conducono a simile conclusione per γ_1, avendo posto $\left(\frac{dx}{dc}\right)=\gamma_1$. Ora le tre

$$\left(\frac{dx}{da}\right)=\alpha_1\,;\quad \left(\frac{dx}{db}\right)=6_1\,;\quad \left(\frac{dx}{dc}\right)=\gamma_1$$

ci somministrano

$$x=\alpha_1 a+\phi(b,c)\,;\quad x=6_1 b+\psi(a,c)\,;\quad x=\gamma_1 c+\chi(a,b)$$

il cui effetto si è che scrivendo

$$x=\alpha_1 a+6_1 b+\gamma_1 c+f$$

dalla composizione di questa f è per la prima esclusa la a, per la seconda esclusa la b, e per la terza esclusa la c; rimane che f sia, come α_1, 6_1, γ_1, funzione incognita della sola t; e così la prima delle equazioni [4] è dimostrata. In maniera affatto simile si dimostrano anche le due seguenti.

8. Assicurati che in quanto al numero delle equazioni di condizione proprie della questione non possono esservene di più delle [10] ovvero [11], conviene ora esaminare se ve ne possono essere di meno: ossia se quelle sei non siano riducibili a minor numero. Avanzo la proposizione affermativa, ma non senza qualche esitazione, perchè essa si trova in urto con quanto Lagrange asserisce verso la metà del num. 16 della Sez. IV della prima Parte della M. A. (Tom. I, pag. 86). Agevolmente potrà il lettore persuadersi che avendo contraria l'autorità di Lagrange io mi sono posto e riposto molte volte a meditare un tal punto nella piena disposizione d'animo di trovar vera la sua asserzione e falsa la mia. Ma invece mi sono formata contro mia voglia l'opinione che il citato passo della M. A. sia uno dei pochissimi accennati all'art. VIII dell'introduzione, nei quali la grand'opera ha bisogno di schiarimento o di aggiunta. Io credo che le equazioni di condizione indefinite fra le x, y, z possano essere più di tre allora quando (come nel nostro caso) sono alle derivate parziali per le diverse variabili di cui le x, y, z s'intendono funzioni; ritengo che delle nostre sei la quarta, la quinta e la sesta non sono *conseguenze necessarie* delle prime tre senza che per questo il problema sia più che determinato.

La ragione a cui mi appoggio si è che l'integrazione fatta sopra un numero di tali equazioni eguale a quello delle funzioni incognite x, y, z dà le primitive generali, nelle quali, come tutti sanno, entrano ancora parecchie funzioni arbitrarie: le equazioni restanti potranno servire a determinare queste funzioni arbitrarie e a farci passare dalle primitive generali alle primitive complete, che sono le [4]. È manifesto che per le prime tre non riescono le x, y, z pienamente determinate: e che l'ufficio delle seconde tre essendo di far cosa in aggiunta di ciò che già si ottenne dalle prime, non potranno dirsi conseguenze necessarie delle medesime, ma avranno una sussistenza a se. Esse portano un passo più innanzi quella determinazione che le tre prime equazioni lasciano meno perfetta: e la piena determinazione si conseguisce coll' uso delle equazioni meccaniche, operando sulle costanti delle primitive complete rimaste funzioni incognite del solo tempo. Questo discorso è diretto a giustificare l' uso che farò delle equazioni [10] ovvero [11] come di equazioni di condizione essenzialmente diverse fra loro. Un'osservazione però viene qui opportuna per chi non volesse passarmi buono il sopra esposto ragionamento. Se nella soluzione di un problema meccanico si ommettono alcune delle essenziali equazioni di condizione, è certo che si sbaglia affatto la via, e si tratta una questione diversa da quella che si ha di mira: però valse la pena di seguire l' analisi riferita al num. 7, e nelle due note ivi citate. Non è di eguale importanza il guardarsi dall'usare qualche equazione di più che sia conseguenza di altre parimenti adoperate. Lagrange ha provato con più d'un esempio (vedi M. A. Tom. I, pag. 135, num. 27, e altrove) (e se ne potrebbe tentare una dimostrazione generale) che in tal caso nella pratica del metodo, che è quello solito del calcolo delle variazioni, non ne risulta errore a motivo del compenetrarsi che fanno, pel giuoco dei coefficienti indeterminati, i termini superflui cogli altri esistenti in forza delle equazioni necessarie. Havvi ancora un'osservazione interessante. Ammessa la possibilità di un numero di equazioni di condizione maggiore di tre (e parmi che gli adotti ragionamenti e le legittime conseguenze che si vedranno in appresso non ne lascino dubbio), non è più vero (vedi M. A. Tom. I, pag. 86, num. 16) che si abbiano sempre tante equazioni quante ne abbisognano per determinare le coordinate generiche x, y, z, e tutti i coefficienti indeterminati introdotti secondo il metodo.

9. Ora che nelle [13] o [14] del num. 6 posseggo le variate delle equazioni di condizione del problema nelle quali so essere tutto compreso, passo a trattarlo col metodo della M. A. accennato ai num. 2, 3. Comincio a darne la soluzione per mezzo delle [14] che trovo più opportune onde arrivare più speditamente ai risultati desiderati: esaminerò più tardi anche la soluzione dedotta dalle [13].

E qui rammento che il termine

$$S\left\{\left[\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)-X\right]\delta x+\left[\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)-Y\right]\delta y+\left[\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)-Z\right]\delta z\right\}Dm$$

dovuto ai momenti delle forze acceleratrici deve essere interpretato (secondo diede a capire il Lagrange nel § I della Sez. XI della Parte seconda della M. A.,

e come io ho cercato di spiegare più diffusamente ai num. 178, 251 e seg. della mia Memoria di Meccanica da principio citata) per un integrale triplicato

$$[16]\quad SdaSdbSdc\cdot\Gamma H\left\{\left[\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)-X\right]\delta x+\left[\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)-Y\right]\delta y+\left[\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)-Z\right]\delta z\right\}$$

preso relativamente alle tre variabili della massa a, b, c costanti per riguardo al tempo, dove Γ significa la densità, e H sta per un sestinomio formato di derivate parziali come segue

$$[17]\quad \begin{aligned} H=&\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right)-\left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right)\\ &+\left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{dz}{da}\right)-\left(\frac{dx}{dc}\right)\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{dz}{da}\right)\\ &+\left(\frac{dx}{dc}\right)\left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dz}{db}\right)-\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{dz}{db}\right). \end{aligned}$$

Alla stessa maniera, cioè come integrali triplicati, vanno interpretati i termini $S\lambda\delta L$, $S\mu\delta M$, ecc. portati da equazioni di condizione riferibili a tutti i punti del sistema. Laonde nel nostro caso i termini cogli integrali triplicati introdotti dalle equazioni [14] saranno i sei

$$[18]\quad \begin{aligned} &SdaSdbSdc\cdot A\left\{\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{d\delta x}{da}\right)+\left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{d\delta x}{db}\right)+\left(\frac{dx}{dc}\right)\left(\frac{d\delta x}{dc}\right)\right\}\\ &+SdaSdbSdc\cdot B\left\{\left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{d\delta y}{da}\right)+\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{d\delta y}{db}\right)+\left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{d\delta y}{dc}\right)\right\}\\ &+SdaSdbSdc\cdot C\left\{\left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{d\delta z}{da}\right)+\left(\frac{dz}{db}\right)\left(\frac{d\delta z}{db}\right)+\left(\frac{dz}{dc}\right)\left(\frac{d\delta z}{dc}\right)\right\}\\ &+SdaSdbSdc\cdot F\left\{\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{d\delta y}{da}\right)+\left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{d\delta y}{db}\right)+\left(\frac{dx}{dc}\right)\left(\frac{d\delta y}{dc}\right)\right.\\ &\qquad\left.+\left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{d\delta x}{da}\right)+\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{d\delta x}{db}\right)+\left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{d\delta x}{dc}\right)\right\}\\ &+SdaSdbSdc\cdot E\left\{\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{d\delta z}{da}\right)+\left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{d\delta z}{db}\right)+\left(\frac{dx}{dc}\right)\left(\frac{d\delta z}{dc}\right)\right.\\ &\qquad\left.+\left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{d\delta x}{da}\right)+\left(\frac{dz}{db}\right)\left(\frac{d\delta x}{db}\right)+\left(\frac{dz}{dc}\right)\left(\frac{d\delta x}{dc}\right)\right\}\\ &+SdaSdbSdc\cdot D\left\{\left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{d\delta z}{da}\right)+\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{d\delta z}{db}\right)+\left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{d\delta z}{dc}\right)\right.\\ &\qquad\left.+\left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{d\delta y}{da}\right)+\left(\frac{dz}{db}\right)\left(\frac{d\delta y}{db}\right)+\left(\frac{dz}{dc}\right)\left(\frac{d\delta y}{dc}\right)\right\} \end{aligned}$$

essendo A, B, C, F, E, D i sei coefficienti indeterminati che secondo il metodo debbono moltiplicare le variate delle equazioni di condizione. Oltre l'integrale triplicato [16], e i sei precedenti [18] non potranno esservene altri nell' equazione generale [3] trasportata dall' equilibrio al moto: potranno però esservene dei duplicati, come diremo in seguito.

10. I termini [18] si riconoscono suscettibili delle note trasformazioni insegnate nel calcolo delle variazioni e dirette al doppio oggetto di avere sotto i segni integrali triplicati termini ove le variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ non siano affette

da derivazioni parziali per le variabili di cui le x, y, z sono composte, e termini che siano quantità derivate esatte in riguardo ad alcuna di tali variabili (veggasi la M. A. Tom. I, Sez. IV, num. 14, 15, ovvero la mia Memoria replicatamente citata, ai num. 46 e seg.) Per eseguire facilmente le suddette trasformazioni osservinsi le due equazioni identiche

$$A\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{d\delta x}{da}\right)=-\left(\frac{d\cdot A\left(\frac{dx}{da}\right)}{da}\right)\delta x+\left(\frac{d\cdot A\left(\frac{dx}{da}\right)\delta x}{da}\right)$$

$$F\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{d\delta y}{da}\right)=-\left(\frac{d\cdot F\left(\frac{dx}{da}\right)}{da}\right)\delta y+\left(\frac{d\cdot F\left(\frac{dx}{da}\right)\delta y}{da}\right)$$

che subito si verificano, e modellando sulle medesime tutte le altre (avendosi in tutto a trasformare ventisette termini) si capirà che la somma dei sei integrali marcata [18] dà primieramente una quantità della forma

$$[19] \qquad S da\, S db\, S dc \cdot [P\delta x + Q\delta y + R\delta z] \qquad \text{essendo}$$

[20]

$$\begin{aligned}
P=&-\left(\frac{d\cdot A\left(\frac{dx}{da}\right)}{da}\right)-\left(\frac{d\cdot A\left(\frac{dx}{db}\right)}{db}\right)-\left(\frac{d\cdot A\left(\frac{dx}{dc}\right)}{dc}\right)\\
&-\left(\frac{d\cdot F\left(\frac{dy}{da}\right)}{da}\right)-\left(\frac{d\cdot F\left(\frac{dy}{db}\right)}{db}\right)-\left(\frac{d\cdot F\left(\frac{dy}{dc}\right)}{dc}\right)\\
&-\left(\frac{d\cdot E\left(\frac{dz}{da}\right)}{da}\right)-\left(\frac{d\cdot E\left(\frac{dz}{db}\right)}{db}\right)-\left(\frac{d\cdot E\left(\frac{dz}{dc}\right)}{dc}\right)\\
Q=&-\left(\frac{d\cdot F\left(\frac{dx}{da}\right)}{da}\right)-\left(\frac{d\cdot F\left(\frac{dx}{db}\right)}{db}\right)-\left(\frac{d\cdot F\left(\frac{dx}{dc}\right)}{dc}\right)\\
&-\left(\frac{d\cdot B\left(\frac{dy}{da}\right)}{da}\right)-\left(\frac{d\cdot B\left(\frac{dy}{db}\right)}{db}\right)-\left(\frac{d\cdot B\left(\frac{dy}{dc}\right)}{dc}\right)\\
&-\left(\frac{d\cdot D\left(\frac{dz}{da}\right)}{da}\right)-\left(\frac{d\cdot D\left(\frac{dz}{db}\right)}{db}\right)-\left(\frac{d\cdot D\left(\frac{dz}{dc}\right)}{dc}\right)\\
R=&-\left(\frac{d\cdot E\left(\frac{dx}{da}\right)}{da}\right)-\left(\frac{d\cdot E\left(\frac{dx}{db}\right)}{db}\right)-\left(\frac{d\cdot E\left(\frac{dx}{dc}\right)}{dc}\right)\\
&-\left(\frac{d\cdot D\left(\frac{dy}{da}\right)}{da}\right)-\left(\frac{d\cdot D\left(\frac{dy}{db}\right)}{db}\right)-\left(\frac{d\cdot D\left(\frac{dy}{dc}\right)}{dc}\right)\\
&-\left(\frac{d\cdot C\left(\frac{dz}{da}\right)}{da}\right)-\left(\frac{d\cdot C\left(\frac{dz}{db}\right)}{db}\right)-\left(\frac{d\cdot C\left(\frac{dz}{dc}\right)}{dc}\right).
\end{aligned}$$

11. Vi è poi un'altra parte

$$Sda\,Sdb\,Sdc\cdot T$$

la quale sommata colla [19] riproduce la quantità [18] ed è quella che contiene la riunione di tutti i termini derivate esatte o per a, o per b, o per c. Ecco l'espressione di questa T

$$[21]\quad T=\left(\frac{d\cdot A\left(\frac{dx}{da}\right)\partial x}{da}\right)+\left(\frac{d\cdot F\left(\frac{dy}{da}\right)\partial x}{da}\right)+\left(\frac{d\cdot E\left(\frac{dz}{da}\right)\partial x}{da}\right)$$
$$+\left(\frac{d\cdot F\left(\frac{dx}{da}\right)\partial y}{da}\right)+\left(\frac{d\cdot B\left(\frac{dy}{da}\right)\partial y}{da}\right)+\left(\frac{d\cdot D\left(\frac{dz}{da}\right)\partial y}{da}\right)$$
$$+\left(\frac{d\cdot E\left(\frac{dx}{da}\right)\partial z}{da}\right)+\left(\frac{d\cdot D\left(\frac{dy}{da}\right)\partial z}{da}\right)+\left(\frac{d\cdot C\left(\frac{dz}{da}\right)\partial z}{da}\right)$$
$$+\left(\frac{d\cdot A\left(\frac{dx}{db}\right)\partial x}{db}\right)+\left(\frac{d\cdot F\left(\frac{dy}{db}\right)\partial x}{db}\right)+\left(\frac{d\cdot E\left(\frac{dz}{db}\right)\partial x}{db}\right)$$
$$+\left(\frac{d\cdot F\left(\frac{dx}{db}\right)\partial y}{db}\right)+\left(\frac{d\cdot B\left(\frac{dy}{db}\right)\partial y}{db}\right)+\left(\frac{d\cdot D\left(\frac{dz}{db}\right)\partial y}{db}\right)$$
$$+\left(\frac{d\cdot E\left(\frac{dx}{db}\right)\partial z}{db}\right)+\left(\frac{d\cdot D\left(\frac{dy}{db}\right)\partial z}{db}\right)+\left(\frac{d\cdot C\left(\frac{dz}{db}\right)\partial z}{db}\right)$$
$$+\left(\frac{d\cdot A\left(\frac{dx}{dc}\right)\partial x}{dc}\right)+\left(\frac{d\cdot F\left(\frac{dy}{dc}\right)\partial x}{dc}\right)+\left(\frac{d\cdot E\left(\frac{dz}{dc}\right)\partial x}{dc}\right)$$
$$+\left(\frac{d\cdot F\left(\frac{dx}{dc}\right)\partial y}{dc}\right)+\left(\frac{d\cdot B\left(\frac{dy}{dc}\right)\partial y}{dc}\right)+\left(\frac{d\cdot D\left(\frac{dz}{dc}\right)\partial y}{dc}\right)$$
$$+\left(\frac{d\cdot E\left(\frac{dx}{dc}\right)\partial z}{dc}\right)+\left(\frac{d\cdot D\left(\frac{dy}{dc}\right)\partial z}{dc}\right)+\left(\frac{d\cdot C\left(\frac{dz}{dc}\right)\partial z}{dc}\right).$$

12. Il metodo lagrangiano c' insegna che le equazioni dinamiche fra le coordinate del solo punto generico (x,y,z) si avranno coll'eguagliare a zero i coefficienti totali delle ∂x, ∂y, ∂z raccolti dai due integrali triplicati [16], [19]. Pertanto tali equazioni saranno

$$\Gamma H\left[\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)-X\right]+P=0$$
$$[22]\quad \Gamma H\left[\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)-Y\right]+Q=0$$
$$\Gamma H\left[\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)-Z\right]+R=0$$

avendo le P, Q, R i valori [20]. Mi trattengo presentemente su queste equazioni indefinite all'oggetto di ricavarne con prontezza il risultamento capitale già noto ai geometri per altra via, riserbandomi ad esaminare in altra memoria i termini che in conseguenza della precedente quantità [21] vanno nell'equazione generale a collocarsi sotto integrali duplicati.

13. Mi è qui necessaria una breve digressione a fine di stabilire un teorema d'importanza primaria non solo nella presente questione, ma anche in generale ove trattisi del moto di sistemi a tre dimensioni. Ritenendo in qualunque questione di moto le coordinate x, y, z del punto generico funzioni (diverse nei diversi casi) di tre a, b, c per la variabilità di massa, e della t per la variabilità di tempo, assunse Lagrange a titolo di brevità le seguenti denominazioni (veggasi la M. A. Tom. II, pag. 291)

$$\alpha = \left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right) - \left(\frac{dz}{db}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right)$$
$$\alpha' = \left(\frac{dz}{db}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right) - \left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right)$$
$$\alpha'' = \left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right) - \left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right)$$
$$\beta = \left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right) - \left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right)$$
$$[23] \qquad \beta' = \left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right) - \left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right)$$
$$\beta'' = \left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right) - \left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right)$$
$$\gamma = \left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dz}{db}\right) - \left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{dy}{db}\right)$$
$$\gamma' = \left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{dx}{db}\right) - \left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dz}{db}\right)$$
$$\gamma'' = \left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dy}{db}\right) - \left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dx}{db}\right).$$

Esprimasi ora per $K(a, b, c, t)$ una quantità qualunque che in generale è funzione di tutte quattro le variabili a, b, c, t (per esempio una velocità, una densità, una forza interna, ecc.): siccome dalle equazioni

$$[24] \qquad x = x(a, b, c, t); \quad y = y(a, b, c, t); \quad z = z(a, b, c, t)$$

si possono intendere dedotte le inverse

$$[25] \qquad a = a(x, y, z, t); \quad b = b(x, y, z, t); \quad c = c(x, y, z, t)$$

non havvi alcuna difficoltà a capire che la K summentovata può ridursi ad una funzione di x, y, z, t, che s'indica per $K(x, y, z, t)$ essendo identicamente

$$[26] \qquad K(a, b, c, t) = K[x(a, b, c, t),\ y(a, b, c, t),\ z(a, b, c, t), t].$$

Veramente a significare la forma di funzione in x, y, z, t si sarebbe dovuta adoperare un'altra lettera diversa dalla K perchè tal forma generalmente è tutta di-

versa dalla prima in a,b,c,t: ma è invalso l'uso di adoperare la stessa lettera per la ragione che entrambe le espressioni si riferiscono ad una stessa quantità. Seguirò io pure quest'uso ma raccomanderò di tener ben presente la fatta avvertenza.

Ecco il teorema. Sono vere per identità le tre equazioni

$$[27]\qquad \begin{aligned} \left(\frac{d\cdot\alpha K}{da}\right)+\left(\frac{d\cdot\mathit{6}K}{db}\right)+\left(\frac{d\cdot\gamma K}{dc}\right)&=H\left(\frac{dK}{dx}\right)\\ \left(\frac{d\cdot\alpha' K}{da}\right)+\left(\frac{d\cdot\mathit{6}' K}{db}\right)+\left(\frac{d\cdot\gamma' K}{dc}\right)&=H\left(\frac{dK}{dy}\right)\\ \left(\frac{d\cdot\alpha'' K}{da}\right)+\left(\frac{d\cdot\mathit{6}'' K}{db}\right)+\left(\frac{d\cdot\gamma'' K}{dc}\right)&=H\left(\frac{dK}{dz}\right)\end{aligned}$$

dove le nove α,α',α''; $\mathit{6},\mathit{6}',\mathit{6}''$; γ,γ',γ'' hanno i valori [23] e la H è quel sestinomio [17] riferito al num. 9. S'intende poi che nei primi membri di tali equazioni la K abbia la composizione in a,b,c,t, e nei secondi abbia quella in x,y,z,t come nella [26].

Veggasi la dimostrazione nella terza delle note analitiche poste in fondo alla Memoria.

14. Si faccia nel nostro caso il confronto tra i secondi membri delle [23] e i secondi delle [12] riferite al num. 5, e dedurremo queste altre

$$[28]\qquad \begin{aligned} \left(\frac{dx}{da}\right)&=\alpha\ ;\quad \left(\frac{dx}{db}\right)=\mathit{6}\ ;\quad \left(\frac{dx}{dc}\right)=\gamma\\ \left(\frac{dy}{da}\right)&=\alpha'\ ;\quad \left(\frac{dy}{db}\right)=\mathit{6}'\ ;\quad \left(\frac{dy}{dc}\right)=\gamma'\\ \left(\frac{dz}{da}\right)&=\alpha''\ ;\quad \left(\frac{dz}{db}\right)=\mathit{6}''\ ;\quad \left(\frac{dz}{dc}\right)=\gamma''\end{aligned}$$

quindi le espressioni di P,Q,R (num. 10 equazioni [20]) potranno scriversi

$$[29]\qquad \begin{aligned} P=&-\left(\frac{d\cdot\alpha A}{da}\right)-\left(\frac{d\cdot\mathit{6}A}{db}\right)-\left(\frac{d\cdot\gamma A}{dc}\right)\\ &-\left(\frac{d\cdot\alpha' F}{da}\right)-\left(\frac{d\cdot\mathit{6}' F}{db}\right)-\left(\frac{d\cdot\gamma' F}{dc}\right)\\ &-\left(\frac{d\cdot\alpha'' E}{da}\right)-\left(\frac{d\cdot\mathit{6}'' E}{db}\right)-\left(\frac{d\cdot\gamma'' E}{dc}\right)\\ Q=&-\left(\frac{d\cdot\alpha F}{da}\right)-\left(\frac{d\cdot\mathit{6}F}{db}\right)-\left(\frac{d\cdot\gamma F}{dc}\right)\\ &-\left(\frac{d\cdot\alpha' B}{da}\right)-\left(\frac{d\cdot\mathit{6}' B}{db}\right)-\left(\frac{d\cdot\gamma' B}{dc}\right)\\ &-\left(\frac{d\cdot\alpha'' D}{da}\right)-\left(\frac{d\cdot\mathit{6}'' D}{db}\right)-\left(\frac{d\cdot\gamma'' D}{dc}\right)\\ R=&-\left(\frac{d\cdot\alpha E}{da}\right)-\left(\frac{d\cdot\mathit{6}E}{db}\right)-\left(\frac{d\cdot\gamma E}{dc}\right)\\ &-\left(\frac{d\cdot\alpha' D}{da}\right)-\left(\frac{d\cdot\mathit{6}' D}{db}\right)-\left(\frac{d\cdot\gamma' D}{dc}\right)\\ &-\left(\frac{d\cdot\alpha'' C}{da}\right)-\left(\frac{d\cdot\mathit{6}'' C}{db}\right)-\left(\frac{d\cdot\gamma'' C}{dc}\right);\end{aligned}$$

ossia a motivo delle precedenti [27]

$$P = -H\left[\left(\frac{dA}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{dE}{dz}\right)\right]$$

$$Q = -H\left[\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dB}{dy}\right) + \left(\frac{dD}{dz}\right)\right]$$

$$R = -H\left[\left(\frac{dE}{dx}\right) + \left(\frac{dD}{dy}\right) + \left(\frac{dC}{dz}\right)\right].$$

Sostituendo questi valori nelle [22] e dividendo per H, indi cambiando i segni, avremo le tre equazioni desiderate

$$\Gamma\left[X - \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)\right] + \left(\frac{dA}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{dE}{dz}\right) = 0$$

[30] $$\Gamma\left[Y - \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)\right] + \left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dB}{dy}\right) + \left(\frac{dD}{dz}\right) = 0$$

$$\Gamma\left[Z - \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)\right] + \left(\frac{dE}{dx}\right) + \left(\frac{dD}{dy}\right) + \left(\frac{dC}{dz}\right) = 0.$$

15. Osservisi la perfetta coincidenza di questo risultato con quello ottenuto dai due celebri geometri citati dal principio dell'introduzione dietro ragionamenti affatto diversi (*) e nei due casi dell'equilibrio e del moto trattati separatamente. Raccomando di notare che nella mia analisi le A, B, C, D, E, F non sono pressioni che si esercitino sopra diversi piani, ma sono coefficienti, cui nel seguito attaccherò io pure una rappresentazione di forze secondo mi sembrerà più naturale: sono funzioni delle x, y, z, t di forma ancora incognita, ma di cui sappiamo che non cambia passando dall'una all'altra parte del corpo. Mi si può obbjettare che queste equazioni [30] sono state trovate coi metodi della M. A. nel solo caso dei sistemi solidi rigidi, laddove quelle dei due chiarissimi francesi si riferiscono anche a' solidi elastici e variabili. Rispondo che nella seguente memoria farò vedere come esse si generalizzano ad abbracciare tutti i casi contemplati dai citati Autori senza dipartirsi dagli andamenti analitici insegnati da Lagrange.

Ed è appunto per tradurre le equazioni [30] al caso generale, che giova esaminare (siccome ne facemmo cenno sul cominciare del num. 9) l'altra soluzione che si ha usando le equazioni variate [13] invece delle [14]. Troveremo, come è ben da aspettarsi, il medesimo risultato, ma questa seconda analisi serve di fondamento a quella del caso generale, nel quale (e lo vedremo nella se-

---

(*) Cauchy. *Exercices de Mathématiques*. Tom. I.er, pag. 111; Tom. II, pag. 166. Poisson. *Mémoires de l'Institut de France*. Tom. VIII, pag. 387; Tom. X, pag. 578.

guente memoria) non hanno più luogo le due soluzioni. L'esposizione riesce più breve di quello che possa sembrare di subito, perchè solo in alcune parti la seconda soluzione diversifica dalla prima, e basta indicare tali parti. Per maggiore chiarezza esprimerò colle stesse lettere marcate di un apice le quantità analoghe: così primieramente A', B', C', D', E', F' significheranno i sei coefficienti indeterminati con cui moltiplicare nella seconda soluzione le variate delle sei equazioni di condizione.

16. Ritenuto tutto l'esposto al num. 9, invece della somma d'integrali triplicati ivi segnata [18] avremo la seguente

[31]
$$\begin{aligned}
&SdaSdbSdc\cdot A'\left\{\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{d\delta x}{da}\right)+\left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{d\delta y}{da}\right)+\left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{d\delta z}{da}\right)\right\}\\
&+SdaSdbSdc\cdot B'\left\{\left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{d\delta x}{db}\right)+\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{d\delta y}{db}\right)+\left(\frac{dz}{db}\right)\left(\frac{d\delta z}{db}\right)\right\}\\
&+SdaSdbSdc\cdot C'\left\{\left(\frac{dx}{dc}\right)\left(\frac{d\delta x}{dc}\right)+\left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{d\delta y}{dc}\right)+\left(\frac{dz}{dc}\right)\left(\frac{d\delta z}{dc}\right)\right\}\\
&+SdaSdbSdc\cdot F'\left\{\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{d\delta x}{db}\right)+\left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{d\delta y}{db}\right)+\left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{d\delta z}{db}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{d\delta x}{da}\right)+\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{d\delta y}{da}\right)+\left(\frac{dz}{db}\right)\left(\frac{d\delta z}{da}\right)\right\}\\
&+SdaSdbSdc\cdot E'\left\{\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{d\delta x}{dc}\right)+\left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{d\delta y}{dc}\right)+\left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{d\delta z}{dc}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{dx}{dc}\right)\left(\frac{d\delta x}{da}\right)+\left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{d\delta y}{da}\right)+\left(\frac{dz}{dc}\right)\left(\frac{d\delta z}{da}\right)\right\}\\
&+SdaSdbSdc\cdot D'\left\{\left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{d\delta x}{dc}\right)+\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{d\delta y}{dc}\right)+\left(\frac{dz}{db}\right)\left(\frac{d\delta z}{dc}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{dx}{dc}\right)\left(\frac{d\delta x}{db}\right)+\left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{d\delta y}{db}\right)+\left(\frac{dz}{dc}\right)\left(\frac{d\delta z}{db}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

17. Le ventisette trasformazioni nei termini della precedente quantità [31] si fanno tutte sui due modelli

$$A'\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{d\delta x}{da}\right)=-\left(\frac{d\cdot A'\left(\frac{dx}{da}\right)}{da}\right)\delta x+\left(\frac{d\cdot A'\left(\frac{dx}{da}\right)\delta x}{da}\right)$$

$$F'\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{d\delta x}{db}\right)=-\left(\frac{d\cdot F'\left(\frac{dx}{da}\right)}{db}\right)\delta x+\left(\frac{d\cdot F'\left(\frac{dx}{da}\right)\delta x}{db}\right)$$

che sono equazioni identiche. Così la quantità [31] si scompone in due parti di cui la prima è

$$[32] \qquad SdaSdbSdc\cdot[P'\delta x + Q'\delta y + R'\delta z]$$

avendo posto

$$[33] \qquad \begin{aligned}
P' = &-\left(\frac{d\cdot A'\left(\frac{dx}{da}\right)}{da}\right)-\left(\frac{d\cdot F'\left(\frac{dx}{db}\right)}{da}\right)-\left(\frac{d\cdot E'\left(\frac{dx}{dc}\right)}{da}\right)\\
&-\left(\frac{d\cdot F'\left(\frac{dx}{da}\right)}{db}\right)-\left(\frac{d\cdot B'\left(\frac{dx}{db}\right)}{db}\right)-\left(\frac{d\cdot D'\left(\frac{dx}{dc}\right)}{db}\right)\\
&-\left(\frac{d\cdot E'\left(\frac{dx}{da}\right)}{dc}\right)-\left(\frac{d\cdot D'\left(\frac{dx}{db}\right)}{dc}\right)-\left(\frac{d\cdot C'\left(\frac{dx}{dc}\right)}{dc}\right)\\
Q' = &-\left(\frac{d\cdot A'\left(\frac{dy}{da}\right)}{da}\right)-\left(\frac{d\cdot F'\left(\frac{dy}{db}\right)}{da}\right)-\left(\frac{d\cdot E'\left(\frac{dy}{dc}\right)}{da}\right)\\
&-\left(\frac{d\cdot F'\left(\frac{dy}{da}\right)}{db}\right)-\left(\frac{d\cdot B'\left(\frac{dy}{db}\right)}{db}\right)-\left(\frac{d\cdot D'\left(\frac{dy}{dc}\right)}{db}\right)\\
&-\left(\frac{d\cdot E'\left(\frac{dy}{da}\right)}{dc}\right)-\left(\frac{d\cdot D'\left(\frac{dy}{db}\right)}{dc}\right)-\left(\frac{d\cdot C'\left(\frac{dy}{dc}\right)}{dc}\right)\\
R' = &-\left(\frac{d\cdot A'\left(\frac{dz}{da}\right)}{da}\right)-\left(\frac{d\cdot F'\left(\frac{dz}{db}\right)}{da}\right)-\left(\frac{d\cdot E'\left(\frac{dz}{dc}\right)}{da}\right)\\
&-\left(\frac{d\cdot F'\left(\frac{dz}{da}\right)}{db}\right)-\left(\frac{d\cdot B'\left(\frac{dz}{db}\right)}{db}\right)-\left(\frac{d\cdot D'\left(\frac{dz}{dc}\right)}{db}\right)\\
&-\left(\frac{d\cdot E'\left(\frac{dz}{da}\right)}{dc}\right)-\left(\frac{d\cdot D'\left(\frac{dz}{db}\right)}{dc}\right)-\left(\frac{d\cdot C'\left(\frac{dz}{dc}\right)}{dc}\right).
\end{aligned}$$

18. Abbiamo poi l'altra parte

$$Sda\,Sdb\,Sdc\cdot T'$$

essendo

$$[34]\quad \begin{aligned} T' = & \left(\frac{d\cdot A'\left(\frac{dx}{da}\right)\delta x}{da}\right) + \left(\frac{d\cdot F'\left(\frac{dx}{db}\right)\delta x}{da}\right) + \left(\frac{d\cdot E'\left(\frac{dx}{dc}\right)\delta x}{da}\right) \\ & + \left(\frac{d\cdot A'\left(\frac{dy}{da}\right)\delta y}{da}\right) + \left(\frac{d\cdot F'\left(\frac{dy}{db}\right)\delta y}{da}\right) + \left(\frac{d\cdot E'\left(\frac{dy}{dc}\right)\delta y}{da}\right) \\ & + \left(\frac{d\cdot A'\left(\frac{dz}{da}\right)\delta z}{da}\right) + \left(\frac{d\cdot F'\left(\frac{dz}{db}\right)\delta z}{da}\right) + \left(\frac{d\cdot E'\left(\frac{dz}{dc}\right)\delta z}{da}\right) \\ & + \left(\frac{d\cdot F'\left(\frac{dx}{da}\right)\delta x}{db}\right) + \left(\frac{d\cdot B'\left(\frac{dx}{db}\right)\delta x}{db}\right) + \left(\frac{d\cdot D'\left(\frac{dx}{dc}\right)\delta x}{db}\right) \\ & + \left(\frac{d\cdot F'\left(\frac{dy}{da}\right)\delta y}{db}\right) + \left(\frac{d\cdot B'\left(\frac{dy}{db}\right)\delta y}{db}\right) + \left(\frac{d\cdot D'\left(\frac{dy}{dc}\right)\delta y}{db}\right) \\ & + \left(\frac{d\cdot F'\left(\frac{dz}{da}\right)\delta z}{db}\right) + \left(\frac{d\cdot B'\left(\frac{dz}{db}\right)\delta z}{db}\right) + \left(\frac{d\cdot D'\left(\frac{dz}{dc}\right)\delta z}{db}\right) \\ & + \left(\frac{d\cdot E'\left(\frac{dx}{da}\right)\delta x}{dc}\right) + \left(\frac{d\cdot D'\left(\frac{dx}{db}\right)\delta x}{dc}\right) + \left(\frac{d\cdot C'\left(\frac{dx}{dc}\right)\delta x}{dc}\right) \\ & + \left(\frac{d\cdot E'\left(\frac{dy}{da}\right)\delta y}{dc}\right) + \left(\frac{d\cdot D'\left(\frac{dy}{db}\right)\delta y}{dc}\right) + \left(\frac{d\cdot C'\left(\frac{dy}{dc}\right)\delta y}{dc}\right) \\ & + \left(\frac{d\cdot E'\left(\frac{dz}{da}\right)\delta z}{dc}\right) + \left(\frac{d\cdot D'\left(\frac{dz}{db}\right)\delta z}{dc}\right) + \left(\frac{d\cdot C'\left(\frac{dz}{dc}\right)\delta z}{dc}\right). \end{aligned}$$

19. Invece delle equazioni [22] avremo le

$$[35]\quad \begin{aligned} & \Gamma H\left[\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) - X\right] + P' = 0 \\ & \Gamma H\left[\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) - Y\right] + Q' = 0 \\ & \Gamma H\left[\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) - Z\right] + R' = 0 \end{aligned}$$

dove le P', Q', R' stanno in luogo dei loro valori [33]. Interessa di ridurre questi valori [33] alla forma di quelli delle P, Q, R espressi dalle [29], perchè ciò riuscendo tutto il rimanente cammina come nella prima soluzione.

20. Stabiliscansi le tre equazioni

$$[36]\quad \begin{aligned} A''\alpha + F''\alpha' + E''\alpha'' &= A'\left(\frac{dx}{da}\right) + F'\left(\frac{dx}{db}\right) + E'\left(\frac{dx}{dc}\right) \\ A''\beta + F''\beta' + E''\beta'' &= F'\left(\frac{dx}{da}\right) + B'\left(\frac{dx}{db}\right) + D'\left(\frac{dx}{dc}\right) \\ A''\gamma + F''\gamma' + E''\gamma'' &= E'\left(\frac{dx}{da}\right) + D'\left(\frac{dx}{db}\right) + C'\left(\frac{dx}{dc}\right) \end{aligned}$$

essendo A'', F'', E'' tre nuove quantità che avranno i valori risultanti dalla soluzione di queste equazioni di posizione [36]. Le $\alpha, \alpha', \alpha''$, ecc. sono quelle quantità messe per compendio in luogo dei loro valori [23]. Si vede facilmente che a motivo delle [36] il valore di P' dato dalla prima delle [33] può scriversi

[37] $$P' = -\left(\frac{d\cdot\alpha A''}{da}\right) - \left(\frac{d\cdot 6 A''}{db}\right) - \left(\frac{d\cdot\gamma A''}{dc}\right) - \left(\frac{d\cdot\alpha' F''}{da}\right) - \left(\frac{d\cdot 6' F''}{db}\right) - \left(\frac{d\cdot\gamma' F''}{dc}\right) - \left(\frac{d\cdot\alpha'' E''}{da}\right) - \left(\frac{d\cdot 6'' E''}{db}\right) - \left(\frac{d\cdot\gamma'' E''}{dc}\right)$$

espressione in tutto simile a quella di P nella prima delle [29]. Per ridurre similmente il valore di Q' bisogna stabilire le altre tre equazioni

[38] $$\begin{aligned} F''\alpha + B''\alpha' + D''\alpha'' &= A'\left(\frac{dy}{da}\right) + F'\left(\frac{dy}{db}\right) + E'\left(\frac{dy}{dc}\right) \\ F''6 + B''6' + D''6'' &= F'\left(\frac{dy}{da}\right) + B'\left(\frac{dy}{db}\right) + D'\left(\frac{dy}{dc}\right) \\ F''\gamma + B''\gamma' + D''\gamma'' &= E'\left(\frac{dy}{da}\right) + D'\left(\frac{dy}{db}\right) + C'\left(\frac{dy}{dc}\right) \end{aligned}$$

dove B'', D'' sono due nuove quantità cui si dovranno attribuire i valori risultanti dalla soluzione di queste [38], ed F'' si vorrebbe che fosse quella stessa che entra nelle [36]. È evidente che ciò non può essere permesso se i due valori di F'' dedotti dalla soluzione delle [36], [38] non si combinano ad essere identici: ma or ora dimostrerò che questo singolare accidente analitico ha appunto luogo. In conseguenza delle [38] il valore di Q' dato dalla seconda delle [33] può scriversi

[39] $$Q' = -\left(\frac{d\cdot\alpha F''}{da}\right) - \left(\frac{d\cdot 6 F''}{db}\right) - \left(\frac{d\cdot\gamma F''}{dc}\right) - \left(\frac{d\cdot\alpha' B''}{da}\right) - \left(\frac{d\cdot 6' B''}{db}\right) - \left(\frac{d\cdot\gamma' B''}{dc}\right) - \left(\frac{d\cdot\alpha'' D''}{da}\right) - \left(\frac{d\cdot 6'' D''}{db}\right) - \left(\frac{d\cdot\gamma'' D''}{dc}\right)$$

simile a quello di Q nella seconda delle [29].

Per ultimo all'oggetto di trasformare in maniera somigliante il valore di R', pongansi le altre tre equazioni

[40] $$\begin{aligned} E''\alpha + D''\alpha' + C''\alpha'' &= A'\left(\frac{dz}{da}\right) + F'\left(\frac{dz}{db}\right) + E'\left(\frac{dz}{dc}\right) \\ E''6 + D''6' + C''6'' &= F'\left(\frac{dz}{da}\right) + B'\left(\frac{dz}{db}\right) + D'\left(\frac{dz}{dc}\right) \\ E''\gamma + D''\gamma' + C''\gamma'' &= E'\left(\frac{dz}{da}\right) + D'\left(\frac{dz}{db}\right) + C'\left(\frac{dz}{dc}\right) \end{aligned}$$

nelle quali C'' è una nuova quantità che riceverà il suo valore dalla soluzione di queste equazioni, ed E'', D'' saranno le stesse che entrano nelle [36], [38] quando sia dimostrato (ciò che da qui a un momento farassi) che i loro valori risultanti da quelle e da queste riescono i medesimi. Viene dalle [40] che il

valore di R' dato dalla terza delle [33] può scriversi

$$[41]\qquad R'=-\left(\frac{d\cdot\alpha E''}{da}\right)-\left(\frac{d\cdot\beta E''}{db}\right)-\left(\frac{d\cdot\gamma E''}{dc}\right)$$
$$-\left(\frac{d\cdot\alpha' D''}{da}\right)-\left(\frac{d\cdot\beta' D''}{db}\right)-\left(\frac{d\cdot\gamma' D''}{dc}\right)$$
$$-\left(\frac{d\cdot\alpha'' C''}{da}\right)-\left(\frac{d\cdot\beta'' C''}{db}\right)-\left(\frac{d\cdot\gamma'' C''}{dc}\right)$$

simile a quello di R nella terza delle [29].

21. Rimane a dare la soluzione delle equazioni [36], [38], [40] e a dimostrare che i doppj valori risultanti da tale operazione per le tre F'', E'', D'' sono fra loro eguali.

Chiaminsi ordinatamente I, II, III, i secondi membri delle [36], e il metodo elementare per la soluzione di tre equazioni di primo grado a tre incognite ci darà

$$A''=\mathrm{I}\cdot\frac{\beta'\gamma''-\gamma'\beta''}{\Delta}+\mathrm{II}\cdot\frac{\alpha''\gamma'-\gamma''\alpha'}{\Delta}+\mathrm{III}\cdot\frac{\alpha'\beta''-\beta'\alpha''}{\Delta}$$
$$F''=\mathrm{I}\cdot\frac{\gamma\beta''-\beta\gamma''}{\Delta}+\mathrm{II}\cdot\frac{\alpha\gamma''-\gamma\alpha''}{\Delta}+\mathrm{III}\cdot\frac{\beta\alpha''-\alpha\beta''}{\Delta}$$
$$E''=\mathrm{I}\cdot\frac{\beta\gamma'-\gamma\beta'}{\Delta}+\mathrm{II}\cdot\frac{\gamma\alpha'-\alpha\gamma'}{\Delta}+\mathrm{III}\cdot\frac{\alpha\beta'-\beta\alpha'}{\Delta}$$

essendo $\quad\Delta=\alpha\beta'\gamma''-\alpha\gamma'\beta''+\beta\alpha''\gamma'-\beta\gamma''\alpha'+\gamma\alpha'\beta''-\gamma\beta'\alpha''.$

Ora si richiamino le equazioni (24), (25), (26), (27) già dimostrate nella nota III.ª posta in fondo alla memoria, e ivi preparate per l'uso che qui se ne doveva fare: le precedenti si ridurranno alle

$$A''=\mathrm{I}\cdot\frac{\left(\frac{dx}{da}\right)}{H}+\mathrm{II}\cdot\frac{\left(\frac{dx}{db}\right)}{H}+\mathrm{III}\cdot\frac{\left(\frac{dx}{dc}\right)}{H}$$
$$[42]\qquad F''=\mathrm{I}\cdot\frac{\left(\frac{dy}{da}\right)}{H}+\mathrm{II}\cdot\frac{\left(\frac{dy}{db}\right)}{H}+\mathrm{III}\cdot\frac{\left(\frac{dy}{dc}\right)}{H}$$
$$E''=\mathrm{I}\cdot\frac{\left(\frac{dz}{da}\right)}{H}+\mathrm{II}\cdot\frac{\left(\frac{dz}{db}\right)}{H}+\mathrm{III}\cdot\frac{\left(\frac{dz}{dc}\right)}{H}.$$

Alla stessa maniera, denominati per brevità (I), (II), (III) i secondi membri delle [38], dedurremo da esse

$$F''=(\mathrm{I})\cdot\frac{\left(\frac{dx}{da}\right)}{H}+(\mathrm{II})\cdot\frac{\left(\frac{dx}{db}\right)}{H}+(\mathrm{III})\cdot\frac{\left(\frac{dx}{dc}\right)}{H}$$
$$[43]\qquad B''=(\mathrm{I})\cdot\frac{\left(\frac{dy}{da}\right)}{H}+(\mathrm{II})\cdot\frac{\left(\frac{dy}{db}\right)}{H}+(\mathrm{III})\cdot\frac{\left(\frac{dy}{dc}\right)}{H}$$
$$D''=(\mathrm{I})\cdot\frac{\left(\frac{dz}{da}\right)}{H}+(\mathrm{II})\cdot\frac{\left(\frac{dz}{db}\right)}{H}+(\mathrm{III})\cdot\frac{\left(\frac{dz}{dc}\right)}{H}.$$

E chiamati ((I)), ((II)), ((III)) i secondi membri delle [40], avremo da queste ultime

$$E''=((I))\cdot\frac{\left(\frac{dx}{da}\right)}{H}+((II))\cdot\frac{\left(\frac{dx}{db}\right)}{H}+((III))\cdot\frac{\left(\frac{dx}{dc}\right)}{H}$$

[44] $$D''=((I))\cdot\frac{\left(\frac{dy}{da}\right)}{H}+((II))\cdot\frac{\left(\frac{dy}{db}\right)}{H}+((III))\cdot\frac{\left(\frac{dy}{dc}\right)}{H}$$

$$C''=((I))\cdot\frac{\left(\frac{dz}{da}\right)}{H}+((II))\cdot\frac{\left(\frac{dz}{db}\right)}{H}+((III))\cdot\frac{\left(\frac{dz}{dc}\right)}{H}.$$

22. Rimessi per I, II, III; (I), (II), (III); ((I)), ((II)), ((III)) i trinomj di cui sono indicazioni, trovasi veramente che i due valori di F'', E'', D'' dedotti dalle precedenti [42], [43], [44] riescono identici; e si hanno tra le A'', B'', C'', D'', E'', F'', e le A', B', C', D', E', F' le seguenti rimarcabili relazioni

[45] $$HA''=A'\left(\frac{dx}{da}\right)^2+B'\left(\frac{dx}{db}\right)^2+C'\left(\frac{dx}{dc}\right)^2$$
$$+2F'\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dx}{db}\right)+2E'\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right)+2D'\left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right)$$

$$HB''=A'\left(\frac{dy}{da}\right)^2+B'\left(\frac{dy}{db}\right)^2+C'\left(\frac{dy}{dc}\right)^2$$
$$+2F'\left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dy}{db}\right)+2E'\left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right)+2D'\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right)$$

$$HC''=A'\left(\frac{dz}{da}\right)^2+B'\left(\frac{dz}{db}\right)^2+C'\left(\frac{dz}{dc}\right)^2$$
$$+2F'\left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{dz}{db}\right)+2E'\left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right)+2D'\left(\frac{dz}{db}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right)$$

$$HF''=A'\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dy}{da}\right)+B'\left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dy}{db}\right)+C'\left(\frac{dx}{dc}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right)+F'\left[\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dy}{db}\right)+\left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dx}{db}\right)\right]$$
$$+E'\left[\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right)+\left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right)\right]+D'\left[\left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right)+\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right)\right]$$

$$HE''=A'\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dz}{da}\right)+B'\left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dz}{db}\right)+C'\left(\frac{dx}{dc}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right)+F'\left[\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dz}{db}\right)+\left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{dx}{db}\right)\right]$$
$$+E'\left[\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right)+\left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right)\right]+D'\left[\left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right)+\left(\frac{dz}{db}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right)\right]$$

$$HD''=A'\left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dz}{da}\right)+B'\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{dz}{db}\right)+C'\left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right)+F'\left[\left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dz}{db}\right)+\left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{dy}{db}\right)\right]$$
$$+E'\left[\left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right)+\left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right)\right]+D'\left[\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right)+\left(\frac{dz}{db}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right)\right].$$

23. È così dimostrato che nelle [35] possono alle P', Q', R' attribuirsi i valori [37], [39], [41] fatti colle A'', B'', ecc. le quali sono date per le A', B', ecc. mediante le precedenti [45]. Il che essendo, collo stesso discorso tenuto al num. 14 sulle [29] si prova che le [35] si riducono alle

$$\Gamma\left[X-\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)\right]+\left(\frac{dA''}{dx}\right)+\left(\frac{dF''}{dy}\right)+\left(\frac{dE''}{dz}\right)=0$$

[46] $$\Gamma\left[Y-\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)\right]+\left(\frac{dF''}{dx}\right)+\left(\frac{dB''}{dy}\right)+\left(\frac{dD''}{dz}\right)=0$$

$$\Gamma\left[Z-\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)\right]+\left(\frac{dE''}{dx}\right)+\left(\frac{dD''}{dy}\right)+\left(\frac{dC''}{dz}\right)=0$$

di una forma affatto simile a quella delle [30].

24. Giova notare, perchè ne avremo bisogno in seguito, che la quantità T' segnata [34] al num. 18 si può anch'essa esprimere colle A'', B'', ecc. invece che colle A', B', ecc.: e ciò per effetto delle [36], [38], [40]. Non vi vuole che poca attenzione per capire la trasformazione della [34] nella seguente

[47] $$T'=$$

$$\left(\frac{d\cdot\{(A''\alpha+F''\alpha'+E''\alpha'')\partial x+(F''\alpha+B''\alpha'+D''\alpha'')\partial y+(E''\alpha+D''\alpha'+C''\alpha'')\partial z\}}{da}\right)$$

$$+\left(\frac{d\cdot\{(A''\beta+F''\beta'+E''\beta'')\partial x+(F''\beta+B''\beta'+D''\beta'')\partial y+(E''\beta+D''\beta'+C''\beta'')\partial z\}}{db}\right)$$

$$+\left(\frac{d\cdot\{(A''\gamma+F''\gamma'+E''\gamma'')\partial x+(F''\gamma+B''\gamma'+D''\gamma'')\partial y+(E''\gamma+D''\gamma'+C''\gamma'')\partial z\}}{dc}\right).$$

25. Dimostrai in due maniere, seguendo i metodi della M. A. le equazioni fondamentali [30], ovvero [46], il che era l'oggetto propostomi nella presente Memoria. Restano ad esaminarsi le conseguenze che derivansi dalle quantità portate ai limiti di una integrazione, e tuttavia esistenti sotto integrali duplicati; ed anche quelle risultanti dal confronto delle due soluzioni pel corpo solido rigido, delle quali (come enunciai al num. 15) non ha luogo che una sola nel caso generale. Sono questi argomenti di molta importanza, e me ne occuperò in successive memorie dopo che mi sarò sdebitato dell'impegno assunto al num. 15.

NOTE

I.ᴬ

Ai numeri 4, 5, 7.

Dimostro in questa prima nota come dalle equazioni

(1)	$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1$	(4)	$\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0$
(2)	$\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1$	(5)	$\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3=0$
(3)	$\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1$	(6)	$\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3=0$

si possono per semplice processo analitico dedurre le altre quindici equazioni segnate [7], [8] al citato num. 4 della memoria: e con ciò avrò provata la dipendenza affatto simile delle equazioni [10], [11], [12] riferite al num. 5, siccome ho asserito in primo luogo al num. 7.

Prendansi le equazioni (4), (5) e considerandovi le due quantità α_1, α_2 come incognite, se ne cerchino i valori per mezzo delle formole generali che danno la risoluzione di due equazioni di primo grado a due incognite: i risultati si potranno legare insieme scrivendo le due equazioni

$$\frac{\alpha_1}{\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2}=\frac{\alpha_2}{\beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3}=\frac{\alpha_3}{\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1}$$

quindi, se dicasi λ il valore d'una delle precedenti frazioni, dedurremo

$$(*)\qquad \alpha_1=\lambda(\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2);\;\; \alpha_2=\lambda(\beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3);\;\; \alpha_3=\lambda(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1).$$

Ora per determinare λ osserviamo che in forza delle trovate espressioni la (1) ci dà

$$\lambda^2[(\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2)^2+(\beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3)^2+(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)^2]=1;$$

in questa il coefficiente di λ^2 trovasi identico colla quantità

$$(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2)(\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2)-(\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3)^2$$

la quale per le antecedenti (2), (3), (6) vedesi eguale all'unità. Pertanto è $\lambda^2=1$, $\lambda=\pm1$, e le (*) diventano

$$(7)\qquad \alpha_1=\pm(\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2);\;\; \alpha_2=\pm(\beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3);\;\; \alpha_3=\pm(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1).$$

Queste, ove dei due segni prendasi il positivo, sono tre fra le equazioni [8] sopra citate. Il doppio segno dovea necessariamente comparire, perchè nelle sei equazioni da cui siamo partiti, le tre quantità $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ trovansi in perfetta simmetria colle tre $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ e possono senza alterazione essere con esse scambiate: lo stesso cambiamento deve dunque potersi fare nelle trovate (7), ed esso è tale che, quando i secondi membri siansi presi col segno positivo, li fa passare al negativo. In pratica però si possono i valori (7) prendere, come si è fatto nella memoria, col segno positivo, perchè è evidente che nelle denominazioni [5] della memoria niente ci impediva di marcare per $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ quei tre coseni che marcammo con $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, e viceversa: quest'arbitrio è sottinteso e voluto dalla natura stessa della questione, ed esso equivale al doppio segno. Siccome però la chiarezza di un tale ragionamento può non essere visibile a tutti, lascerò nelle (7) il doppio segno.

Risolvendo con un giuoco affatto simile per β_1, β_2 le equazioni (4), (6), e adoperando la (2) a fine di determinare il coefficiente comune dei valori risultanti per β_1, β_2, β_3 coll'intervento

secondario delle (1), (3), (5), troveremo

$$(8)\qquad \beta_1=\pm(\alpha_3\gamma_2-\alpha_2\gamma_3);\quad \beta_2=\pm(\alpha_1\gamma_3-\alpha_3\gamma_1);\quad \beta_3=\pm(\alpha_2\gamma_1-\alpha_1\gamma_2).$$

Un terzo andamento eguale ai due precedenti dà

$$(9)\qquad \gamma_1=\pm(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2);\quad \gamma_2=\pm(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3);\quad \gamma_3=\pm(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1).$$

Le sei equazioni ultimamente scritte, presi i secondi membri col segno positivo, sono le restanti equazioni delle [8] che prendemmo primieramente a dimostrare.

Presentemente abbiamo quanto basta per verificare sei equazioni che qui soggiungo

$$\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=(\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2)(\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2)-(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3)^2$$

$$\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2=(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)(\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2)-(\alpha_1\alpha_3+\beta_1\beta_3+\gamma_1\gamma_3)^2$$

$$\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2=(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)(\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2)-(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2)^2.$$

$$\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=(\alpha_1\alpha_3+\beta_1\beta_3+\gamma_1\gamma_3)(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3)-(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2)(\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2)$$

$$\alpha_1\alpha_3+\beta_1\beta_3+\gamma_1\gamma_3=(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2)(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3)-(\alpha_1\alpha_3+\beta_1\beta_3+\gamma_1\gamma_3)(\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2)$$

$$\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3=(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2)(\alpha_1\alpha_3+\beta_1\beta_3+\gamma_1\gamma_3)-(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)$$

e si fa mettendo nei primi membri i valori somministrati dalle trovate (7), (8), (9), e provando allora che le equazioni sono identiche. La verificazione è meno penosa di quello che sembra a prima vista, perchè per le prime tre giuoca una trasformazione simile a quella di cui facemmo uso più sopra nel coefficiente di λ^2: e delle restanti quando siasene verificata una, le altre si riconoscono per lo scambio lecito fra le quantità.

Pongansi per abbreviare le denominazioni seguenti

$$x=\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2;\quad y=\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2;\quad z=\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2$$

$$\xi=\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2;\quad \eta=\alpha_1\alpha_3+\beta_1\beta_3+\gamma_1\gamma_3;\quad \zeta=\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3$$

e le precedenti sei equazioni diverranno

$$(**)\qquad x=yz-\zeta^2;\quad y=xz-\eta^2;\quad z=xy-\xi^2$$

$$(***)\qquad \xi(1+z)=\eta\zeta;\quad \eta(1+y)=\xi\zeta;\quad \zeta(1+x)=\xi\eta.$$

Il prodotto delle ultime tre dà

$$(\xi\eta\zeta)^2=\xi\eta\zeta(1+x)(1+y)(1+z)$$

da cui sortono pel prodotto $\xi\eta\zeta$ i due diversi valori, *zero*, e $(1+x)(1+y)(1+z)$. Questo secondo deve essere rigettato perchè se si accettasse si otterrebbe dalla prima delle (***) moltiplicata per ξ, $\xi^2=(1+x)(1+y)$, valore che sostituito nella terza delle (**) conduce alla $x+y+z=-1$, la quale non può stare, giacchè il primo membro è sempre quantità positiva, essendo (riveggansi le precedenti denominazioni) somma di quadrati. Resta che sia $\xi\eta\zeta=0$, quindi le (***) moltiplicate rispettivamente per ξ, η, ζ si riducono

$$\xi^2(1+z)=0;\quad \eta^2(1+y)=0;\quad \zeta^2(1+x)=0;$$

e poichè i fattori $1+z$, $1+y$, $1+x$ non possono mai essere zero, non potendo, come testè si accennò, x, y, z prendere valori negativi, è forza che siano

$$\xi=0;\quad \eta=0;\quad \zeta=0.$$

In conseguenza le (**) diventano

$$(****)\qquad x=yz;\quad y=xz;\quad z=xy$$

che moltiplicate fra loro presentano

$$xyz=(xyz)^2.$$

Vedesi da quest'ultima che il prodotto xyz può avere due valori *zero*, 1. Il primo deve essere rigettato, perchè adottandolo dalle (****) moltiplicate rispettivamente per x, y, z si caverebbero $x=0, y=0, z=0$: il che non può stare, viste le quantità di cui x, y, z sono abbreviazioni. Esse sono somme di quadrati, e quindi non possono essere zero, se non lo è ciascun quadrato in particolare, nel qual caso riuscirebbero false le superiori equazioni (1), (2), (3). Devesi adunque assumere $xyz=1$, epperò le (****) moltiplicate rispettivamente per x, y, z somministrano $x^2=1$, $y^2=1$, $z^2=1$. Estraendo da queste le radici quadrate si rifiuta il segno negativo, non potendo x, y, z essere negative per la ragione più volte accennata, e si hanno

$$x=1, \quad y=1, \quad z=1.$$

I trovati valori di $\xi, \eta, \zeta, x, y, z$, rimettendo per queste lettere le quantità che rappresentano per compendio, ci porgono le equazioni

$$\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1 \qquad \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0$$

$$\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2=1 \qquad \alpha_1\alpha_3+\beta_1\beta_3+\gamma_1\gamma_3=0$$

$$\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2=1 \qquad \alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3=0$$

che sono le equazioni [7] del num. 4 della memoria.

II.^A

Al numero 7.

Adotto le equazioni di posizione

$$(1) \qquad \begin{aligned} &\left(\frac{dx}{da}\right)=\alpha_1; \quad \left(\frac{dx}{db}\right)=\beta_1; \quad \left(\frac{dx}{dc}\right)=\gamma_1 \\ &\left(\frac{dy}{da}\right)=\alpha_2; \quad \left(\frac{dy}{db}\right)=\beta_2; \quad \left(\frac{dy}{dc}\right)=\gamma_2 \\ &\left(\frac{dz}{da}\right)=\alpha_3; \quad \left(\frac{dz}{db}\right)=\beta_3; \quad \left(\frac{dz}{dc}\right)=\gamma_3 \end{aligned}$$

volendo che alle nove quantità $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ non si attacchi qui altro significato oltre quello di quantità sostituite alle derivate parziali esistenti nei primi membri delle (1) per brevità di scrittura.

Con queste denominazioni le equazioni [10] del num. 5 della memoria prendono le espressioni

$$(2) \quad \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1; \qquad (5) \quad \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0$$

$$(3) \quad \beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1; \qquad (6) \quad \alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3=0$$

$$(4) \quad \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1; \qquad (7) \quad \beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3=0$$

poste le quali, per effetto di solo maneggio analitico, come si è dimostrato nella nota precedente, sussistono insieme con esse le altre sei

$$(8) \quad \alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1 \qquad (11) \quad \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0$$

$$(9) \quad \alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2=1 \qquad (12) \quad \alpha_1\alpha_3+\beta_1\beta_3+\gamma_1\gamma_3=0$$

$$(10) \quad \alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2=1 \qquad (13) \quad \alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3=0.$$

Osserviamo primieramente che dalle equazioni di posizione (1) discendono naturalmente le seguenti

$$(14)\quad \left(\frac{d\alpha_1}{db}\right)=\left(\frac{d\beta_1}{da}\right);\qquad (15)\quad \left(\frac{d\alpha_1}{dc}\right)=\left(\frac{d\gamma_1}{da}\right);\qquad (16)\quad \left(\frac{d\beta_1}{dc}\right)=\left(\frac{d\gamma_1}{db}\right)$$

$$(17)\quad \left(\frac{d\alpha_2}{db}\right)=\left(\frac{d\beta_2}{da}\right);\qquad (18)\quad \left(\frac{d\alpha_2}{dc}\right)=\left(\frac{d\gamma_2}{da}\right);\qquad (19)\quad \left(\frac{d\beta_2}{dc}\right)=\left(\frac{d\gamma_2}{db}\right)$$

$$(20)\quad \left(\frac{d\alpha_3}{db}\right)=\left(\frac{d\beta_3}{da}\right);\qquad (21)\quad \left(\frac{d\alpha_3}{dc}\right)=\left(\frac{d\gamma_3}{da}\right);\qquad (22)\quad \left(\frac{d\beta_3}{dc}\right)=\left(\frac{d\gamma_3}{db}\right).$$

Potrei ora scrivere a dirittura le 18 equazioni derivate parziali che si deducono immediatamente dalle (2), (3), (4), (5), (6), (7) e di cui feci menzione al num. 7 della memoria: ma per evitare nella farragine di tante equazioni quelle che non sono necessarie allo scopo, amo meglio usarne un po' per volta secondo il bisogno; scrivo intanto le cinque

$$(23)\quad \alpha_1\left(\frac{d\alpha_1}{da}\right)+\alpha_2\left(\frac{d\alpha_2}{da}\right)+\alpha_3\left(\frac{d\alpha_3}{da}\right)=0$$

$$(24)\quad \alpha_1\left(\frac{d\alpha_1}{db}\right)+\alpha_2\left(\frac{d\alpha_2}{db}\right)+\alpha_3\left(\frac{d\alpha_3}{db}\right)=0$$

$$(25)\quad \alpha_1\left(\frac{d\alpha_1}{dc}\right)+\alpha_2\left(\frac{d\alpha_2}{dc}\right)+\alpha_3\left(\frac{d\alpha_3}{dc}\right)=0$$

$$(26)\quad \beta_1\left(\frac{d\alpha_1}{da}\right)+\beta_2\left(\frac{d\alpha_2}{da}\right)+\beta_3\left(\frac{d\alpha_3}{da}\right)+\alpha_1\left(\frac{d\beta_1}{da}\right)+\alpha_2\left(\frac{d\beta_2}{da}\right)+\alpha_3\left(\frac{d\beta_3}{da}\right)=0$$

$$(27)\quad \gamma_1\left(\frac{d\alpha_1}{da}\right)+\gamma_2\left(\frac{d\alpha_2}{da}\right)+\gamma_3\left(\frac{d\alpha_3}{da}\right)+\alpha_1\left(\frac{d\gamma_1}{da}\right)+\alpha_2\left(\frac{d\gamma_2}{da}\right)+\alpha_3\left(\frac{d\gamma_3}{da}\right)=0$$

di cui le prime tre sono le derivate parziali della (2) per a, b, c, e le ultime due sono le derivate parziali per a delle (5), (6). In queste ultime due i trinomj

$$\alpha_1\left(\frac{d\beta_1}{da}\right)+\alpha_2\left(\frac{d\beta_2}{da}\right)+\alpha_3\left(\frac{d\beta_3}{da}\right)\ ;\qquad \alpha_1\left(\frac{d\gamma_1}{da}\right)+\alpha_2\left(\frac{d\gamma_2}{da}\right)+\alpha_3\left(\frac{d\gamma_3}{da}\right)$$

si possono per le (14), (17), (20); (15), (18), (21) cambiare nei trinomj

$$\alpha_1\left(\frac{d\alpha_1}{db}\right)+\alpha_2\left(\frac{d\alpha_2}{db}\right)+\alpha_3\left(\frac{d\alpha_3}{db}\right)\ ;\qquad \alpha_1\left(\frac{d\alpha_1}{dc}\right)+\alpha_2\left(\frac{d\alpha_2}{dc}\right)+\alpha_3\left(\frac{d\alpha_3}{dc}\right)$$

e allora per le (24), (25) si riconoscono entrambi zero. Abbiamo dunque per la (23), e le (26), (27) diminuite ciascuna nei primi membri dei loro tre ultimi termini, la sussistenza simultanea delle tre

$$(28)\quad \begin{aligned} \alpha_1\left(\frac{d\alpha_1}{da}\right)+\alpha_2\left(\frac{d\alpha_2}{da}\right)+\alpha_3\left(\frac{d\alpha_3}{da}\right)&=0\\ \beta_1\left(\frac{d\alpha_1}{da}\right)+\beta_2\left(\frac{d\alpha_2}{da}\right)+\beta_3\left(\frac{d\alpha_3}{da}\right)&=0\\ \gamma_1\left(\frac{d\alpha_1}{da}\right)+\gamma_2\left(\frac{d\alpha_2}{da}\right)+\gamma_3\left(\frac{d\alpha_3}{da}\right)&=0\,. \end{aligned}$$

Si moltiplichino queste rispettivamente per α_1, β_1, γ_1, indi si sommino: avremo a motivo delle (8), (11), (12)

$$(29)\qquad \left(\frac{d\alpha_1}{da}\right)=0\ .$$

Si moltiplichino similmente le (28) per α_2, β_2, γ_2, e sommate ci porgeranno a motivo delle (11), (9), (13)

$$(30) \qquad \left(\frac{d\alpha_2}{da}\right)=0$$

quindi, o per un giuoco simile, o per immediata conseguenza delle (28), (29), (30) anche

$$(31) \qquad \left(\frac{d\alpha_3}{da}\right)=0\,.$$

Assumansi adesso le cinque

$$(32) \qquad \beta_1\left(\frac{d\beta_1}{da}\right)+\beta_2\left(\frac{d\beta_2}{da}\right)+\beta_3\left(\frac{d\beta_3}{da}\right)=0$$

$$(33) \qquad \beta_1\left(\frac{d\beta_1}{db}\right)+\beta_2\left(\frac{d\beta_2}{db}\right)+\beta_3\left(\frac{d\beta_3}{db}\right)=0$$

$$(34) \qquad \beta_1\left(\frac{d\beta_1}{dc}\right)+\beta_2\left(\frac{d\beta_2}{dc}\right)+\beta_3\left(\frac{d\beta_3}{dc}\right)=0$$

$$(35) \qquad \alpha_1\left(\frac{d\beta_1}{db}\right)+\alpha_2\left(\frac{d\beta_2}{db}\right)+\alpha_3\left(\frac{d\beta_3}{db}\right)+\beta_1\left(\frac{d\alpha_1}{db}\right)+\beta_2\left(\frac{d\alpha_2}{db}\right)+\beta_3\left(\frac{d\alpha_3}{db}\right)=0$$

$$(36) \qquad \gamma_1\left(\frac{d\beta_1}{db}\right)+\gamma_2\left(\frac{d\beta_2}{db}\right)+\gamma_3\left(\frac{d\beta_3}{db}\right)+\beta_1\left(\frac{d\gamma_1}{db}\right)+\beta_2\left(\frac{d\gamma_2}{db}\right)+\beta_3\left(\frac{d\gamma_3}{db}\right)=0$$

di cui le prime tre sono le derivate parziali della (5) per a, b, c, e le ultime due sono le derivate parziali per b delle (5), (7). In queste seconde si prova che gli ultimi tre termini vanno a zero da loro separatamente, perchè a motivo delle (14), (17), (20); (16), (19), (22) que' trinomj si trasformano nei

$$\beta_1\left(\frac{d\beta_1}{da}\right)+\beta_2\left(\frac{d\beta_2}{da}\right)+\beta_3\left(\frac{d\beta_3}{da}\right)\;;\qquad \beta_1\left(\frac{d\beta_1}{dc}\right)+\beta_2\left(\frac{d\beta_2}{dc}\right)+\beta_3\left(\frac{d\beta_3}{dc}\right)$$

che si riconoscono zero in forza delle (32), (34). Si ottengono così le tre

$$\alpha_1\left(\frac{d\beta_1}{db}\right)+\alpha_2\left(\frac{d\beta_2}{db}\right)+\alpha_3\left(\frac{d\beta_3}{db}\right)=0$$

$$\beta_1\left(\frac{d\beta_1}{db}\right)+\beta_2\left(\frac{d\beta_2}{db}\right)+\beta_3\left(\frac{d\beta_3}{db}\right)=0$$

$$\gamma_1\left(\frac{d\beta_1}{db}\right)+\gamma_2\left(\frac{d\beta_2}{db}\right)+\gamma_3\left(\frac{d\beta_3}{db}\right)=0$$

dalle quali collo stesso calcolo praticato sulle (28), le

$$(37) \quad \left(\frac{d\beta_1}{db}\right)=0\;; \qquad (38) \quad \left(\frac{d\beta_2}{db}\right)=0\;; \qquad (39) \quad \left(\frac{d\beta_3}{db}\right)=0.$$

Basterà ora accennare che dalle tre derivate parziali della (4) per a, b, c, e dalle due per c delle (6), (7) si cavano similmente le tre

$$(40) \quad \left(\frac{d\gamma_1}{dc}\right)=0\;; \qquad (41) \quad \left(\frac{d\gamma_2}{dc}\right)=0\;; \qquad (42) \quad \left(\frac{d\gamma_3}{dc}\right)=0\,.$$

A proseguire con successo la nostra dimostrazione giova ora rivolgersi alle derivate parziali delle (8), (9), (10): le tre della (8) sono

$$(43)\qquad \alpha_1\left(\frac{d\alpha_1}{da}\right)+\beta_1\left(\frac{d\beta_1}{da}\right)+\gamma_1\left(\frac{d\gamma_1}{da}\right)=0$$

$$(44)\qquad \alpha_1\left(\frac{d\alpha_1}{db}\right)+\beta_1\left(\frac{d\beta_1}{db}\right)+\gamma_1\left(\frac{d\gamma_1}{db}\right)=0$$

$$(45)\qquad \alpha_1\left(\frac{d\alpha_1}{dc}\right)+\beta_1\left(\frac{d\beta_1}{dc}\right)+\gamma_1\left(\frac{d\gamma_1}{dc}\right)=0.$$

La (43) per le (29), (14), (15) diventa

$$(46)\qquad \beta_1\left(\frac{d\alpha_1}{db}\right)+\gamma_1\left(\frac{d\alpha_1}{dc}\right)=0\ ;$$

La (44) per le (37), (16) riesce

$$(47)\qquad \alpha_1\left(\frac{d\alpha_1}{db}\right)+\gamma_1\left(\frac{d\beta_1}{dc}\right)=0\ ;$$

e la (45) per la (40)

$$(48)\qquad \alpha_1\left(\frac{d\alpha_1}{dc}\right)+\beta_1\left(\frac{d\beta_1}{dc}\right)=0.$$

Eliminando $\left(\frac{d\beta_1}{dc}\right)$ dalle due ultime si ottiene

$$\beta_1\left(\frac{d\alpha_1}{db}\right)-\gamma_1\left(\frac{d\alpha_1}{dc}\right)=0$$

dalla quale e dalla (46)

$$(49)\qquad \left(\frac{d\alpha_1}{db}\right)=0\ ;\qquad (50)\qquad \left(\frac{d\alpha_1}{dc}\right)=0$$

e in seguito dalla (47), o dalla (48)

$$(51)\qquad \left(\frac{d\beta_1}{dc}\right)=0.$$

In maniera affatto somigliante dalle tre derivate parziali della (9) si conseguiscono

$$(52)\quad \left(\frac{d\alpha_2}{db}\right)=0\ ;\qquad (53)\quad \left(\frac{d\alpha_2}{dc}\right)=0\ ;\qquad (54)\quad \left(\frac{d\beta_2}{dc}\right)=0$$

e dalle tre derivate parziali della (10) le

$$(55)\quad \left(\frac{d\alpha_3}{db}\right)=0\ ;\qquad (56)\quad \left(\frac{d\alpha_3}{dc}\right)=0\ ;\qquad (57)\quad \left(\frac{d\beta_3}{dc}\right)=0\ .$$

Presentemente risostituendo nelle 18 equazioni (29), (30), (31); (37), (38), (39); (40), (41), (42); (49), (50), (51); (52), (53), (54); (55), (56), (57) alle α_1, α_2, α_3, β_1, ecc. le derivate parziali, delle quali per le (1) sono abbreviazioni, si hanno le 18 equazioni che al num. 7 della memoria segnammo [15].

III.ᴬ

Ai numeri 13, 21.
Richiamate le equazioni di posizione [25], [17]

$$\alpha = \left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right) - \left(\frac{dz}{db}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right)$$
$$\alpha' = \left(\frac{dz}{db}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right) - \left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right)$$
$$\alpha'' = \left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right) - \left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right)$$
$$\beta = \left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right) - \left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right)$$
$$\beta' = \left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right) - \left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right)$$
$$\beta'' = \left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right) - \left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right)$$
$$\gamma = \left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dz}{db}\right) - \left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{dy}{db}\right)$$
$$\gamma' = \left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{dx}{db}\right) - \left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dz}{db}\right)$$
$$\gamma'' = \left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dy}{db}\right) - \left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dx}{db}\right)$$
$$H = \left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right) - \left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right)$$
$$+ \left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{dz}{da}\right) - \left(\frac{dx}{dc}\right)\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{dz}{da}\right)$$
$$+ \left(\frac{dx}{dc}\right)\left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dz}{db}\right) - \left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{dz}{db}\right).$$

Si riconoscono identiche le nove

$$(1) \qquad \alpha\left(\frac{dx}{da}\right) + \beta\left(\frac{dx}{db}\right) + \gamma\left(\frac{dx}{dc}\right) = H$$
$$(2) \qquad \alpha'\left(\frac{dx}{da}\right) + \beta'\left(\frac{dx}{db}\right) + \gamma'\left(\frac{dx}{dc}\right) = 0$$
$$(3) \qquad \alpha''\left(\frac{dx}{da}\right) + \beta''\left(\frac{dx}{db}\right) + \gamma''\left(\frac{dx}{dc}\right) = 0$$
$$(4) \qquad \alpha\left(\frac{dy}{da}\right) + \beta\left(\frac{dy}{db}\right) + \gamma\left(\frac{dy}{dc}\right) = 0$$
$$(5) \qquad \alpha'\left(\frac{dy}{da}\right) + \beta'\left(\frac{dy}{db}\right) + \gamma'\left(\frac{dy}{dc}\right) = H$$
$$(6) \qquad \alpha''\left(\frac{dy}{da}\right) + \beta''\left(\frac{dy}{db}\right) + \gamma''\left(\frac{dy}{dc}\right) = 0$$
$$(7) \qquad \alpha\left(\frac{dz}{da}\right) + \beta\left(\frac{dz}{db}\right) + \gamma\left(\frac{dz}{dc}\right) = 0$$
$$(8) \qquad \alpha'\left(\frac{dz}{da}\right) + \beta'\left(\frac{dz}{db}\right) + \gamma'\left(\frac{dz}{dc}\right) = 0$$
$$(9) \qquad \alpha''\left(\frac{dz}{da}\right) + \beta''\left(\frac{dz}{db}\right) + \gamma''\left(\frac{dz}{dc}\right) = H.$$

Avrei potuto suggerire qualche altro mezzo per dimostrare le precedenti equazioni, e schivare la verificazione alquanto prolissa fatta colla materiale sostituzione dei valori: ma mi sarei dilungato in cosa di poca importanza.

Ora si richiami anche la [26]

$$K(a,b,c,t) = K[x(a,b,c,t),\ y(a,b,c,t),\ z(a,b,c,t),\ t]$$

e se ne derivino le tre

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{dK}{da}\right)=\left(\frac{dK}{dx}\right)\left(\frac{dx}{da}\right)+\left(\frac{dK}{dy}\right)\left(\frac{dy}{da}\right)+\left(\frac{dK}{dz}\right)\left(\frac{dz}{da}\right)\\
(10)\quad&\left(\frac{dK}{db}\right)=\left(\frac{dx}{dK}\right)\left(\frac{dx}{db}\right)+\left(\frac{dK}{dy}\right)\left(\frac{dy}{db}\right)+\left(\frac{dK}{dz}\right)\left(\frac{dz}{db}\right)\\
&\left(\frac{dK}{dc}\right)=\left(\frac{dK}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right)+\left(\frac{dK}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right)+\left(\frac{dK}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right).
\end{aligned}$$

Queste si moltiplichino rispettivamente per α, β, γ, indi si sommino: raccolti nel secondo membro dell'equazione risultante i coefficienti totali di $\left(\frac{dK}{dx}\right)$, $\left(\frac{dK}{dy}\right)$, $\left(\frac{dK}{dz}\right)$, avremo in forza delle (1), (4), (7)

$$(11)\quad \alpha\left(\frac{dK}{da}\right)+\beta\left(\frac{dK}{db}\right)+\gamma\left(\frac{dK}{dc}\right)=H\left(\frac{dK}{dx}\right).$$

Si moltiplichino da capo le (10) rispettivamente per α', β', γ', e poi si sommino: otterremo in conseguenza delle (2), (5), (8)

$$(12)\quad \alpha'\left(\frac{dK}{da}\right)+\beta'\left(\frac{dK}{db}\right)+\gamma'\left(\frac{dK}{dc}\right)=H\left(\frac{dK}{dy}\right).$$

E allo stesso modo, moltiplicando le (10) per α'', β'', γ'', e osservando le (3), (6), (9)

$$(13)\quad \alpha''\left(\frac{dK}{da}\right)+\beta''\left(\frac{dK}{db}\right)+\gamma''\left(\frac{dK}{dc}\right)=H\left(\frac{dK}{dz}\right).$$

Conviene verificare colla sostituzione anche le tre equazioni identiche

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d\alpha}{da}\right)+\left(\frac{d\beta}{db}\right)+\left(\frac{d\gamma}{dc}\right)=0\\
(14)\quad&\left(\frac{d\alpha'}{da}\right)+\left(\frac{d\beta'}{db}\right)+\left(\frac{d\gamma'}{dc}\right)=0\\
&\left(\frac{d\alpha''}{da}\right)+\left(\frac{d\beta''}{db}\right)+\left(\frac{d\gamma''}{dc}\right)=0.
\end{aligned}$$

Si moltiplichino tutte e tre per K, indi si sommino ordinatamente, la prima colla (11), la seconda colla (12), la terza colla (13); le tre equazioni risultanti potranno scriversi

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d\cdot\alpha K}{da}\right)+\left(\frac{d\cdot\beta K}{db}\right)+\left(\frac{d\cdot\gamma K}{dc}\right)=H\left(\frac{dK}{dx}\right)\\
&\left(\frac{d\cdot\alpha' K}{da}\right)+\left(\frac{d\cdot\beta' K}{db}\right)+\left(\frac{d\cdot\gamma' K}{dc}\right)=H\left(\frac{dK}{dy}\right)\\
&\left(\frac{d\cdot\alpha'' K}{da}\right)+\left(\frac{d\cdot\beta'' K}{db}\right)+\left(\frac{d\cdot\gamma'' K}{dc}\right)=H\left(\frac{dK}{dz}\right)
\end{aligned}$$

le quali sono le [27] del num. 13 riportate ivi senza dimostrazione.

Aggiungerò che si hanno anche le nove equazioni identiche

$$(15)\qquad \alpha\left(\frac{dx}{da}\right)+\alpha'\left(\frac{dy}{da}\right)+\alpha''\left(\frac{dz}{da}\right)=H$$

$$(16)\qquad \alpha\left(\frac{dx}{db}\right)+\alpha'\left(\frac{dy}{db}\right)+\alpha''\left(\frac{dz}{db}\right)=0$$

$$(17)\qquad \alpha\left(\frac{dx}{dc}\right)+\alpha'\left(\frac{dy}{dc}\right)+\alpha''\left(\frac{dz}{dc}\right)=0$$

$$(18)\qquad \beta\left(\frac{dx}{da}\right)+\beta'\left(\frac{dy}{da}\right)+\beta''\left(\frac{dz}{da}\right)=0$$

$$(19)\qquad \beta\left(\frac{dx}{db}\right)+\beta'\left(\frac{dy}{db}\right)+\beta''\left(\frac{dz}{db}\right)=H$$

$$(20)\qquad \beta\left(\frac{dx}{dc}\right)+\beta'\left(\frac{dy}{dc}\right)+\beta''\left(\frac{dz}{dc}\right)=0$$

$$(21)\qquad \gamma\left(\frac{dx}{da}\right)+\gamma'\left(\frac{dy}{da}\right)+\gamma''\left(\frac{dz}{da}\right)=0$$

$$(22)\qquad \gamma\left(\frac{dx}{db}\right)+\gamma'\left(\frac{dy}{db}\right)+\gamma''\left(\frac{dz}{db}\right)=0$$

$$(23)\qquad \gamma\left(\frac{dx}{dc}\right)+\gamma'\left(\frac{dy}{dc}\right)+\gamma''\left(\frac{dz}{dc}\right)=H$$

verificabili alla stessa maniera delle nove surriferite, e che vengono utili in appresso (numero 21). Ecco alcune conseguenze di quest'ultime di cui faremo un uso importante. Assunta per brevità la denominazione

$$(24)\qquad \Delta=\alpha\beta'\gamma''-\alpha\gamma'\beta''+\beta\alpha''\gamma'-\beta\gamma''\alpha'+\gamma\alpha'\beta''-\gamma\beta'\alpha'',$$

risolvansi per $\left(\frac{dx}{da}\right)$, $\left(\frac{dy}{da}\right)$, $\left(\frac{dz}{da}\right)$ le precedenti (15), (18), (21) usando le note formole date negli elementi d'algebra per la soluzione generale di tre equazioni di primo grado a tre incognite: otterremo

$$(25)\qquad \frac{\left(\frac{dx}{da}\right)}{H}=\frac{\beta'\gamma''-\gamma'\beta''}{\Delta}\;;\quad \frac{\left(\frac{dy}{da}\right)}{H}=\frac{\gamma\beta''-\beta\gamma''}{\Delta}\;;\quad \frac{\left(\frac{dz}{da}\right)}{H}=\frac{\beta\gamma'-\gamma\beta'}{\Delta}\,.$$

Da una simile operazione eseguita sulle (16), (19), (22) ci verranno le

$$(26)\qquad \frac{\left(\frac{dx}{db}\right)}{H}=\frac{\alpha''\gamma'-\gamma''\alpha'}{\Delta}\;;\quad \frac{\left(\frac{dy}{db}\right)}{H}=\frac{\alpha\gamma''-\gamma\alpha''}{\Delta}\;;\quad \frac{\left(\frac{dz}{db}\right)}{H}=\frac{\gamma\alpha'-\alpha\gamma'}{\Delta}\,.$$

E da un'altra simile operazione sulle (17), (20), (23) avremo le

$$(27)\qquad \frac{\left(\frac{dx}{dc}\right)}{H}=\frac{\alpha'\beta''-\beta'\alpha''}{\Delta}\;;\quad \frac{\left(\frac{dy}{dc}\right)}{H}=\frac{\beta\alpha''-\alpha\beta''}{\Delta}\;;\quad \frac{\left(\frac{dz}{dc}\right)}{H}=\frac{\alpha\beta'-\beta\alpha'}{\Delta}\,:$$



Continuazione delle *RIFLESSIONI SULLA LEGGE DELL'ATTRAZIONE MOLECOLARE* di GIUSEPPE BELLI (V. Fascicolo II, pag. 128).

XVI.

Gli enormi risultamenti che abbiamo testè ottenuti bastano a mio giudicio a distogliere qualunque Fisico assennato dall' ammettere l' identità delle due attrazioni. Aggiungerò nulladimeno per abbondanza qualche altro argomento, il quale mostri l'insufficienza della gravitazione a produrre i fenomeni molecolari, anche nel caso che alcuno volesse adattarsi ad ammettere quell' inconcepibile rarità nel tessuto de' corpi e quell' inconcepibile densità nella materia loro, le quali ho dimostrate.

Limitandomi adunque alla particolare ipotesi del tessuto reticolare, la quale a mio parere è la più vantaggiosa per ajutare la gravitazione a produrre grandi effetti, io osserverò che prima di poter ammettere una siffatta ipotesi, è d'uopo conciliarla co' fenomeni della cristallizzazione, la cui spiegazione esige che i corpi si suppongano formati di molecole staccate, le quali, quando essi corpi sono cristallizzati, sieno tutte simili fra loro e regolarmente collocate le une presso le altre.

Non sarebbe in vero impossibile l' ottenere una tale conciliazione, e ciò col modificare l'ipotesi del tessuto reticolare, riducendola somigliante a quella cui venne condotto il cav. Leopoldo Nobili da alcune sue considerazioni sulla trasparenza de' corpi (1). Ammise questi che le molecole integranti dei corpi trasparenti sieno foggiate a guisa di tanti telai prismatici, tetraedri e parallelepipedi, i quali non presentino materia che sugli spigoli, e si trovino a perfetto contatto gli uni cogli altri. Però non sono le molecole *elementari*, ossia le ultime a cui i corpi si riducono dopo sofferte tutte le divisioni possibili quelle che il sig. Nobili riguardò come formate alla detta maniera; egli suppose che i corpi trasparenti sieno di natura composta, e che la forma a telajo appartenga, come s'è detto, alle loro molecole *integranti*, vale a dire a quelle molecole le quali, unendosene insieme un immenso numero, tutte fra loro omogenee e composte ciascuna di tutti i principii chimici del rispettivo corpo, costituiscono i corpi cristallizzati e le vere combinazioni chimiche. Si potrebbe adunque da taluno, lasciando da banda la trasparenza de' corpi, ammettere una siffatta ipotesi anche per tutte le specie di molecole elementari; e in questo caso, conside-

(1) *Introduzione alla Meccanica della materia,* Milano 1819, presso P. E. Giusti, a p. 80. Una ipotesi analoga a quella del sig. Nobili, ma per un diverso scopo, era stata immaginata anche da altri Fisici, e fra gli altri da M. Le Sage di Ginevra, il quale riguardava le molecole elementari de' corpi siccome altrettante gabbie, ossia come tanti poliedri non aventi di materiale che i soli spigoli (*Bibl. Univ.* Août, 1816, pag. 288, ove è citato l'*Essai de Chimie mécanique* di questo autore al § 24, pag. 65).

rando l'attrazione vicendevole che potrebbe aver luogo fra le diverse parti di un corpo così formato, si avrebbero gli stessi vantaggi del tessuto reticolare, e inoltre si potrebbero spiegare i fenomeni della cristallizzazione. In fatti toccandosi le molecole vicendevolmente, formerebbero esse un vero tessuto reticolare, nel quale col soccorso di una sufficiente rarezza delle fila l'attrazione di gravitazione potrebbe avere bastante energia per tenere tutte le parti fortemente legate insieme; e siccome altresì queste molecole sarebbero distinte e separabili le une dalle altre, e dotate di una regolare figura esterna, così potrebbero dar origine a corpi di forme geometriche regolari.

Avendo però riguardo a tutto, si trova che questa nuova ipotesi andrebbe incontro anch'essa ad assai gravi difficoltà; imperciocchè, oltre a che si sarebbe sempre obbligati ad ammettere nei corpi quella stessa rarità di tessuto e quella stessa densità di materia negli spazii pieni da noi trovate qui sopra, si aggiunge altresì che i fenomeni del calorico esigono indispensabilmente che le molecole elementari dei corpi, anche così formate, non si ammettano ad assoluto contatto le une colle altre come ha opinato il valentissimo Nobili per riguardo alle molecole composte, ma bensì a qualche vicendevole distanza. Il restringersi in fatti dei corpi pel raffreddamento fa conoscere che in essi esistono de' vani che possono impiccolirsi. E possiamo bensì dubitare che questi vani sieno distribuiti irregolarmente in quei corpi dove le molecole sono confusamente ammassate, e supporre che essi vani scemino o crescano a cagione di scorrimenti di queste molecole le une sulle altre. Ma ciò non può concedersi per tutti i corpi; p. e. nol si può assolutamente per quei corpi cristallizzati che sono di natura semplice e che hanno le molecole elementari di forma cubica. In questi è forza ammettere che esse molecole sieno interamente staccate le une dalle altre, e come nuotanti nel calorico. Perciocchè un ammasso di tanti cubi i quali sieno a perfetto contatto e disposti gli uni presso gli altri con quella regolarità che la cristallografia dimostra, è impossibile che pel raffreddamento si restringa; e se nel fatto esso si restringe, si dee necessariamente concedere che fra cubo e cubo esistano degli intervalli, i quali crescano coll'aumento del calore e diminuiscano col raffreddamento. Ora mancando fra questi telai cubici il contatto, ed essendovi fra loro una distanza non piccolissima in paragone delle loro dimensioni, non può la gravitazione essere in essi abbastanza efficace da poter produrre la coesione, malgrado il tessuto a telajo.

Fingiamo in fatti che una unione regolare di tante uguali molecole cubiche a telajo formi un aggregato di due prismi retti a base quadrata, perfettamente uguali fra loro, congiunti per tutta l'estensione di due delle loro basi, e colle facce parallele a quelle delle molecole componenti; e chiamiamo questi due prismi

$$M,\ N.$$

Indichiamo con

l la lunghezza dei lati di queste molecole componenti, vale a dire la lunghezza dei lati dei più piccoli cubi che ad esse si potrebbero circoscrivere. Suppo-

niamo che ad una determinata temperatura a cui siasi misurata la tenacità dell'aggregato de' due suddetti solidi M, N, p. e. alla temperatura di $+20°$ C., queste molecole si trovino separate le une dalle altre di una quantità

$$\frac{1}{n} l .$$

Noi possiamo riguardare tutte queste molecole come situate in mezzo ad altrettante cellette cubiche esattamente contigue fra loro, le cui facce sieno parallele a quelle di esse molecole, e i cui lati abbiano la lunghezza

$$l\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

E siccome, quando si voglia che M, N risultino formati dall' unione di tante di queste cellette contenenti le molecole cubiche, fa d'uopo che tutto all' intorno del totale volume di questi due solidi presi insieme venga aggiunto uno spazio che si estenda fino ad una distanza $\frac{1}{2n} l$ dalle molecole più esteriori, così noi supporremo fatta questa aggiunta, e chiameremo

h' l'altezza di ciascuno de' due solidi M, N in cotal modo aumentati, e dotati ancora della figura prismatica a basi quadrate,

h la lunghezza dei lati di queste loro basi, la quale h supporremo minore di h'. Chiamiamo

δ la loro densità media, cioè la densità che essi avrebbero in tutte le loro parti se la loro materia si distribuisse in essi uniformemente,

V la forza con cui essi si attraggono vicendevolmente in conseguenza della gravitazione, supposta espressa in chilogrammi,

T la tenacità del sistema de' due solidi M, N, ossia la forza colla quale essi si tengono effettivamente uniti l'uno all'altro, espressa anche questa in chilogrammi.

Ciò posto procuriamo di trasformare questi due prismi in modo da averne due corpi de' quali si possa misurare la vicendevole attrazione per mezzo del calcolo.

Immaginiamo prima di tutto che entro a ciascuno de' più piccoli cubi che si possono circoscrivere alle diverse molecole del prisma M, venga determinato un punto tale, che venendo a concentrarsi in esso la massa della rispettiva molecola, non soffra veruna variazione l'effetto della gravitazione fra questa molecola e il prisma N nella direzione parallela agli spigoli longitudinali de' due prismi M, N. Supponiamo che le masse di tutte le molecole del prisma M si vengano a concentrare nei punti ad esse rispettivamente in un siffatto modo determinati, e i quali noi indicheremo col nome di punti di *attrazione media* di cotali molecole verso il prisma N. E chiamiamo

M' l'aggregato di tali masse così concentrate.

Supponiamo del pari che le masse di tutte le molecole del prisma N vengano a concentrarsi ne' loro punti di attrazione media verso M', determinati in un modo simile a quello già indicato; e chiamiamo

N' l'aggregato de' punti materiali in cotal modo ottenuti.

Immaginiamo dopo ciò che le masse di tutti i punti materiali sì di M' che di N' si allarghino di nuovo in altrettante piccole uguali sfere le quali abbiano questi punti per centri, e il cui volume sia bastantemente grande da potere alcune di esse toccare i lati delle rispettive cellette cubiche. E chiamiamo rispettivamente

M'', N'' i due aggregati di sfere risultanti da M' e da N'.

È facile a vedersi che il raggio di ciascuna di queste sfere sarà non minore di

$$\frac{1}{2n}l,$$

vale a dire non più piccolo di mezza la distanza da cui si trovavano separate le une dalle altre le primitive molecole a telajo; giacchè, quand'anche i centri di alcune di tali sfere si trovassero collocati nei punti più esteriori di questi telai, sarebbe pur sempre necessario, perchè esse sfere potessero toccare le pareti delle proprie cellette, ch'elleno avessero per lo meno un raggio uguale a $\frac{1}{2n}l$. Noi possiamo perciò rappresentare la lunghezza dei raggi in questione con

$$(1+\sigma)\frac{1}{2n}l,$$

essendo σ una quantità non minore di zero, vale a dire o positiva (il che sarà quello che effettivamente avrà luogo, quantunque non vogliamo su ciò insistere per non perder tempo a darne dimostrazione), o almeno uguale a zero.

Il volume di una di queste sfere sarà per conseguenza

$$\frac{4}{3}\pi(1+\sigma)^3\frac{l^3}{8n^3};$$

e siccome la loro densità che noi indicheremo con

$$\Delta$$

sta alla densità δ, come sta il volume $\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 l^3$ di una delle immaginate cellette cubiche al volume di una delle sfere medesime, vale a dire siccome noi abbiamo

$$\Delta:\delta::\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 l^3:\frac{4}{3}\pi(1+\sigma)^3\frac{l^3}{8n^3},$$

così questa densità Δ sarà data dall'equazione

$$\Delta=\delta\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 l^3}{\frac{4}{3}\pi(1+\sigma)^3\frac{l^3}{8n^3}},$$

ossia da

[a] $$\Delta=\delta\cdot\frac{6(n+1)^3}{\pi(1+\sigma)^3}.$$

E l'area della maggior sezione di una qualsivoglia di queste sfere (la quale area è un elemento di cui or ora avrem bisogno) sarà

$$[b] \qquad \frac{\pi(1+\sigma)^2 l^2}{4n^2}.$$

Proseguendo nelle nostre supposizioni, immaginiamo che le sfere degli aggregati M'', N'' si ravvicinino fra loro nel verso laterale fino a che si tocchino, e che quindi la materia di esse sfere ravvicinandosi ancor più nel detto verso laterale, col soccorso di un cangiamento di forma nelle masse delle sfere stesse, si unisca insieme in modo da riempiere tutti gli interstizii che si trovano fra le diverse sfere medesime; ben inteso che un tale ravvicinamento venga operato soltanto mediante un movimento della materia nel verso laterale, di maniera che ciascuna sezione trasversale de' due nuovi solidi che si vengono ad ottenere, sia uguale alla somma delle sezioni che si sarebbero avute anteriormente, per mezzo del medesimo piano di essa sezione, nell'aggregato delle sfere quando queste si trovavano ancora separate le une dalle altre. Supponiamo in fine che la nuova disposizione della materia delle sfere sia o si riduca tale che le nuove sezioni trasversali sieno altrettanti cerchii co' centri in un asse comune perpendicolare ai loro piani. E chiamiamo

M''', N''' i due solidi ottenuti rispettivamente da M'' e da N'' per mezzo di questa nuova trasformazione.

La densità di cotali nuovi solidi sarà evidentemente la medesima di quella delle precedenti sfere, cioè Δ.

E siccome mentre coteste sfere si trovavano ancora separate le une dalle altre e contenute entro le rispettive cellette cubiche, se si fosse condotto attraverso ad esse un piano perpendicolare agli spigoli longitudinali de'solidi M, N, non avrebbe questo verisimilmente potuto tagliar per mezzo, contemporaneamente, tutte le sfere contenute in un intero strato trasversale di cellette; così la maggior sezione trasversale dell'aggregato de' due solidi M''', N''' conterrà il cerchio massimo d'una d'esse sfere, il quale giusta la formola [b] è misurato da

$$\frac{\pi(1+\sigma)^2 l^2}{4n^2},$$

un numero di volte verisimilmente minore del numero delle cellette cubiche formanti uno strato trasversale; evidentemente poi essa maggior sezione non potrà contenere esso cerchio un maggior numero di volte. Ed essendo il numero di tali cellette misurato dal quadrato h^2 diviso per l'area d'una faccia di una delle cellette stesse, cioè essendo un tal numero misurato dalla quantità

$$\frac{h^2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 l^2},$$

sarà la suddetta maggior sezione trasversale dell'aggregato de' solidi M''', N'''

espressa da

$$\frac{h^2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 l^2}\cdot\frac{\pi(1+\sigma)^2 l^2}{4n^2}\cdot\frac{1}{1+\tau},$$

essendo τ una quantità o maggiore o almeno uguale a zero; ossia da

$$[c] \qquad \frac{\pi(1+\sigma)^2 h^2}{4(1+n)^2(1+\tau)};$$

e il suo diametro sarà

$$[d] \qquad \frac{(1+\sigma)h}{(1+n)\sqrt{1+\tau}}.$$

Immaginiamo finalmente che al sistema de' due solidi M''', N''' sia circoscritto un prisma retto a basi quadrate, avente le facce laterali a contatto della più grande fra le sezioni trasversali di essi solidi M''', N''', e diviso dal piano che separa M''' da N''' in due uguali prismi retti i quali abbiano ciascuno l'altezza h', cioè l'altezza di ciascuno de' solidi M, N. Egli è chiaro che questa altezza sarà sufficiente perchè le basi libere de' due nuovi prismi sieno all'esterno o almeno a livello delle basi parimenti libere di M''' e di N'''. Chiamiamo

$M^{\prime v}$, $N^{\prime v}$ questi due nuovi prismi.

E in essi noi avremo due corpi i quali si attrarranno vicendevolmente, in conseguenza della gravitazione, con una forza che potrà essere sottomessa a calcolo, come ci eravamo proposti di trovare. Poniamci ora a determinare una tal forza.

Essendo in questi due ultimi solidi

h' l'altezza,

$\frac{(1+\sigma)h}{(1+n)\sqrt{1+\tau}}$ la lunghezza dei lati delle basi,

Δ, ossia $\frac{6\delta(1+n)^3}{\pi(1+\sigma)^3}$ la densità,

per la formola [37] si avrà il valore della suddetta forza uguale a

$$0{,}000086\;3845\cdot\left[\frac{6\delta(1+n)^3}{\pi(1+\sigma)^3}\right]^2\cdot\left[\frac{(1+\sigma)h}{(1+n)\sqrt{1+\tau}}\right]^4\cdot\frac{1}{\delta'}\left\{\mathrm{L}.\psi+0{,}349645+\frac{1}{\psi^2}\left(\frac{69}{1+\alpha}-\frac{33}{1+\beta}\right)\right\},$$

ovvero a

$$0{,}000086\;3845\cdot\frac{\delta^2(1+n)^2\cdot 36\cdot h^4}{\pi^2\delta'(1+\sigma)^2(1+\tau)^2}\cdot\left\{\mathrm{L}.\psi+0{,}349645+\frac{1}{\psi^2}\left(\frac{69}{1+\alpha}-\frac{33}{1+\beta}\right)\right\},$$

essendo

$$[e] \qquad \psi=\frac{h'(1+n)\sqrt{1+\tau}}{h(1+\sigma)}.$$

Ora in tutte le successive trasformazioni che abbiamo immaginate, l'attrazione vicendevole esercitata nella direzione degli spigoli longitudinali de' solidi

M, N, fra le varie coppie di solidi successivamente ottenuti, la quale dapprincipio era V, non è giammai diminuita; ma in alcune trasformazioni si è conservata della medesima grandezza, e in altre si è aumentata. Nella prima trasformazione in fatti, cioè in quella mediante la quale le molecole si sono supposte passare dalla forma a telajo a quella di tanti punti materiali collocati ne' luoghi di attrazione media, l'attrazione vicendevole de' due solidi considerati è rimasta la medesima. Ella si è similmente conservata la medesima nella seconda trasformazione colla quale i suddetti punti materiali si sono cangiati in altrettante sfere co' centri in que' punti. Si è essa poscia aumentata nel ravvicinarsi che fecero gli aggregati delle sfere per cangiarsi ne' solidi M''', N'''; giacchè con questa trasformazione la materia de' due aggregati di sfere ha preso una disposizione più favorevole all'attrazione. E similmente questa attrazione si è aumentata nel passaggio de' due solidi M''', N''' ai prismi $M^{\prime v}$, $N^{\prime v}$, a cagione della materia aggiuntasi. In conseguenza di ciò, avendo noi indicata con V l'attrazione vicendevole fra i due primitivi solidi M, N, quella fra i due prismi $M^{\prime v}$, $N^{\prime v}$ potrà esserlo da

$$(1+\lambda)V,$$

essendo λ una quantità reale e positiva.

Uguagliando le due espressioni dell'attrazione vicendevole de' due prismi $M^{\prime v}$, $N^{\prime v}$, noi avremo

$$(1+\lambda)V = \frac{0{,}000086\ 3845 \cdot \delta^2 (1+n)^2 \cdot 36 \cdot h^4}{\pi^2 \delta' (1+\sigma)^2 (1+\tau)^2} \cdot \left\{ \mathrm{L}.\psi + 0{,}349645 + \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{69}{1+\alpha} - \frac{33}{1+\beta}\right)\right\},$$

da cui si trarrà

$$[41] \qquad V = \frac{0{,}000086\ 3845 \cdot 36 \cdot (1+n)^2 \cdot \delta^2 h^4}{\pi^2 \delta' (1+\sigma)^2 (1+\tau)^2 (1+\lambda)} \cdot \left\{ \mathrm{L}.\psi + 0{,}349645 + \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{69}{1+\alpha} - \frac{33}{1+\beta}\right)\right\},$$

equazione da cui potremo riconoscere se la forza indicata da V può arrivare al valore della tenacità T.

Prima però di venire a questo esame diamo ad una tale equazione una forma più comoda. Cominciamo a porre

$$\delta' = 5{,}01\ ,$$

e ad eseguire le moltiplicazioni de' fattori numerici; sarà

$$[f] \qquad \frac{0{,}000086\ 3845 \cdot 36}{\pi^2 \delta'} = 0{,}000062\ 893\ .$$

Cerchiamo un'espressione del valore di ψ (e ne vedremo l'uso fra poco) la quale sia formata da una funzione determinata, alcun poco più grande di essa ψ, divisa per una quantità maggiore di 1, procurando però di ottenere una siffatta determinata funzione più piccola che sia possibile. Consideriamo a quest'oggetto che la maggior sezione che si abbia nel sistema de' due solidi M''', N''', e che è stata rappresentata (vedi [c]) da

$$\frac{\pi(1+\sigma)^2 h^2}{4(1+n)^2(1+\tau)},$$

è necessariamente maggiore di una delle basi di un cilindro retto la cui altezza sia h', e il cui volume sia uguale a quello di uno di essi solidi M''', N'''. Ma l'area di ciascuna delle basi di questo cilindro retto sarebbe data dalla proporzione

$$\text{Area della base del cilindro } : h^2 :: \partial : \Delta\,,$$

per cui quest'area sarebbe misurata da

$$\frac{\partial h^2}{\Delta},$$

ovvero (vedi la $[a]$) da

$$\frac{\pi h^2(1+\sigma)^3}{6(1+n)^3};$$

perciò si avrà

$$\frac{\pi h^2(1+\sigma)^2}{4(1+n)^2(1+\tau)} > \frac{\pi h^2(1+\sigma)^3}{6(1+n)^3},$$

da cui

$$(1+\tau) < \frac{3(1+n)}{2(1+\sigma)};$$

di maniera che si potrà dare a $(1+\tau)$ la forma

$$\frac{3(1+n)}{2(1+\sigma)(1+\xi)},$$

essendo ξ una quantità positiva. Sostituendo questa espressione in luogo di $(1+\tau)$ nel valore di ψ dato poco sopra dall'equazione $[e]$, avremo

$$[g] \qquad \psi = \frac{h'(1+n)^{\frac{3}{2}}\sqrt{3}}{h\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(1+\sigma)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\xi}}$$

dove il secondo membro è appunto di quella forma di cui abbiamo bisogno.

Facciamo ora il contrario, troviamo cioè un'espressione di ψ, la quale sia formata da una determinata funzione moltiplicata per una quantità non minore di 1, procurando che una tale funzione determinata non si scosti gran fatto dal valore di essa ψ. Osserviamo a quest' uopo che la quantità ψ non può essere minore di $\frac{h'}{h}$. La maggior sezione trasversale in fatti che si possa ottenere ne' solidi M'', N'' risulta da un'unione di tanti cerchii, i cui contorni non sopravvanzano le sezioni quadrate delle cellette cubiche tagliate dal piano della medesima maggior sezione, e la somma de' quali cerchii non supera il prodotto di $\frac{\pi}{4}$ per la somma di quelle sezioni quadrate medesime ossia per h^2:

perciò nè questa maggior sezione de' solidi M'', N'', nè la equivalente maggior sezione de' solidi M''', N''' arriva a superare un cerchio il cui diametro sia h; e i lati delle basi de' prismi M^{V}, N^{V} non arrivano a superare la h, ma possono esprimersi per mezzo della frazione

$$\frac{h}{1+\rho},$$

dove ρ è una quantità non minore di zero; e dividendo la h' per la lunghezza di uno di questi lati, si avrà il quoziente, che è ψ, dato dall'espressione

$$[k] \qquad (1+\rho)\frac{h'}{h},$$

che è della forma che si desiderava.

Sostituendo ora queste due ultime espressioni $[g]$ e $[k]$ del valore di ψ, la prima in Log.ψ, e la seconda in

$$\frac{1}{\psi^2}\left(\frac{69}{1+\alpha}-\frac{33}{1+\beta}\right),$$

e facendo la riduzione numerica indicata dall' equazione $[f]$, l'equazione [41] si riduce alla seguente

$$[42] \qquad V = 0{,}000062\,893\cdot\frac{(1+n)^2\delta^2h^4}{(1+\sigma)^2(1+\tau)^2(1+\lambda)}\cdot\left\{\mathrm{L.}\left[\frac{h'(1+n)^{\frac{3}{2}}\sqrt{3}}{h\sqrt{2}\cdot(1+\sigma)^{\frac{3}{2}}(1+\xi)^{\frac{1}{2}}}\right]\right.$$
$$\left.+0{,}349645+\frac{hh}{h'h'(1+\rho)^2}\times\left(\frac{69}{1+\alpha}-\frac{33}{1+\beta}\right)\right\}.$$

Veniamo ora ad un esempio numerico. Facciamo

$$h = 0{,}001,$$
$$h' = 0{,}1;$$

supponiamo cioè che i due prismi M, N abbiano i lati delle basi della lunghezza di un millimetro, e che sieno alti un decimetro. Supponiamo che si tratti di un corpo, del quale il peso specifico, la dilatabilità pel calore, e la tenacità sieno quelli stessi del vetro: avremo

$$\delta = 2{,}5,$$
$$T = 1{,}68,$$

la quale tenacità è la più piccola fra quelle che il sig. Navier trovò nel vetro (1). E potremo fare

$$n = 2200.$$

---

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, Tom. XXXIII, pag. 240.

Perocchè, quantunque il vetro riscaldandosi da 0° a +100°. C. si dilati secondo ciascuna delle tre dimensioni di $\frac{1}{1100}$ di questa dimensione medesima (1), noi per maggiore sicurezza delle conclusioni vogliamo supporre che il corpo cristallizzato di cui ci occupiamo, passando dalla temperatura a cui se n'è misurata la tenacità fino all'assoluto zero, cioè fino all'assoluto contatto delle molecole, non si restringa che della metà di quello che fa il vetro da +100°. C. a 0°. Noi avremo con ciò

$$V = \frac{0{,}000062\,893\cdot(2201)^2\cdot 2{,}5\cdot 2{,}5}{(1000)^4\cdot(1+\sigma)^2(1+\tau)^2(1+\lambda)}\cdot\left\{\text{Log.}\left[\frac{100\cdot(2201)^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{(1+\sigma)^{\frac{3}{2}}(1+\xi)^{\frac{1}{2}}}\right]+0{,}349645\right.$$
$$\left.+\frac{1}{10000}\left(\frac{69}{(1+a)(1+\rho)^2}-\frac{33}{(1+b)(1+\rho)^2}\right)\right\}$$
$$=\frac{0{,}000062\,893\cdot(2201)^2\cdot 2{,}5\cdot 2{,}5}{(1000)^4\cdot(1+\sigma)^2(1+\tau)^2(1+\lambda)}\cdot\left\{2+5{,}013930+0{,}088046+0{,}349645\right.$$
$$\left.+0{,}006900-A\right\};$$

dove A è una quantità positiva minore della somma delle altre quantità comprese fra le medesime parentesi, come immediatamente si scorge rammentando che $\psi>1$, che perciò il logaritmo di ψ o della quantità posta in sua vece nel penultimo secondo membro, è necessariamente positivo, che

$$\frac{1}{10000}\cdot\frac{33}{(1+b)(1+\rho)^2}<0{,}349645\,,$$

che per conseguenza la quantità contenuta fra le grandi parentesi del penultimo secondo membro è di valore positivo, e che tale in fine dev'essere anche la quantità contenuta fra le parentesi dell'ultimo secondo membro. Si avrà pertanto

$$V=\frac{0{,}000000\,000000\,000062\,893\cdot(2201)^2\cdot 2.5\cdot 2{,}5\cdot 7{,}5}{1+\omega}=\frac{0{,}000000\,01428}{1+\omega},$$

essendo ω una quantità positiva.

Ora questo valore di V è evidentemente lontanissimo dal valore 1,68 della tenacità del corpo in questione, del quale ultimo valore non arriva ad essere un centomilionesimo. Ed è a notare che noi abbiamo presa una delle minori tenacità che si riscontrino ne' corpi naturali, e che abbiamo supposto assai piccolo il restringimento di cui doveva essere capace il corpo nel venire raffreddato, le quali sono pur due circostanze che hanno dovuto entrambe cooperare a ravvicinare fra loro l'attrazione V e la tenacità T.

Ella è dunque cosa certa che per molecole di forma cubica a telajo, comunque dense ne sieno i fili e raro il tessuto, non può la coesione essere prodotta dalla gravitazione.

(1) Biot, *Traité de Physique*, Tom. I, pag. 158.

XVII.

Si possono estendere queste conclusioni eziandio a quei corpi cristallizzati di natura chimica semplice, ove le molecole integranti (le quali in questi e negli altri corpi di natura semplice coincidono colle elementari) sono di forma tetraedra regolare. E la dimostrazione non ha difficoltà, benchè ricerchi una via leggiermente diversa, attesa la disposizione più complicata di queste molecole, le quali secondo Haüy non si combaciano per tutta l'estensione delle loro facce, ma solo si toccano negli spigoli e negli angoli solidi, e lasciano de' notabili intervalli vani (1).

Noi rifletteremo primieramente a quest' oggetto che ne' corpi semplici cristallizzati aventi le molecole elementari dell'anzidetta forma, quando essi si dilatano pel calore o si restringono pel freddo, tutte e tre le dimensioni si alterano nella medesima ragione; di maniera che in siffatte variazioni di volume questi corpi cristallizzati conservano sempre la medesima proporzione fra le loro parti e si mantengono continuamente simili a se medesimi, e in tutte le grandezze che possono acquistare pe' cangiamenti di temperatura mostrano sempre di essere formati dalla regolare unione di tanti tetraedri regolari. Pare adunque che nella dilatazione di questi corpi (e il contrario si dica pel caso del loro restringimento) si operi mediante il calore un allontanamento delle diverse molecole, nel quale le distanze fra i centri delle molecole medesime si aumentino tutte nella stessa proporzione, e ciascuna molecola mantenga le sue facce in una posizione parallela alla posizione di prima. Si può perciò riguardare il corpo dilatato siccome un aggregato di tante uguali cellette anch'esse di forma tetraedra regolare, toccantisi le une colle altre negli spigoli e negli angoli solidi, e dentro a ciascuna delle quali si trovi contenuta una molecola similmente di forma tetraedra regolare ma di minore grandezza, colle facce parallele a quelle della celletta medesima, rimanendo ad uguale distanza tutto all'intorno le facce della molecola dalle facce della celletta. Il volume di ciascuna molecola sarà il medesimo a tutte le temperature, ma varierà la distanza fra la superficie di ogni molecola e quella della rispettiva celletta col mutare delle temperature medesime, e cangerà pure con ciò il volume di ciascuna celletta.

Io non richiamerò qui distesamente il modo con cui sono disposte le molecole elementari in cotali corpi cristallizzati. Mi limiterò a dire che questi possono immaginarsi formati di tanti strati paralleli l'uno all'altro, aventi ciascuno per altezza l'altezza di una delle cellette tetraedre or ora menzionate ossia la distanza fra uno degli angoli solidi di tale celletta e la opposta faccia triangolare della celletta medesima. Ciascuno di questi strati, i quali per ajutare l'immaginazione noi supporremo orizzontali, è formato dall'unione di un grandis-

(1) *Traité de Cristallographie.* Paris 1822, Tom. II, pag. 212, 216, ecc.

simo numero di cotali cellette, comprendenti ognuna una molecola tetraedra, ma aventi molti interstizii vani fra l'una e l'altra; e di tali cellette alcune hanno una delle lor facce nella superficie inferiore dello strato considerato, formando in questa superficie con esse facce o basi una specie di scacco, con degli spazii triangolari pieni contigui ad altri spazii triangolari voti (vedi la fig. 9 dove i piccoli triangoli oscuri rappresentano gli spazii pieni, e i triangoli bianchi gli spazii voti), ed hanno, queste medesime cellette, gli angoli solidi opposti alle dette basi situati nella superficie superiore dello strato medesimo; altre di tali cellette in vece hanno ciascuna una delle lor facce sulla superficie superiore del detto strato, formando qui pure una specie di scacco simile a quello già indicato, ed hanno gli angoli solidi opposti a queste facce collocati nella superficie inferiore (ne' punti di questa ove si uniscono gli angoli de' diversi triangoli pieni e voti). Non tutto poi, come si è detto, il volume dello strato è occupato da queste cellette, ma rimangono fra esse molti vani, i quali fra tutti formano uno spazio voto doppio del volume totale di esse cellette, talchè lo spazio occupato da queste non è che il terzo del volume dello strato (1).

Supponiamo ora che si abbia un corpo cristallizzato risultante dall'unione di una moltitudine di queste molecole tetraedre, le quali abbiano inoltre la forma a telajo di cui ci occupiamo; e supponiamo, per venire addirittura ad un esempio numerico, che a quella temperatura alla quale se ne sia cimentata la tenacità, possa questo corpo restringersi di $\frac{1}{2000}$ secondo ciascuna delle sue tre dimensioni, prima che le molecole si sieno portate a tale vicinanza da non potersi più accostare ulteriormente. Noi potremo concepire questo corpo siccome formato di cellette le cui superficie sieno lontane dalle superficie delle rispettive molecole (dalle superficie cioè de' più piccoli tetraedri che si possono circoscrivere a queste molecole a telajo) per un $\frac{1}{2000}$ della distanza fra le superficie delle cellette e i centri delle molecole.

Immaginiamo che in questo corpo venga segata una porzione della forma di un prisma retto a basi quadrate, nel quale una parte de' piani delle naturali separazioni del corpo medesimo sia perpendicolare agli spigoli longitudinali; e fra i piani di questa classe uno serva a distinguere esso prisma in due uguali solidi prismatici che diremo

$$M,\ N,$$

di ciascuno de' quali sia

h' l'altezza,

(1) Si vegga la Cristallografia di Haüy, Tom. II, pag. 222. Io ho sostituito le cellette alle molecole tetraedre, per poter dar ragione delle mutazioni di volume prodotte dai cangiamenti della temperatura; intorno a che può vedersi il § 206 del Tomo I del mio Corso di Fisica stampato in Milano nel 1830.

h la lunghezza de' lati delle basi la quale noi supponiamo minore di *h'*,

∂ la densità media,

T la tenacità cimentata traendoli secondo la maggior dimensione *h'*, ed espressa in chilogrammi; e sia

V la forza con cui si attraggono vicendevolmente nella direzione degli spigoli longitudinali, dipendentemente dalla gravitazione, espressa questa forza similmente in chilogrammi.

Siccome poi i piani delle facce laterali de' prismi *M*, *N* segherebbero alcune delle molecole del corpo cristallizzato, così noi supporremo che quelle parti di queste molecole spezzate le quali apparterrebbero ad *M* e ad *N* sieno tolte fuori da questi solidi per lasciarli formati di sole molecole intere. E giacchè ad onta di queste parti levate si può dubitare (e noi per brevità non vogliamo occuparci a deciderlo per mezzo di dimostrazioni) che forse in qualcuno degli strati orizzontali componenti essi solidi *M*, *N*, e aventi l'altezza di una sola celletta, la somma de' volumi delle rispettive cellette superi la terza parte del volume dello strato medesimo, supposto che lo spazio di questo si estenda sino alle superficie laterali de' solidi *M*, *N*; perciò noi supporremo levate tutto all'intorno di ogni strato, ossia nelle sue facce laterali, alcune altre poche molecole nel modo che diremo, allo scopo che cessi interamente un siffatto dubbio, ed anzi la somma de' volumi delle cellette suddette si mostri evidentemente minore del terzo del volume di un tale strato. Scelto adunque per primo un qualche strato particolare, noi immagineremo che nella base inferiore di esso venga congiunto ciascun triangolo pieno (vedi la fig. 9) con un vicino triangolo voto, onde formare colle diverse coppie altrettanti rombi tutti eguali e tutti similmente situati; e in seguito supporremo conservate, insieme colle rispettive molecole, quelle cellette fra le appartenenti al suddetto strato, le quali si appoggiano colle lor basi su rombi compiuti, escludendo, similmente colle molecole rispettive, quelle poche cellette, sieno esse rotte o intere, le quali con tali lor basi si appoggiano a rombi imperfetti. Con ciò sovra a ciascun rombo intero si troverà posata colla sua base una celletta tetraedra il cui volume sarà esattamente uguale alla sesta parte del volume di un prisma retto avente esso rombo per base e l'altezza della celletta o dello strato per sua altezza. Ma l'inferior base dello strato oltre a rombi interi comprende eziandio di necessità de' rombi imperfetti, sopra cui nè alcuna intera celletta nè alcuna frazione di celletta si appoggia; perciò la somma delle cellette che rimangono sovrapposte colle lor basi alla base inferiore dello strato considerato, avranno fra tutte un volume che sarà minore della sesta parte dello strato medesimo. Ciò eseguito per la base inferiore dello strato che si è scelto, noi faremo la stessa operazione per riguardo alla base superiore del medesimo, cioè immagineremo riunito ciascun triangolo pieno di essa base, vale a dire ciascuno dei triangoli occupati da basi di cellette appartenenti ad esso strato ma volte colla base all'insù, con un contiguo triangolo voto, formando colle diverse coppie altrettanti rombi; conserveremo quindi quelle fra queste altre cellette (con entro le molecole rispettive), le quali colle

loro basi volte all'insù s'appoggiano a rombi perfetti, escludendo quelle altre poche intere o spezzate, le quali s'appoggiano colle lor basi a rombi imperfetti; e con ciò avremo un altro aggregato di cellette il cui volume complessivo sarà similmente minore della sesta parte dello strato medesimo. Unendo poscia queste cellette colle precedenti, per compiere con ciò l'intero numero di quelle che debbono appartenere allo strato suddetto, si avrà fra tutte insieme un volume che sarà necessariamente minore del terzo del volume di esso strato. Immagineremo eseguita una operazione somigliante per ciascun altro strato; e verrà così ad essere affatto tolto il dubbio di cui avevamo parlato. Ed è chiaro che il numero delle molecole le quali colle operazioni indicate verranno ad esser levate da ciascuno strato, sarà ben piccolo a confronto del numero totale di quelle che rimangono allo strato medesimo, non venendone a mancare che alcune poche nel contorno di esso, ed essendo piccolissima la larghezza di ciascuna celletta e quindi la larghezza delle liste ove si suppone operata la sottrazione, a confronto della larghezza di ciascuno strato. Intenderemo poi che la determinazione della massa de' solidi M, N all'oggetto di assegnarne la densità δ, venga fatta dopo levate le molecole suddette; però nel volume de' solidi medesimi intenderemo sempre che sia computato tutto lo spazio compreso fra le basi di essi e gli altri piani co' quali si è supposto segato il corpo primitivo.

Immaginiamo dopo ciò che le diverse molecole appartenenti ad M si concentrino ne' punti della loro *attrazione media* verso N, considerando l'effetto dell'attrazione parallelamente agli spigoli longitudinali, e chiamiamo

M' l'aggregato de' punti materiali risultanti;

e similmente immaginiamo che le molecole di N si concentrino ne' rispettivi punti della loro attrazione media verso M', e chiamiamo

N' l'aggregato di questi nuovi punti materiali.

Immaginiamo quindi che la materia concentrata in tutti questi punti, tanto di M' che di N', si torni a diffondere in tante uguali sfere, le quali mantenendo i centri in questi punti medesimi si ingrossino al segno che alcune tocchino le superficie delle loro cellette; e chiamiamo

M'', N'' i nuovi aggregati.

Ma qui, prima di passare ad ulteriori trasformazioni, fermiamoci alquanto a considerare questi ultimi aggregati M'', N''. Noi osserveremo primieramente che i raggi delle suddette minime sfere non possono essere minori delle distanze fra le superficie delle cellette e le superficie delle molecole contenute; perocchè i centri di esse sfere debbono trovarsi dentro allo spazio compreso dalla superficie delle molecole o al più in questa superficie. Saranno adunque questi raggi nell'addotto esempio numerico, non minori di $\frac{1}{2000}$ della distanza fra il centro

di una molecola e la superficie della rispettiva celletta. Chiamando perciò

R quest'ultima distanza, ed

r il raggio di ciascuna delle sfere componenti gli aggregati M'', N'', avremo

$$[a] \qquad r = \frac{1}{2000} R(1+\lambda),$$

essendo λ una quantità non minore di zero. E perciò il volume di ciascuna di queste sferette sarà

$$\frac{4}{3}\pi \cdot \frac{R^3(1+\lambda)^3}{(2000)^3}.$$

Il volume in vece di ciascuna celletta tetraedra sarà misurato da $8\sqrt{3}\cdot R^3$; perciocchè chiamata L la lunghezza di uno qualsivoglia de'suoi spigoli, sarà $L\cdot\sqrt{\frac{3}{4}}$ l'altezza di una delle sue facce triangolari, $L\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$ la distanza di uno degli angoli solidi dalla faccia opposta, e $\frac{1}{6}L^3\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}$ il volume della celletta, il qual volume col porre $L\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} = 4R$ si riduce a $8\sqrt{3}\cdot R^3$, come si è detto. Sta pertanto il volume di ciascuna piccola sfera al volume di ciascuna celletta, come

$$\frac{4}{3}\pi\frac{(1+\lambda)^3}{(2000)^3} : 8\sqrt{3},$$

ossia come

$$1 : \frac{6\sqrt{3}\cdot(2000)^3}{\pi(1+\lambda)^3}.$$

Dal che segue che la somma dei volumi di tutte le sferette contenute ne' solidi M'', N'' presi insieme è uguale al volume della total somma delle corrispondenti cellette tetraedre moltiplicato per

$$\frac{\pi(1+\lambda)^3}{6\sqrt{3}\cdot(2000)^3}.$$

E siccome queste cellette non occupano fra tutte che un terzo scarso del volume complessivo de' corpi primitivi M, N, lasciando, come si è detto, molti interstizii vacui che fra tutti formano uno spazio più che doppio di quello delle cellette; così la somma de' volumi delle anzidette sferette è uguale al volume de' due corpi M, N presi insieme, moltiplicato per

$$\frac{\pi(1+\lambda)^3}{3(1+\rho)\cdot 6\sqrt{3}\cdot(2000)^3},$$

essendo ρ una quantità reale e positiva, ma di un valore estremamente piccolo in confronto dell'unità, ossia per

$$[b] \qquad \frac{\pi(1+\lambda)^3}{18\sqrt{3}\cdot(2000)^3(1+\rho)}.$$

Ciò posto, essendo il volume complessivo de' due solidi M, N misurato da $2h'h^2$, la suddetta somma de' volumi delle sferette sarà data da

$$[c] \qquad \frac{2\pi h'h^2(1+\lambda)^3}{18\sqrt{3}\cdot(2000)^3(1+\rho)}.$$

Chiamando adunque

Δ la densità di cotali sferette, e rammentando che δ è la densità de' solidi M, N, avremo

$$\Delta:\delta::2h'h^2:\frac{2\pi h'h^2(1+\lambda)^3}{18\sqrt{3}\cdot(2000)^3(1+\rho)},$$

da cui

$$[d] \qquad \Delta=\delta\cdot\frac{18\sqrt{3}\cdot(2000)^3(1+\rho)}{\pi(1+\lambda)^3}.$$

Se colla materia di queste sferette, conservando la stessa densità, si volesse formare un cilindro retto dell'altezza de' due solidi primitivi M, N insieme uniti, cioè dell'altezza $2h'$, sarebbero le basi di questo cilindro misurate dalla quantità $[c]$ divisa per $2h'$, ossia da

$$\frac{\pi h^2(1+\lambda)^3}{18\sqrt{3}\cdot(2000)^3(1+\rho)},$$

e il diametro di queste basi, il quale chiameremo

$$D,$$

sarebbe dato dall' equazione

$$\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2=\frac{\pi h^2(1+\lambda)^3}{18\sqrt{3}\cdot(2000)^3(1+\rho)},$$

da cui

$$[e] \qquad D=\frac{2h(1+\lambda)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{18}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot(2000)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\rho}}.$$

Immaginiamo dopo ciò, nel modo che abbiam fatto nel numero antecedente, che le sfere componenti i solidi M'', N'' si ravvicinino nel verso trasversale sino a toccarsi, e che quindi le sezioni trasversali de' solidi che risultano, senza variare di area, cangino di forma per tal modo da ridursi a tanti cerchii intorno ad un medesimo asse. E chiamiamo

$$M''', N'''$$

i due solidi provenienti da questa trasformazione. La maggiore delle sezioni trasversali dell' aggregato di questi due nuovi solidi sarà evidentemente non maggiore di h^2, ed evidentemente altresì sarà non minore di un cerchio che abbia D per diametro. Chiamato perciò

H il diametro di questa maggior sezione, si avrà

$$\pi\left(\frac{H}{2}\right)^2=\frac{hh}{(1+\xi)^2},$$

essendo ξ una quantità non minore di zero, e però

$$[f] \qquad H=\frac{2h}{\sqrt{\pi}\cdot(1+\xi)};$$

e inoltre sarà

$$[g] \qquad H=(1+\sigma)D=\frac{2h(1+\lambda)^{\frac{3}{2}}(1+\sigma)}{(2000)^{\frac{1}{3}}\sqrt{18}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt{1+\rho}},$$

essendo σ una nuova quantità non minore di zero.

Un'altra espressione del valore di H la quale ci riuscirà utile fra poco la troveremo colle considerazioni seguenti.

Supponiamo che ne' due solidi M'', N'' sussistano ancora quelle medesime cellette che avevamo immaginate ne' solidi primitivi M, N; supponiamo computati nel volume di essi M'', N'' gli stessi spazii voti frammezzo e intorno alle cellette, come in M, N; e riteniamo ne' medesimi M'', N'' la stessa distinzione in istrati trasversali dell' altezza di una sola celletta come negli M, N, dai quali non differiscano essi M'', N'' in altro che nella forma, nella grandezza e nella posizione delle molecole contenute nelle diverse cellette. In questo supposto, siccome l'altezza di ciascuna celletta è

$$4R,$$

essendo R, come si è stabilito, la distanza fra il centro di essa celletta e una delle sue facce; così il volume di uno solo de' suddetti strati sarà

$$4Rhh,$$

e il numero delle cellette che occorrerebbero per formare un volume uguale a quello di esso strato sarebbe

$$\frac{4Rhh}{8\sqrt{3}\cdot R^3}$$

(stantechè $8\sqrt{3}\cdot R^3$ è il volume di una sola celletta), ossia sarebbe

$$\frac{hh}{2\sqrt{3}\cdot R^2}.$$

Però siccome un tale strato non si trova effettivamente occupato tutto intero da siffatte cellette, ma solamente per una terza parte del suo volume, anzi per qualche piccola cosa meno, così il numero delle cellette che in esso si contengono sarà

$$\frac{hh}{6\sqrt{3}\cdot R^2(1+\varepsilon)},$$

essendo ε una quantità reale e positiva ma piccolissima, a somiglianza della ρ,

della quale ρ per alcuni strati essa ε potrà essere maggiore e per altri minore. Tagliando ora uno di questi strati mediante un piano parallelo a quei piani che dividono l'uno strato dall'altro, non potrà in generale questo piano segare contemporaneamente pel mezzo tutte le sferette appartenenti allo strato medesimo, ma non potrà segare a questo modo che alcune di esse; altre le segherà fuori del centro, ed altre fors' anche non le segherà punto. Essendo perciò il cerchio massimo di ciascuna sferetta misurato da

$$\frac{\pi R^2(1+\lambda)^2}{(2000)^2}$$

(vedi l'equazione [a] del presente numero XVII), sarà la somma delle sezioni fatte dal suddetto piano in tali sferette non mai maggiore ma in generale minore di

$$\frac{hh}{6\sqrt{3}\cdot R^2(1+\varepsilon)}\cdot\frac{\pi R^2(1+\lambda)^2}{(2000)^2},$$

ossia di

$$\frac{\pi hh(1+\lambda)^2}{6\sqrt{3}\cdot(2000)^2(1+\varepsilon)}.$$

La massima sezione perciò che si potrà avere ne' due solidi M''', N''' segati trasversalmente, potrà essere espressa da

$$\frac{\pi hh(1+\lambda)^2}{6\sqrt{3}\cdot(2000)^2\cdot(1+\tau)(1+\varepsilon)},$$

essendo τ una nuova quantità non minore di zero; ossia da

$$\frac{\pi h^2(1+\lambda)^2}{6\sqrt{3}\cdot(2000)^2(1+\eta)},$$

essendo η una quantità reale e positiva, come si desume dall'essere reale e positiva la ε della precedente espressione, qualunque sia lo strato a cui essa ε appartiene. Avremo perciò

$$\pi\left(\frac{H}{2}\right)^2=\frac{\pi h^2(1+\lambda)^2}{6\sqrt{3}\cdot(2000)^2(1+\eta)},$$

da cui

$$[k]\qquad H=\frac{h\sqrt{2}\cdot(1+\lambda)}{2000\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{1+\eta}}.$$

Immaginiamo per ultimo, pure a somiglianza del numero precedente, che ai due solidi M''', N''' vengano circoscritti due uguali prismi alti come i due M, N, e a basi quadrate, aggiungendo tutto all'intorno in una conveniente quantità dell'altra materia ugualmente densa come le precedenti sferette, e chiamiamo

$$M^{IV},\ N^{IV}$$

questi nuovi prismi. Sarà

H la lunghezza dei lati delle basi di essi prismi,
h' l'altezza di ciascuno de' prismi medesimi,

$\partial \cdot \frac{18\sqrt{3}\,[2000]^3(1+\rho)}{\pi(1+\lambda)^3}$ la loro densità, come si ha dall' equazione [d].

La loro attrazione vicendevole poi sarà una quantità maggiore di V, stantechè nelle diverse trasformazioni immaginatesi successivamente, l' attrazione primitiva che avevamo indicata con V ha dovuto or crescere ed or rimanere costante, ma non mai scemare. Potrà perciò una siffatta attrazione fra i due ultimi prismi essere espressa da

$$(1+\gamma)V,$$

essendo γ una quantità positiva.

Richiamando pertanto l'equazione [37], e sostituendo

a χ la quantità $(1+\gamma)V$,

a Δ la quantità $\partial \cdot \frac{18\sqrt{3}(2000)^3(1+\rho)}{\pi(1+\lambda)^3}$,

a h la quantità $\frac{h\sqrt{2}\cdot(1+\lambda)}{(2000)\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{1+\eta}}$, come si trae dall' equazione [k],

a ψ, ossia a $\frac{h'}{H}$, da porre in Log.ψ, la quantità

$$\frac{h'\cdot(2000)^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{18}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{1+\rho}}{2h(1+\lambda)^{\frac{3}{2}}(1+\sigma)},$$

come si trae dall' equazione [g], e

a ψ similmente, ma da porre nell' espressione

$$\frac{1}{\psi^2}\left(\frac{69}{1+\alpha}-\frac{33}{1+\beta}\right),$$

la quantità

$$\frac{\sqrt{\pi}\cdot h'\cdot(1+\xi)}{2h},$$

come è dato dall' equazione [f], avremo

$$(1+\gamma)V = 0{,}000086\ 3845\cdot\frac{\partial^2\cdot 18\cdot 18\cdot 3\cdot(2000)^6\cdot h^4\cdot 4\cdot(1+\lambda)^4\cdot(1+\rho)^2}{\pi^2(1+\lambda)^6\cdot(2000)^4\cdot 9\cdot 3\cdot(1+\eta)^2\cdot\partial'}$$

$$\left\{\mathrm{L}\cdot\left[\frac{h'(2000)^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{18}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{1+\rho}}{2h(1+\lambda)^{\frac{3}{2}}(1+\sigma)}\right]+0{,}349645+\frac{4h^2}{\pi h'h'(1+\xi)^2}\left(\frac{69}{1+\alpha}-\frac{33}{1+\beta}\right)\right\},$$

da cui

[43] $$V=\frac{0{,}000086\,3845\cdot 4\cdot 36\cdot[2000]^2\cdot\delta^2 h^4(1+\rho)^2}{\pi^2\delta'(1+\lambda)^2(1+\eta)^2(1+\gamma)}\Big\{\mathrm{L}.\Big[\frac{h'}{2h}\Big]+\frac{3}{2}\mathrm{L}.2000+\frac{1}{2}\mathrm{L}.18$$
$$+\frac{1}{4}\mathrm{L}.3+\frac{1}{2}\mathrm{L}.(1+\rho)-\mathrm{L}.[(1+\lambda)^{\frac{3}{2}}(1+\sigma)]+0{,}349645+\frac{4hh}{\pi h'h'}\cdot\frac{1}{(1+\xi)^2}\Big(\frac{69}{1+\alpha}-\frac{33}{1+\delta}\Big)\Big\}.$$

Veniamo a un esempio numerico, e facciamo

$\delta=2{,}5$, cioè supponiamo che i due prismi M, N abbiano la densità del vetro,

$h=0{,}001$, cioè supponiamo questi prismi grossi un millimetro,

$h'=0{,}1$, cioè poniamo i medesimi prismi alti ciascuno un decimetro,

$\delta'=5{,}01$;

avremo

$$V=\frac{0{,}000086\,3845\cdot 4\cdot 36\cdot(2000)^2\cdot 2{,}5\cdot 2{,}5\cdot(1+\rho)^2}{(1000)^4(3{,}141593)^2\cdot 5{,}01\cdot(1+\lambda)^2(1+\eta)^2(1+\gamma)}\Big\{\mathrm{L}.50+\frac{3}{2}\mathrm{L}.2000+\frac{1}{2}\mathrm{L}.18+\frac{1}{4}\mathrm{L}.3$$
$$+\frac{1}{2}\mathrm{L}.(1+\rho)+0{,}349645+\frac{4}{10000\cdot 3}\cdot\frac{69}{1+\phi}-A\Big\},$$

essendo ϕ una quantità positiva, ed A uua quantità pure positiva, e minore della somma delle quantità positive contenute sotto le grandi parentesi, come si riconosce dal considerare che $\psi>1$, e che

$$\frac{4}{\pi\cdot 10000}\cdot\frac{33}{(1+\delta)(1+\xi)^2}<0{,}349645\,.$$

Da questa equazione, fatte le occorrenti riduzioni numeriche, si ha

$$V=\frac{0{,}000086\,3845\cdot 36\cdot(1+\rho)^2}{10000\cdot 5{,}01\cdot(3{,}141593)^2}\Big\{1{,}698970+4{,}951545+0{,}627636+0{,}119280$$
$$+0{,}349645+0{,}009200+\frac{1}{2}\mathrm{L}.(1+\rho)\Big\}\frac{1}{1+\theta},$$

essendo θ una quantità reale e positiva, ossia

$$V=\frac{0{,}000086\,3845\cdot 36\cdot(1+\rho)^2\Big[7{,}756276+\frac{1}{2}\mathrm{L}.(1+\rho)\Big]}{10000\cdot 5{,}01\cdot(3{,}141593)^2\cdot(1+\theta)}$$

$$=\frac{0{,}000086\,3845\cdot 36\cdot 7{,}756276\cdot(1+\rho)^2\left(1+\dfrac{\frac{1}{2}\mathrm{L}.(1+\rho)}{7{,}756276}\right)}{10000\cdot 5{,}01\cdot(3{,}141593)^2\cdot(1+\theta)},$$

dove, come si è detto, la ρ è una quantità piccolissima in confronto dell'unità. E però sarà

$$V=0{,}000000\,048781\cdot\frac{1+\Sigma}{1+\theta},$$

essendo similmente Σ una quantità piccolissima in confronto dell' unità. Potremo adunque porre con tutta sicurezza

$$V = \frac{0{,}000000\ 050}{1+\varpi}\ .$$

Il qual valore di V è minore di un trentamilionesimo della tenacità di un prisma di vetro della sezione di un millimetro quadrato, essendo questa tenacità non minore di chilogrammi 1,68.

Anche in questo caso adunque la gravitazione è affatto inefficace per produrre la coesione dei corpi. Con questa dimostrazione poi e colla precedente si comprendono tutti quei corpi cristallizzati di natura chimica semplice i quali hanno per forme delle loro molecole integranti de' solidi regolari della geometria; il che secondo Haüy è il caso del diamante, e della maggior parte de' metalli, per es. dell'oro, dell'argento, del rame, del ferro, del bismuto, ecc., le cui forme cristalline possono farsi derivare, secondo il medesimo Haüy, da *forme primitive* cubiche, ovvero ottaedre regolari (1), e le cui molecole elementari possono riguardarsi, nell'ipotesi che esaminiamo, siccome de'telai di figura o cubica o tetraedra regolare.

Vale la conclusione anche pel caso che nelle molecole elementari dei corpi si volesse supporre la materia disposta in una maniera diversa da quella a telajo, per es. a lamine in qualche modo congegnate o altrimenti. In generale in tutti que'corpi cristallizzati di natura chimica semplice i quali, secondo il sistema di Haüy, hanno per forma primitiva una di queste quattro, cioè il tetraedro regolare, il cubo, l'ottaedro regolare, e il dodecaedro romboidale, nei quali corpi la dilatazione pel calorico è uniforme secondo tutte e tre le dimensioni, non si può spiegare il restringimento prodotto dalla perdita del calorico, se non supponendo che le molecole elementari, qualunque sia in esse la disposizione della materia, si trovino lontane dal vicendevole contatto: e in questo caso possiamo sostituire a siffatte molecole altrettante minime sferette, e ripetere gli stessi ragionamenti fatti poco sopra per le molecole a telajo cubico e tetraedro regolare, e ricavare le medesime conseguenze.

Ella è poi cosa bn chiara che quando sia duopo ricorrere a un' altra causa diversa dalla gravitazione, per ispiegar la coesione in alcuni particolari corpi naturali, a quella causa medesima si dovrà pure attribuire la coesione di tutti gli altri corpi.

XVIII.

Si potrebbe da alcuno tentar di conciliare questo tessuto reticolare tanto coi fenomeni della cristallizzazione quanto co'cangiamenti di volume cagionati dal calore col ricorrere a qualche altra ipotesi sussidiaria, per es. coll'ammettere che ne'telai dell'ipotesi precedente vi siano degli spigoli curvilinei e flessibili, e col

(1) Haüy. *Minéralogie*, Paris 1822, Tom. III, p. 235, 249, 423, 531; Tom. IV, p. 202, 419.

supporre che il calore mediante il soccorso di questa flessibilità cangi le dimensioni di questi telai. Io però non mi accingerò a dimostrare l'inutilità anche di siffatta ipotesi sussidiaria, prima che qualcuno l'abbia adottata, e prima che questi non abbia determinato e circoscritto chiaramente come ei l'assuma. Dirò bene che il ricorrere a un tale sussidio sarebbe un voler introdurre una nuova complicazione nelle nostre nozioni sulla struttura dei corpi, e un voler rinunciare al modo sufficientemente semplice e chiaro secondo il quale si concepiscono presentemente operarsi gli effetti del calorico (1), per sostituirne un altro assai men naturale e più oscuro. E nel caso particolare della flessibilità degli spigoli de'telai, rimarrebbe ancora a spiegarsi in qual modo possa il calorico produrre le flessioni e le distensioni di questi spigoli, e in seguito rimarrebbe ad applicare queste nozioni sulla struttura dei corpi alla fusione, alla vaporizzazione, e agli altri fenomeni originati dal calorico tanto nel suo accumularsi nei corpi quanto nel suo partirsi da essi, e così pure resterebbe a far l'applicazione di queste nozioni ai varii fenomeni della chimica; ai quali fenomeni tutti non è ben sicuro che questa particolare nuova ipotesi si possa prestare.

Torna qui a proposito una giudiziosa riflessione di Laplace. « Si può aumen« tare, dice egli, la probabilità di una teoria o col diminuire il numero delle « ipotesi su cui ella si appoggia, o coll'accrescere il numero de'fenomeni che « da essa vengono spiegati (2) ». Ora quale probabilità potrà avere una dottrina, la quale per poter sopprimere una sola ipotesi nella spiegazione de'fenomeni naturali, l'ipotesi cioè di una nuova forza attrattiva, dee introdurre, onde potersi reggere, quasi altrettante supposizioni quanti sono i fenomeni da spiegare, vale a dire, 1.° la strana supposizione di una densità inconcepibile nella materia e di un tessuto rarissimo ne' corpi, allo scopo di dare una bastevole energia all'attrazione universale; 2.° quella delle molecole formate a telajo per salvare i fenomeni della cristallizzazione; 3.° quella della flessibilità degli spigoli di questi telai o qualche altra equivalente, per non mettersi in opposizione coi fenomeni del calorico; e forse molt'altre nuove supposizioni ancora, per potersi adattare agli altri diversi fenomeni?

XIX.

In tutte le ipotesi esaminate finora noi abbiamo ammesso che la forza attrattiva in cui consiste la gravitazione, risegga equabilmente in tutta la materia delle molecole dei corpi, talchè uguali parti di materia dovunque prese nella massa di una molecola sempre esercitino a parità di distanza una uguale attrazione verso un dato corpo, e sempre ne vengano ugualmente attratte; e solamente ci siamo permessi di variare nelle diverse ipotesi la disposizione della

(1) Può vedersi fra gli altri libri il Vol. I del mio Corso di Fisica alla pag. 99.
(2) *Exposition du Système du Monde*, édit. de l'an IV, Tom. II, pag. 188.

materia suddetta, ora supponendo le molecole fatte a telajo, ora interamente piene, ecc. Potrebbesi sperare da taluno qualche maggior vantaggio per gli effetti della gravitazione col supporre che non tutta la materia componente le suddette molecole goda ugualmente della facoltà di attrarre e di essere attratta, ma che questa proprietà non risegga se non in alcuni punti particolari della loro massa, o almeno che in alcune parti di questa massa ella sia molto più energica che in altre (1).

Sembra in fatti a prima vista che questa ipotesi dia un grande vantaggio alla gravitazione. Perocchè ammettendola noi possiamo immaginare che allorquando parecchie molecole si trovano al contatto apparente l'una dell'altra, ovvero alla più piccola distanza alla quale esse possano trovarsi, egli avvenga che i punti più attraenti di una molecola si trovino vicinissimi ai punti similmente più attraenti di un'altra; e in cotal modo l'effetto dell'attrazione può essere assai più grande che quando l'azione di questa forza sia distribuita uniformemente per tutta la massa di ciascuna di queste molecole. Ma a considerarla davvicino si trova che questa ipotesi, malgrado la sua vantaggiosa apparenza, non è punto più felice delle altre già da noi esaminate.

Lasciata in fatti da banda ogni altra obbiezione, egli è facile a vedersi che questa ipotesi va soggetta a quelle medesime difficoltà le quali si oppongono alla supposizione delle molecole a telajo. Imperocchè per riguardo agli effetti esteriori ella è affatto la medesima cosa l'aver luogo una maggiore densità in alcuni luoghi delle molecole o l'esservi in questi luoghi una più energica attrazione. Noi possiamo adunque invece di queste molecole nelle quali l'attrazione risiede o esclusivamente o più possentemente in certi luoghi particolari delle loro masse, sostituire altre molecole ove la materia sia tutta ugualmente attrattiva ma inegualmente densa, e dove la distribuzione di questa materia sia tale che l'efficacia dell'attrazione in luoghi omologhi sia ugualmente grande in queste ultime molecole come nelle prime: nè vi sarà alcuna differenza fra la forza che tiene legato insieme un aggregato di queste ultime molecole, e la forza che tiene unito un aggregato di quelle.

Ora quest'ultima disposizione, nel caso che la materia di ciascuna delle molecole sostituite non abbia veruna interruzione con se medesima, è precisamente quella stessa delle molecole a telajo, nelle quali noi abbiamo veduto, che in conseguenza della distanza che è sempre d'uopo supporre fra queste molecole per ispiegare la contrazione cagionata dal raffreddamento, l'attrazione universale non può essere abbastanza energica da poterle attribuire la coesione

---

(1) Una siffatta opinione della ineguale attività dell'attrazione ne' diversi punti delle molecole materiali, è stata effettivamente adottata da alcuni Fisici, specialmente in vista de' fenomeni della cristallizzazione; nè io intendo di oppormi, se alcuno vorrà applicare quest'idea ad una nuova attrazione distinta dalla gravitazione, o se, anche applicandola alla gravitazione, cercherà con essa di dar ragione di tutt'altro fenomeno che di quello della coesione o dell'adesione. Vedi *Gehler's Physikalisches Wörterbuch neu bearbeitet,* Tom. I, pag. 340.

de' corpi. E nel caso che vi fosse qualche interruzione fra le parti di ciascuna molecola dopo fatta questa sostituzione, benchè non coincida allora la forma delle molecole sostituite con quella delle molecole a telajo, si possono nulladimeno sottoporre le dette molecole surrogate alla dimostrazione medesima; vale a dire, nel supposto che i corpi presi a considerare sieno regolarmente cristallizzati e di natura chimica semplice, e che la esterna forma delle loro molecole integranti sia o cubica o tetraedra regolare, si può, dopo fatta la supposta sostituzione, immaginare che le molecole sostituite sieno contenute in mezzo a cellette regolari, di poi supporre che esse vengano prima a concentrarsi nei rispettivi punti di attrazione media, e poscia ad allargarsi nuovamente in tante uguali sfere aventi questi punti per loro centri e le quali sieno grandi a segno da toccare alcune di esse le parcti delle loro rispettive cellette; e su queste sfere poi si possono proseguire appuntino le dimostrazioni esposte nei numeri XVI e XVII.

Io stimo d'avere col fin qui detto dimostrata affatto inefficace l'attrazione universale a produrre la coesione, ogni volta che si tenga conto della sola forza colla quale due parti di un corpo si attraggono l'una l'altra direttamente o per propria loro vicendevole azione. Rimarrebbe a considerare l'opinione di chi volesse ammettere che l'attrazione universale tenga unite le parti di un corpo indirettamente, facendole spingere l'una verso l'altra da qualche agente ora sconosciuto, cui essa universale attrazione solleciti. Siccome però ciò sarebbe una nuova causa che si verrebbe ad aggiungere alla diretta vicendevole attrazione delle parti di un medesimo corpo, la qual causa per ciò che diremo nel numero seguente, dovrebbe manifestare fra le masse apparentemente attraentisi una legge diversa da quella della gravitazione, così noi avremo occasione di parlarne nell'ultimo articolo.

XX.

Concesso che la gravitazione (l'effetto per lo meno di essa operante direttamente fra i corpi, del quale soltanto finora si è parlato) sia affatto inefficace per produrre gli effetti attrattivi che si manifestano al contatto dei corpi, e che questi esigano indispensabilmente una nuova distinta forza, non potrebbe questa operare almeno colla medesima legge di essa gravitazione, cioè anch'essa nella ragione inversa de' quadrati delle distanze, in guisa che quei grandi effetti che la gravitazione produce fra le masse celesti, questa nuova forza li riproducesse in piccolo, ma ancor somiglianti, fra le minime particelle dei corpi terrestri? A chi così credesse si potrebbe facilmente rispondere che se così stesse la cosa, essendo nelle piccolissime distanze la nuova forza, ossia l'attrazione molecolare, molto più energica della gravitazione (siccome quella che sarebbe capace di effetti ai quali la gravitazione è insufficientissima), e scemando ambedue coll'accrescersi delle distanze nella medesima ragione, la prima si manterrebbe

più grande della seconda a tutte le distanze, talchè ne' movimenti celesti avrebbe grandissima parte anche l'attrazione molecolare. O anche si potrebbe considerare, che sommate le due attrazioni insieme, si ridurrebbero esse ad una forza unica dotata di un' unica legge cioè di quella della ragione reciproca de' quadrati delle distanze, della qual conclusione noi abbiamo già dimostrata l' insussistenza.

(*si darà il fine*)

RISOLUZIONE
DELLE EQUAZIONI INDETERMINATE
DI PRIMO GRADO (*)

MEMORIA

DI GIOVANNI DE PAOLI

1. Benchè la teorica dell'analisi indeterminata siasi al dì d'oggi assai avvanzata al suo perfezionamento per opera dei valenti geometri Gauss, Libri, Cauchy, pure ei resta ancora molto da desiderare riguardo alla semplicità dei metodi. È a dir il vero, la conoscenza dei metodi dei sullodati Geometri, basati su dottrine le più sublimi d'analisi, esige uno studio particolare approfondito, e non isceuro da grandi difficoltà. Non sembrami pertanto inutile il dare metodi più semplici e diretti, onde arrivare allo stesso fine per una via più facile, e più piana. Lusingomi che questa mia memoria abbia conseguito l'intento prefissomi, riguardo alle equazioni indeterminate di primo grado (**). La base, su cui è fondata la risoluzione di queste equazioni, e di molte altre, si è un teorema, di cui do la dimostrazione nel principio di questo scritto. Applicando questo teorema alle equazioni di primo grado a due, a tre, ed a n incognite, io giungo ad ottenere semplicissime ed eleganti formole generali, esprimenti il valore di ciascuna indeterminata dell'equazione proposta. È rimarcabile il legame, che esiste tra questa e quelle. Per ultimo confrontando le mie formole con quello del precitato analista italiano Libri ottengo curiosi ed eleganti teoremi. Ho creduto bene di dare la dimostrazione anche di ciò che è di già noto in analisi, per non obbligare i lettori ignari ad attingerla in altri libri. Debbo altresì avvertire a scanso di equivoci, che tutte le lettere adoperate in questo opuscolo denotano numeri interi e positivi, a meno che non si dica espressamente il contrario.

(*) Questa memoria era già scritta sino dall'anno 1830 senza conoscere il metodo del ch. geometra Binet venutomi sott'occhio recentemente nel Giornale della scuola politecnica stampato nell'anno 1831 (*Journal de l'École polytecnique,* Cahier vingtième). Il mio metodo però differisce dal suo in ciò che egli si serve del teorema di *Fermat* per la risoluzione delle equazioni indeterminate di primo grado, ed io di un teorema più generale che mi conduce a formole più compendiose.

(**) A questa terranno dietro consecutivamente altre trattanti della risoluzione delle equazioni indeterminate di secondo, e di più alto grado.

2. Sia p un numero primo: osservo l'equazione identica

$$(x+1)^p = x^p + p x^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2} x^{p-2} + \frac{p(p-1)(p-2)}{2 \cdot 3} x^{p-3} + \dots + p x + 1$$

e ne inferisco, che la somma di tutti i termini del secondo membro, toltone il primo e l'ultimo, deve essere un numero intiero multiplo di p; deve cioè essere

$$(a) \qquad (x+1)^p = x^p + 1 + p S_x ,$$

essendo S_x un numero intero. Infatti i coefficienti del binomio Newtoniano

$$p, \quad \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2}, \quad \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \text{ ecc.}$$

sono sempre numeri interi, e si capisce, che tali di necessità debbono essere, considerata l'altra maniera, colla quale possono formarsi le potenze sviluppate del binomio, cioè quella della successiva moltiplicazione; ma essendo p numero primo, questo fattore in tutte le antecedenti formole generali dei coefficienti non può avere alcuna influenza a far sì, che essi riescano numeri interi, giacchè non entra nei denominatori

$$1 \cdot 2, \quad 1 \cdot 2 \cdot 3, \text{ ecc.} \dots 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p-1 .$$

Adunque gli stessi coefficienti, poichè hanno il fattore p, sono prodotti di numeri interi per p. Adunque anche l'enunciata somma di termini

$$p x^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2} x^{p-2} + \dots + p x$$

è il prodotto di un intero per p.

3. La precedente equazione (a) può scriversi senza alterazione

$$(x+1)^p - (x+1) - [x^p - x] = p S_x .$$

Cambiando in questa successivamente x in $x-1$, $x-2$, $x-3$, ... 2, 1, si otterranno le equazioni seguenti

$$x^p - x - [(x-1)^p - (x-1)] = p S_{x-1} ;$$

$$(x-1)^p - (x-1) - [(x-2)^p - (x-2)] = p S_{x-2} ;$$

$$(x-2)^p - (x-2) - [(x-3)^p - (x-3)] = p S_{x-3} ;$$

- -

- -

$$3^p - 3 - [2^p - 2] = p S_2 ;$$

$$2^p - 2 - [1^p - 1] = p S_1 .$$

Facendo attenzione al modo, con cui sono fatti i primi membri di tali equazioni, si vede, che la loro somma dà un risultato assai semplice, cioè

$$(b) \qquad x^p - x = p\,\Sigma\,S_x;$$

essendosi posto per abbreviazione

$$\Sigma\,S_x = S_1 + S_2 + \cdots + S_{x-2} + S_{x-1},$$

dove è manifesto, che anche $\Sigma\,S_x$ è numero intero. Ognuno comprende, che si poteva giungere immediatamente allo stesso risultato, servendosi del calcolo delle differenze finite.

4. Pongasi nella (b) x^m in luogo di x, ed avremo l'equazione

$$x^{mp} - x^m = p\,\Sigma\,S_{x^m},$$

la quale divisa per x^m, ci dà

$$(c) \qquad x^{m(p-1)} - 1 = \frac{p\,\Sigma\,S_{x^m}}{x^m}.$$

Bisogna adunque, che $\frac{p\,\Sigma\,S_{x^m}}{x^m}$ sia un intero, giacchè $x^{m(p-1)} - 1$ lo è. Possono qui darsi due casi: che x sia, o non sia multiplo di p. Suppongo il secondo; è evidente, che non può $\frac{p\,\Sigma\,S_{x^m}}{x^m}$ essere numero intero, se da se solo non è numero intero il fattore $\frac{\Sigma\,S_{x^m}}{x^m}$.

Si chiami X_m per abbreviazione un tale fattore, e si faccia

$$(d) \qquad x^{p-1} = y;$$

la (c) prenderà la forma

$$(e) \qquad y^m - 1 = p\,X_m.$$

5. Ponendo successivamente nella (e) $2m, 3m, \cdots (p-1)m$ in luogo di m, formeremo le equazioni

$$y^{2m} - 1 = p\,X_{2m};$$

$$y^{3m} - 1 = p\,X_{3m};$$

- - - - - - - - -

- - - - - - - - -

$$y^{(p-1)m} - 1 = p\,X_{(p-1)m}.$$

Si sommino ora tali equazioni fra loro, e colla (e), risulterà

$$(f) \qquad 1 + y^m + y^{2m} + y^{3m} + \cdots + y^{(p-1)m} - p = p(X_m + X_{2m} + X_{3m} + \cdots + X_{(p-1)m}).$$

Denominando per abbreviare Y_m la somma

$$1+X_m+X_{2m}+X_{3m}+\dots+X_{(p-1)m},$$

ed osservando, che

$$1+y^m+y^{2m}+y^{3m}+\dots+y^{(p-1)m}=\frac{y^{mp}-1}{y^m-1},$$

dalla (f) si trarrà

$$(g) \qquad y^{mp}-1=p(y^m-1)Y_m;$$

e da questa, cambiando successivamente m in mp, mp^2; mp^3 ... mp^{n-2}, e y^m-1 in pX_m, ricaveremo

$$y^{mp}-1=p(y^m-1)Y_m=p^2X_mY_m;$$

$$y^{mp^2}-1=p(y^{mp}-1)Y_{mp}=p^3X_mY_mY_{mp};$$

$$y^{mp^3}-1=p(y^{mp^2}-1)Y_{mp^2}=p^4X_mY_mY_{mp}Y_{mp^2};$$

- -

- -

$$y^{mp^{n-1}}-1=p(y^{mp^{n-2}}-1)Y_{mp^{n-2}}=p^nX_mY_mY_{mp}\dots Y_{mp^{n-2}},$$

le quali equazioni ci dicono, che essendo y^m-1 divisibile per p, è $y^{mp}-1$ divisibile per p^2, $y^{mp^2}-1$ divisibile per p^3, $y^{mp^3}-1$ divisibile per p^4, ed in generale $y^{mp^{n-1}}-1$ divisibile per p^n.

Sostituiscasi ad y il suo valore tratto dalla (d), e conchiuderassi questo bel teorema: *Essendo* p *numero primo,* x *non divisibile per* p*;* m, n *numeri interi e positivi, è sempre* $x^{mp^{n-1}(p-1)}-1$ *divisibile per* p^n.

6. Nel caso particolare di $p=2$, il precedente teorema dà $x^{m2^{n-1}}-1$ divisibile per 2^n, quando x sia numero dispari; se però è $n>1$, sarà $x^{m2^{n-1}}-1$ divisibile anche per 2^{n+1}. In fatti partiamo dalla formola x^2-1. Essendo x numero dispari, cioè della forma $2r-1$, sarà $x^2-1=4r(r-1)$, e poichè $r(r-1)$ è sempre numero pari, sarà

$$x^2-1=2^3q,$$

essendo q numero intero. Ma se x è numero dispari, è evidente, che anche x^m è un numero dispari. Adunque sarà anche

$$(h) \qquad x^{2m}-1=2^3Q;$$

Q numero intero, cioè a dire $x^{2m}-1$ è divisibile non solo per 2^2, come darebbe il teorema precedente, ma anche per 2^3. Abbiamo poi

$$x^{4m}-1=(x^{2m}-1)(x^{2m}+1),$$

e quindi

$$(i) \qquad x^{4m}-1=2(x^{2m}-1)R_m$$

giacchè $x^{2m}+1$ è sempre numero pari. Mettendo ora in questa successivamente $2m$, 2^2m, 2^3m, - - - $2^{n-3}m$ in luogo di m, avremo dalle (h), (i)

$$x^{2^2m}-1=2\left(x^{2m}-1\right)R_m \quad =2^4 Q R_m;$$

$$x^{2^3m}-1=2\left(x^{2^2m}-1\right)R_{2m} \quad =2^5 Q R_m R_{2m};$$

$$x^{2^4m}-1=2\left(x^{2^3m}-1\right)R_{2^2m} \quad =2^6 Q R_m R_{2m} R_{2^2m};$$

- -

- -

$$x^{m2^{n-1}}-1=2\left(x^{m2^{n-2}}-1\right)R_{2^{n-3}m}=2^{n+1} Q R_m R_{2m} \cdots R_{2^{n-3}m};$$

il quale ultimo risultato ci dà la formola $x^{m2^{n-1}}-1$ divisibile per 2^{n+1}, ma solo nel caso di $n-1>0$, ossia di $n>1$ già enunziato, giacchè nella dimostrazione siamo partiti dalla formola $x^{m2^1}-1$.

7. Dal teorema del num. 5 segue che la formola

$$x^{\alpha^{i-1}(\alpha-1)\beta^{h-1}(\beta-1)\gamma^{r-1}(\gamma-1)\cdots}-1$$

è divisibile per $\alpha^i \beta^h \gamma^r \cdots$, supponendo $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ numeri primi fra loro disuguali, ed x un numero non divisibile per nessuno di essi. Infatti nell'esponente di x chiamisi per un momento m il fattore $\beta^{h-1}(\beta-1)\gamma^{r-1}(\gamma-1)\cdots$, e la formola sarà ricondotta alla forma $x^{m\alpha^{i-1}(\alpha-1)}-1$, che la convince divisibile per α^i (num. 5). Chiamisi invece m il fattore $\alpha^{i-1}(\alpha-1)\gamma^{r-1}(\gamma-1)\cdots$, e la formola ridotta così alla forma $x^{m\beta^{h-1}(\beta-1)}-1$ si vede per la stessa ragione divisibile per β^h. In un modo affatto simile si prova la stessa formola divisibile per γ^r, e così di seguito. Quindi essendo essa divisibile simultaneamente per $\alpha^i, \beta^h, \gamma^r, \cdots$ sarà divisibile anche pel prodotto $\alpha^i \beta^h \gamma^r \cdots$. Facciamo per maggior semplicità

$$(j) \qquad N=\alpha^i \beta^h \gamma^r \cdots;$$

$$(k) \qquad K=\alpha^{i-1}(\alpha-1)\beta^{h-1}(\beta-1)\gamma^{r-1}(\gamma-1)\cdots;$$

la formola x^k-1, dove x è un numero non divisibile per $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$, sarà divisibile per N. Ora è visibile, che qualunque numero intero proposto N può ridursi alla forma del secondo membro della (j). Questa riduzione fissa i valori dei numeri $\alpha, \beta, \gamma, \cdots i, h, r, \cdots$, e riesce quindi determinato per la (k) il valore di K che chiameremo d'ora in avanti l'*esponente, che corrisponde al numero dato* N. Avremo adunque il teorema, uno dei fondamentali dell'analisi indeterminata: *essendo dato un numero qualunque* N, x *un numero non divisi-*

bile per i varii numeri primi, che lo compongono, o ciò, che è lo stesso, x primo con N, K *l'esponente, che corrisponde allo stesso numero, è sempre* x^k-1 *divisibile per* N.

8. Osserviamo relativamente a questo esponente K, che nel caso, in cui uno dei numeri primi α, β, γ, - - - di N sia il 2; sia per esempio

$$(l)\qquad N=2^i\beta^h\gamma^r\cdots,\quad \text{e}\quad i>2\,,$$

può prendersi più semplicemente

$$(m)\qquad K=2^{i-2}\beta^{h-1}(\beta-1)\gamma^{r-1}(\gamma-1)\cdots.$$

La formola generale (k) darebbe

$$K=2^{i-1}\beta^{h-1}(\beta-1)\gamma^{r-1}(\gamma-1)\cdots;$$

ma si rifletta, che in tal caso, fatto $m=\beta^{h-1}(\beta-1)\gamma^{r-1}(\gamma-1)\cdots$ la formola $x^{m2^{i-1}}-1$ non è solamente divisibile per 2^i, ma (num. 6) anche per 2^{i+1}, il che è troppo, bastando, che sia divisibile per 2^i. Possiamo adunque diminuire di uno la i nell'esponente della detta formola, di modo che $x^{m2^{i-2}}-1$, ossia x^k-1, dove k ha il valore (m), è pure divisibile per N, come abbiamo enunziato.

9. L'esponente k (equazioni (k), (m)) non è il solo, che goda dell'indicata proprietà, ma vi possono essere altri numeri minori, che producono lo stesso effetto. Per vederlo si rifletta, che, disposti i numeri α, β, γ, ecc. in ordine di grandezza cominciando dai più piccoli, può succedere, che nel valore di K sopra espresso i numeri $\alpha-1$, $\beta-1$, $\gamma-1$, ecc. abbiano divisori comuni, o siano risolubili in fattori, che riproducano alcuni dei numeri primi α, β, ecc. antecedenti. In tal caso si considerino le parti separate

$$\alpha^{i-1}(\alpha-1),\quad \beta^{h-1}(\beta-1);\quad \gamma^{r-1}(\gamma-1),\ \text{ecc.}$$

dal cui prodotto risulta K; se in alcuna delle seguenti siavi un fattore semplice o composto, che si possa altresì raccogliere dai fattori costituenti le parti precedenti, quel fattore si potrà sopprimere; poichè è inutile replicare un fattore, che si può considerare a piacimento trasportato nelle diverse parti per provarle successivamente tali quali si ha bisogno. Per esempio se fosse

$$N=504=2^3\cdot3^2\cdot7^1;$$

si avrebbe dalla (m)

$$K=2^{3-2}\cdot3^1(3-1)\cdot7^0(7-1)=2\cdot6\cdot6\,.$$

Qui i due fattori 2, 6 si possono tralasciare, perchè sono già contenuti nella parte rimanente 6; perciò si avrà più semplicemente x^6-1 per la formola dei numeri divisibili per 504, essendo x un numero intero, e primo con 504. Trovato l'esponente minimo, un multiplo qualunque di esso rappresenterà tutti gli esponenti che appartengono al dato numero N. Alla fine di questa memoria si

è posta una tavola contenente gli esponenti minimi, che corrispondono ai numeri naturali da 2 sino a 200.

10. Secondo ciò, che abbiamo detto nel numero precedente, si può immediatamente semplificare ancora di più l'esponente k. Siano n i diversi numeri primi componenti il numero N, i quali chiameremo $b_1, b_2, \cdots b_n$, e sia

$$(n) \qquad N = b_1^{m_1} b_2^{m_2} \cdots b_n^{m_n}.$$

È chiaro, che un numero $n-1$ per lo meno delle n parti

$$b_1^{m_1-1}(b_1-1), \quad b_2^{m_2-1}(b_2-1), \quad \cdots \quad b_n^{m_n-1}(b_n-1),$$

il cui prodotto dà l'esponente k, conterranno il fattore 2, poichè fra tutti i numeri b_1-1, b_2-1, $\cdots$ b_n-1 non ve ne può essere, che un solo, che sia dispari, proveniente da quello fra i numeri primi $b_1, b_2, \cdots b_n$, eguale al 2. Adunque, siccome basta, che il fattore 2 vi sia in una sola delle parti suddette (numero precedente), così si potrà l'esponente k dividere un numero $n-2$ di volte per 2, di modo che tanto la formola x^k-1, quanto l'altra $x^{\frac{k}{2^{n-2}}}-1$ sarà divisibile per N, posto

$$(o) \qquad K = b_1^{m_1-1}(b_1-1)\, b_2^{m_2-1}(b_2-1) \cdots b_n^{m_n-1}(b_n-1);$$

ovvero

$$K = N\left(1-\frac{1}{b_1}\right)\left(1-\frac{1}{b_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{b_n}\right) \quad (*)$$

Osserviamo riguardo al valore (m) di K, che la parte 2^{i-2} costituente dello stesso contiene il fattore 2, giacchè è $i>2$. Si potrà adunque in tal caso sopprimere il 2 fattore di tutti i numeri pari $\beta-1$, $\gamma-1$, ecc., in guisa, che si avrà più semplicemente

$$(p) \qquad K = 2^{i-2}\,\beta^{h-1}\left(\frac{\beta-1}{2}\right)\gamma^{n-1}\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)\text{ecc.}$$

Se vogliamo esprimere per mezzo di simboli il valore (n) di N, e quello (o) dell'esponente k, che gli corrisponde, possiamo fare

$$(q) \qquad N = e^{\Sigma_{u=0}^{u=n} \mathrm{l}.\, b_{u+1}^{m_{u+1}}};$$

$$(r) \qquad K = e^{\Sigma_{u=0}^{u=n} \mathrm{l}.\, b_{u+1}^{m_{u+1}-1}(b_{u+1}-1)};$$

estendendo le somme Σ da $u=0$, sino ad $u=n$, e denominando al solito e la

(*) Un'espressione identica colla presente trovasi a pag. 227 del T. 4.° degli *Exercices de Mathématiques* del sig. Cauchy, ma vi è impiegata ad altri usi.

base dei logaritmi iperbolici. È da rimarcarsi il legame, che passa tra i secondi membri delle equazioni (q), (r).

11. Combinando le formole sin qui esposte, si arriva a varie deduzioni osservabili sotto certi aspetti, ma che non formano il presente mio scopo. Soggiungerò però un teorema, che mi è pur necessario nelle dimostrazioni consecutive. Siano a, b due numeri primi fra loro, k l'esponente, che corrisponde ad a, e k_1 quello che corrisponde a b; sarà pel teorema del num. 7 la formola $b^k - 1$ divisibile per a, e la formola $a^{k_1} - 1$ divisibile per b. Adunque il prodotto

$$(b^k - 1)(a^{k_1} - 1) = a^{k_1} b^k - (b^k + a^{k_1} - 1)$$

sarà divisibile per ab; ma nel secondo membro della precedente identità il primo termine è divisibile per ab, poichè si ha sempre $k, k_1 > 0$; dunque dovrà esserlo anche la parte restante $b^k + a^{k_1} - 1$.

12. Applicando attualmente ciò, che abbiamo premesso, siamo in grado di risolvere completamente le equazioni indeterminate di primo grado. Incominceremo dall'equazioni a due incognite per quindi progredire a quelle a tre, ed a n incognite. Sia pertanto l'equazione proposta a risolvere

$$(s) \qquad ax - by = c;$$

dove i numeri dati a, b si suppongono primi fra loro. È noto, che si può sempre ridurre qualunque equazione indeterminata di primo grado a due incognite alla detta forma. In fatti se uno dei numeri a, b fosse negativo, si cambierebbe il segno all'indeterminata, che nella data equazione lo moltiplica, ed il trovato valore di questa col segno cangiato sarà quello dell'indeterminata della data equazione. Non possono poi a, b, perchè l'equazione sia solubile, avere un fattore comune, che non lo sia anche di c, e siccome in tal caso si ha sempre il mezzo di toglierlo colla divisione, siamo ridotti alla fatta supposizione. Ciò premesso, vediamo quale sia la forma dei valori di x, y. Dicesi primieramente che conosciuti due valori particolari α, β di x, y che soddisfacciano alla (s) potremo conoscere tutti gli altri mediante le formole

$$(t) \qquad x = \alpha + b\omega, \quad y = \beta + a\omega$$

dove ω è un numero intero indeterminato. Infatti se α, β sono come si è detto, insieme all'equazione $ax - by = c$ sussisterà l'altra $a\alpha - b\beta = c$, e quindi sottraendo le due equazioni avremo

$$a(x - \alpha) - b(y - \beta) = 0;$$

ossia

$$\frac{x - \alpha}{y - \beta} = \frac{b}{a}.$$

Qui i due termini della frazione nel secondo membro sono primi fra loro, e

quindi essa non è riducibile a termini minori: la frazione poi del primo membro dovendo essere a quella eguale non potrà differirne se non per un comune fattore ω per cui siano divisibili i suoi due termini: il che suppone $x-\alpha=b\omega$, $y-\beta=a\omega$ equazioni che riproducono le (t) sopra annunciate (questa dimostrazione è dovuta a Lagrange).

Accertati così che dalla cognizione di due valori particolari si passa alla cognizione di tutti, ci conviene fra quei valori particolari sceglierne due i quali godono di una singolare proprietà ed è quella di essere multipli di c. Che sia così, proviamo a supporre invece delle (t) le

$$(u) \qquad x=\pi c+b\omega \quad y=\mu c+a\omega$$

e sostituendo nella (s) vedremo ch'essa si riduce tutta divisibile per c e lascia

$$(x) \qquad a\pi-b\mu=1.$$

Questa equazione ci fa conoscere due cose: la prima, che due valori particolari π, μ che soddisfanno ad essa conducono a trovare i due valori particolari πc, μc multipli di c che soddisfanno alla proposta (s); la seconda, che invece della proposta (s) possiamo trattare la precedente (x) più semplice perchè il secondo membro vi è eguale all'unità.

Ora dalla (x) abbiamo

$$\mu=\frac{a\pi-1}{b}$$

e trattasi di trovare per μ, π due valori numeri interi.

A questo fine è necessario, che $a\pi-1$ sia divisibile per b; il che si ottiene se, denominando k l'esponente, che corrisponde a b, e t un numero primo collo stesso numero b, si fa

$$a\pi-1=t^k-1.$$

Da qui si ha

$$\pi=\frac{t^k}{a};$$

equazione, che ci indica essere t^k divisibile per a. Affine di soddisfare a questa condizione noi faremo per ora semplicemente $t=a$; il che è possibile, atteso che a è primo con b. Avremo adunque

$$\pi=a^{k-1};$$

e quindi

$$\mu=\frac{a^k-1}{b}.$$

Sostituendo questi valori nelle equazioni (u), si ricaveranno le seguenti eleganti formole generali per la risoluzione della (s)

$$(y) \qquad x=c\cdot a^{k-1}+b\omega; \quad y=c\cdot\frac{a^k-1}{b}+a\omega,$$

ove ω è una indeterminata qualunque.

13. Permutando a in b, x in $-y$, e viceversa, la (s) resta ancora la stessa. Adunque facendo le stesse permutazioni nelle formole (r), e supponendo, che k si cangi in k_1 esponente, che corrisponde ad a, si otterranno due altre formole eleganti

$$y = -c \cdot b^{k_1 - 1} - a\omega; \quad x = -c \cdot \frac{b^{k_1} - 1}{a} - b\omega.$$

Acciocchè x, y siano positivi, fa d'uopo cangiare il segno all'indeterminata ω, e fare $\omega > \frac{c \cdot b^{k_1 - 1}}{a}$ dopo il cangiamento, come consta dalle formole ultime così cambiate

$$(z) \qquad y = -c \cdot b^{k_1 - 1} + a\omega; \quad x = -c \cdot \frac{b^{k_1} - 1}{a} + b\omega.$$

È facile il provare, che i valori attuali non diferiscono dai precedenti, che pei multipli di a, o di b. Infatti si hanno identicamente

$$-c \cdot b^{k_1 - 1} + a\omega = c \cdot \frac{a^k - 1}{b} + a\left(\omega - c \cdot \frac{a^k + b^{k_1} - 1}{ab}\right);$$

$$-c \cdot \frac{b^{k_1} - 1}{a} + b\omega = c \cdot a^{k-1} + b\left(\omega - c \cdot \frac{a^k + b^{k_1} - 1}{ab}\right);$$

ove si vede, che al luogo dell'indeterminata ω trovasi la quantità

$$\omega - c \cdot \frac{a^k + b^{k_1} - 1}{ab};$$

che è pure un numero indeterminato ed intero, poichè è intero

$$\frac{a^k + b^{k_1} - 1}{ab}$$

(num. 11). Se il numero b si mette sotto la forma (q) (num. 10), le formole (r) diverranno

$$(aa) \qquad x = c \cdot a^{e^{\Sigma_{u=0}^{u=n} \mathrm{l}.\, b_{u+1}^{m_{u+1}-1}(b_{u+1}-1)} - 1} + \omega e^{\Sigma_{u=0}^{u=n} \mathrm{l}.\, b_{u+1}^{m_{u+1}}};$$

$$y = c \cdot \frac{a^{e^{\Sigma_{u=0}^{u=n} \mathrm{l}.\, b_{u+1}^{m_{u+1}-1}(b_{u+1}-1)}} - 1}{e^{\Sigma_{u=0}^{u=n} \mathrm{l}.\, b_{u+1}^{m_{u+1}}}} + a\omega;$$

le quali saranno i valori delle due indeterminate dell' equazione

$$(bb) \qquad ax - ye^{\Sigma_{\mu=0}^{\mu=n} \mathrm{l}.\, b_{\mu+1}^{m_{\mu+1}}} = c.$$

14. Nella pratica applicazione se il numero a, o il b ha divisori comuni con c, conviene prima di effettuare il calcolo eliminarli, affinchè riesca più semplice. Per esempio se b e c hanno il massimo comun divisore δ, col fare $x = \delta x_1$, la (s) si trasformerà in quest'altra più facile a trattarsi

$$a x_1 - \frac{b}{\delta} y = \frac{c}{\delta}.$$

In certi casi si possono avere per x, y valori più semplici, che quelli delle formole precedenti, come passiamo a vedere. Mettiamo il numero a sotto la forma $F^{fk+h} G^{gk+l} - - -$, essendo k l'esponente, che corrisponde a b; $h, l - - -$ minori di k, e $F, G, - - -$ numeri primi ineguali; il che è visibilmente possibile. Ciò posto, è chiaro, che per soddisfare all'equazione (num. 12)

$$\pi = \frac{t^k}{a};$$

basta il fare

$$t = F^{f+1} G^{g+1} - - -.$$

Si avrà allora

$$\pi = F^{k-h} G^{k-l} - - -, \quad \mu = \frac{(F^{f+1} G^{g+1} - - -)^k - 1}{b};$$

e quindi

$$(cc) \qquad x = c \cdot F^{k-h} G^{k-l} - - - + b\varpi, \quad y = c \cdot \frac{(F^{f+1} G^{g+1} - - -)^k - 1}{b} + a\varpi.$$

Confrontando le formole attuali colle (y), si vede, che, quando non sia $f = g = - - - = 0$; $h = l = - - - = 1$, cioè, quando a non sia un prodotto di semplici numeri primi ineguali, si otterrà del vantaggio nella pratica applicazione, servendosi delle ultime formole. Per un esempio sia da risolversi l' equazione

$$9x - 20y = 7;$$

paragonandola colla (s) si ha $a = 9 = 3^2$; $b = 20 = 2^2 \cdot 5$, $c = 7$; qui l'esponente minimo k, che corrisponde a b, è 4; epperò $f = 0$, $h = 2$; $F = 3$; $G = 1$; - - -. Avremo adunque per i valori delle indeterminate dell' equazione proposta (equazioni (cc))

$$x = 7 \cdot 3^{4-2} + 20\varpi = 63 + 20\varpi;$$

$$y = 7 \cdot \frac{3^4 - 1}{20} + 9\varpi = 28 + 9\varpi.$$

(sarà continuato)

PARTE SECONDA

Seguono due Capitoli che continuano la prima Sezione del TRATTATO SUL CALCOLO DEGLI INTEGRALI DEFINITI *(Vedi Fascicolo II, pag.* 169)

CAPO X.

Derivazione e integrazione per le costanti.

71. I valori delle formole d'integrali definiti ottenuti coi metodi sin qui esposti o con altri che vedremo in seguito, sono in sostanza espressioni di una stessa quantità analitica sotto diversa forma, talchè l'equazione fra la formola integrale e il suo valore è una vera equazione identica nei cui due membri entrano le lettere considerate come costanti relativamente a quella per cui è indicata l'integrazione. Ora è noto che insieme con una equazione identica sussistono tutte le sue derivate e primitive di qualunque ordine prese per ognuna delle lettere che la compongono: potremo dunque derivare o integrare l'accennata equazione tra la formola integrale e il suo valore per ognuna delle costanti anzidette, avvertendo che questa operazione si fa nel primo membro passando sotto il segno integrale relativo ad altra lettera indipendente da quella su cui si opera, e che è destinata a sparire (rileggansi i primi numeri del trattato). Vedesi qui un mezzo per cui appoggiandoci a un risultato noto ne possiamo dedurre altri ed altri moltissimi, a parecchi dei quali sarebbe stato difficilissimo o anche impossibile arrivare direttamente. Gli esempj meglio di ogni discorso renderanno famigliare al lettore l'esposto principio che è il più fecondo d'ogni altro nella teorica che esponiamo.

72. Trovammo al numero 46 la formola

$$(a) \qquad \int_0^\infty dx \cdot \frac{\cos. rx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{2m} e^{-mr}$$

e sarà nostra cura corredare in seguito questo risultato (dovuto originariamente a Laplace) di altre prove e di analoghe riflessioni. Intanto osservisi che le lettere r, m stanno come costanti in ambi i membri della equazione, appunto come si è detto nel numero precedente: e però potremo derivare o integrare per esse. Scelgo di derivare per riguardo ad r, e così ottengo

$$(b) \qquad \int_0^\infty dx \cdot \frac{x \sin. rx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-mr}.$$

Questa e la precedente formola danno nel caso particolare di $m=1$

$$(c) \qquad \int_0^\infty dx \cdot \frac{\cos. rx}{1+x^2} = \int_0^\infty dx \cdot \frac{x \sin. rx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-r}.$$

Vedremo in seguito che per la sussistenza delle formole (a), (b) havvi la condizione che il prodotto mr nella quantità esponenziale sia sempre quantità positiva.

73. Prendiamo a trattare l'integrale

$$\int_0^\infty dx \cdot \frac{x \sin. rx}{(m^2 + x^2)(1 - 2p \cos. rx + p^2)}$$

riflettendo col Legendre (*), cui devesi tutto questo pezzo di teorica, che la p può sempre supporsi minore dell'unità, giacchè se non lo fosse, fatta $p=\frac{1}{p'}$ sarebbe poi p' minore dell'unità, ed eseguita la sostituzione, verrebbe la stessa formola col p' in luogo di p, e moltiplicata per p'^2. Adunque potremo mettere (num. 44) in luogo della frazione $\frac{\sin.rx}{1-2p\cos.rx+p^2}$ la serie

$$\sin.rx+p\sin.2rx+p^2\sin.3rx+\text{ecc.}$$

e quindi l'integrale proposto equivarrà alla somma

$$\int_0^\infty dx\cdot\frac{x\sin.rx}{m^2+x^2}+p\int_0^\infty dx\cdot\frac{x\sin.2rx}{m^2+x^2}+p^2\int_0^\infty dx\cdot\frac{x\sin.3rx}{m^2+x^2}+\text{ecc.}$$

ossia per la precedente (b) alla serie infinita

$$\frac{\pi}{2}\left(e^{-mr}+p\,e^{-2mr}+p^2\,e^{-3mr}+p^3\,e^{-4mr}+\text{ecc}\right)$$

la quale, posta $\xi=p\,e^{-mr}$, diventa

$$\frac{\pi}{2p}\left(\xi+\xi^2+\xi^3+\text{ecc.}\right)$$

e riducesi

$$\frac{\pi}{2p}\cdot\frac{\xi}{1-\xi}\,,\quad\text{ovvero}\quad\frac{\pi}{2p}\cdot\frac{p\,e^{-mr}}{1-p\,e^{-mr}}\,,\quad\text{ovvero}\quad\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{e^{mr}-p}$$

quando (numeri 37, 44) sia ξ minore dell'unità, il che appunto si verifica nel nostro caso in cui è $p<1$, e $mr>0$.
Pertanto si ha la formola

$$(d)\qquad\int_0^\infty dx\cdot\frac{x\sin.rx}{(m^2+x^2)(1-2p\cos.rx+p^2)}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{e^{mr}-p}$$

di cui la (b) è caso particolare.

74. Nella formola ora trovata la p deve essere minore dell'unità, ma astrazion fatta dal segno, talchè può mettersi $-p$ in luogo di p: quindi insieme colla (d) sta quest'altra

$$(e)\qquad\int_0^\infty dx\cdot\frac{x\sin.rx}{(m^2+x^2)(1+2p\cos.rx+p^2)}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{e^{mr}+p}\,.$$

Il sig. Legendre somma le due (d), (e) ed osservata l'identità

$$\frac{1}{1-2p\cos.rx+p^2}+\frac{1}{1+2p\cos.rx+p^2}=\frac{2(1+p^2)}{1-2p^2\cos.2rx+p^4}$$

(*) *Exercices de Calcul Intégral.* IVme P., num. 131.

deduce, mettendo p per p^2,

$$(f)\qquad \int_0^\infty dx\cdot\frac{x\sin.rx}{(m^2+x^2)(1-2p\cos.2rx+p^2)}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+p}\cdot\frac{e^{mr}}{e^{2mr}-p}.$$

75. Passiamo a qualche caso d'integrazione per le costanti; facendo attenzione al modo con cui queste integrazioni si definiscono: senza di che esse non sarebbero utili.

Propongasi l'equazione che subito si verifica

$$\int_0^1 dx\cdot x^{m-1}=\frac{1}{m}.$$

Integrando per la costante m otteniamo

$$\int_0^1 dx\cdot\frac{x^{m-1}}{\log.x}=\log.m+C$$

dove C è la costante arbitraria indipendente da m: essa per $m=1$ deve in forza della trovata equazione eguagliare l'integrale $\int_0^\infty dx\cdot\frac{1}{\log.x}$; dunque lo eguaglierà sempre, e ricaverassi

$$(g)\qquad \int_0^1 dx\cdot\frac{x^{m-1}-1}{\log.x}=\log.m.$$

Prendasi la seconda delle formole (6) del num. 29 e integrata per a ci presenterà

$$(h)\qquad \int_0^\infty dx\cdot e^{-bx}\frac{\sin.ax}{x}=\text{Arc. tan. }\frac{a}{b}$$

dove non ho aggiunta costante perchè aggiungendola si trova zero in conseguenza della stessa equazione ove facciasi $a=0$.

Prendasi la prima delle formole (6) dello stesso numero e integrando per a, avremo

$$\int_0^\infty dx\cdot e^{-bx}\frac{\cos.ax}{x}=-\frac{1}{2}\log.(a^2+b^2)+C$$

la C per ipotesi non contiene a, dunque mettendo c per a sarà

$$\int_0^\infty dx\cdot e^{-bx}\frac{\cos.cx}{x}=-\frac{1}{2}\log.(c^2+b^2)+C$$

in cui la C è la stessa: pertanto le due equazioni sottratte l'una dall'altra somministrano il risultato

$$(i)\qquad \int_0^\infty dx\cdot e^{-bx}\cdot\frac{\cos.ax-\cos.cx}{x}=\frac{1}{2}\log.\left(\frac{b^2+c^2}{b^2+a^2}\right).$$

76. Si usa in varii casi l'antecedente metodo d'introdurre le costanti arbitrarie e poi determinarle dietro valori particolari della costante per cui si è

integrato: il più sovente però le costanti arbitrarie non si mettono, esprimendo a dirittura definita fra due limiti l'integrazione per la costante. Compare allora nel primo membro un integrale duplicato che tante volte non si scrive ponendo subito per la formola integrale che è sottoposta ad altro segno integrale una nota espressione equivalente. Faremo uso nel numero seguente di tale abbreviazione, che suppone un passaggio fatto a mente: e terremo in questo la via lunga.

Riprendasi l'antecedente formola (d) e s'integri per la costante r fra *zero*, r, avremo

$$\int_0^\infty dx\cdot\frac{x}{m^2+x^2}\int_0^r dr\cdot\frac{\sin.rx}{1-2p\cos.rx+p^2}=\frac{\pi}{2}\int_0^r dr\cdot\frac{1}{e^{mr}-p}\,.$$

I due integrali per r si trovano passando per gl'indefiniti giacchè

$$\int dr\cdot\frac{\sin.rx}{1-2p\cos.rx+p^2}=\frac{1}{2px}\log.(1-2p\cos.rx+p^2);\quad \int dr\cdot\frac{1}{e^{mr}-p}=\frac{1}{mp}\log.(1-pe^{-mr})$$

epperò nella formola precedente bisognerà sostituire in luogo dei due integrali per r rispettivamente i binomj

$$\frac{1}{2px}\log.(1-2p\cos.rx+p^2)-\frac{1}{2px}\log.(1-p)^2\,;\quad \frac{1}{mp}\log.(1-pe^{-mr})-\frac{1}{mp}\log.(1-p)\,.$$

Osservando allora che risultano identici i secondi termini nei due membri per essere $\int_0^\infty dx\cdot\frac{1}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2m}$, come provasi passando pel noto integrale arco di tangente, la precedente sostituzione lascia la formola

$$(k)\qquad \int_0^\infty dx\cdot\frac{\log.(1-2p\cos.rx+p^2)}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{m}\log.(1-pe^{-mr})\,.$$

Ponendo in essa (come nella (d) per passare alla (e)) $-p$ per p, si ha pure

$$(l)\qquad \int_0^\infty dx\cdot\frac{\log.(1+2p\cos.rx+p^2)}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{m}\log.(1+pe^{-mr})\,.$$

Facciasi in queste $p=1$, indi mettansi per $2-2\cos.rx$, $2+2\cos.rx$ le espressioni equivalenti $4\left(\sin.\frac{1}{2}rx\right)^2$, $4\left(\cos.\frac{1}{2}rx\right)^2$: e alcune altre facili riduzioni ci condurranno alle due

$$(m)\qquad \begin{cases}\displaystyle\int_0^\infty dx\cdot\frac{\log.\left(\sin.\frac{1}{2}rx\right)}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2m}\log.\left(\frac{1-e^{-mr}}{2}\right)\\[2ex] \displaystyle\int_0^\infty dx\cdot\frac{\log.\left(\cos.\frac{1}{2}rx\right)}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2m}\log.\left(\frac{1+e^{-mr}}{2}\right)\end{cases}$$

la di cui sottrazione somministra l'altra

$$(n)\qquad \int_0^\infty dx\cdot\frac{\log.\left(\tan.\frac{1}{2}rx\right)}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2m}\log.\left(\frac{e^{mr}-1}{e^{mr}+1}\right).$$

Le tre formole ultimamente trovate si derivino per la costante r, indi, fatte tutte le riduzioni, si ponga nelle sole due prime $2r$ in luogo di r: sortiranno le tre osservabilissime dovute al sig. Bidone (*)

$$\int_0^\infty dx\cdot\frac{x\cot.rx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{e^{2mr}-1}$$

$$(o)\qquad \int_0^\infty dx\cdot\frac{x\tan.rx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{e^{2mr}+1}$$

$$\int_0^\infty dx\cdot\frac{x\operatorname{cosec}.rx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{e^{mr}-e^{-mr}}.$$

Se nella seconda si fa $m=0$ viene la

$$(p)\qquad \int_0^\infty dx\cdot\frac{\tan.rx}{x}=\frac{\pi}{2}$$

rimarcabile per la proprietà di aver lo stesso valore come quando sotto il segno integrale vi è il seno in luogo della tangente (num. 32 formola (λ)) (**).

Il sig. Legendre nel luogo riferito al num. 73 deriva le due formole (k), (l) per l'altra costante p e così ne cava due altre eleganti che il lettore si formerà agevolmente.

77. Il principio d'integrazione per le costanti diventa assai più fecondo di conseguenze mediante l'osservazione che prima d'integrare si possono moltiplicare i due membri dell'equazione per una funzione qual più piace di quella costante rispetto alla quale si integra, funzione che nel primo membro passa sotto il segno integrale. Vedonsi allora alcuni integrali definiti dipendere da altri con cui non potevasi nemmeno sospettare che avessero relazione, e si ottengono notabilissimi risultati. Troverò con questo artificio due formole che furono dal Fourier (***) dimostrate assai elegantemente ma coll'uso dell'immaginario nei limiti, il quale è un mezzo che lascia, almeno per alcuni, qualche incertezza.

Se nella formola (6) del num. 64 poniamo $x=z\sqrt{u}$, essendo u una costante, deduciamo

$$\int_0^\infty dz\cdot e^{-uz^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{u}}.$$

(*) *Mémoire sur diverses intégrales définies*, Turin 1812, pag. 104.

(**) *Journal Polyt.* Cah. XVIII, pag. 337.

(***) *Théorie de la Chaleur*, pag. 532.

Si moltiplichi questa equazione una volta per $\cos.u$, e un'altra volta per $\sin.u$: si formeranno le due

$$\int_0^\infty dz \cdot e^{-uz^2} \cos. u = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\cos. u}{\sqrt{u}} \;;\; \int_0^\infty dz \cdot e^{-uz^2} \sin. u = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\sin. u}{\sqrt{u}}$$

le quali si integreranno per u fra i limiti $u=0$, $u=\infty$. Rammentate le formole (6) del num. 29 avremo (rileggasi il principio del numero precedente)

$$(A) \quad \int_0^\infty dz \cdot \frac{z^2}{1+z^4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^\infty du \cdot \frac{\cos. u}{\sqrt{u}} \;;\; \int_0^\infty dz \cdot \frac{1}{1+z^4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^\infty du \cdot \frac{\sin. u}{\sqrt{u}}.$$

Qui gl'integrali definiti dei primi membri possono aversi passando per gl'indefiniti. Lascio all'esercizio degli studiosi il trovare *a priori* e mi accontenterò di dire che si dimostrano subito *a posteriori* le formole

$$\int dz \cdot \frac{z^2}{1+z^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \text{Arc. tan.}(z\sqrt{2}+1) + \text{Arc. tan.}(z\sqrt{2}-1) \right\}$$
$$- \frac{1}{4\sqrt{2}} \log. \left(\frac{1+z\sqrt{2}+z^2}{1-z\sqrt{2}+z^2} \right)$$
$$\int dz \cdot \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \text{Arc. tan.}(z\sqrt{2}+1) + \text{Arc. tan.}(z\sqrt{2}-1) \right\}$$
$$+ \frac{1}{4\sqrt{2}} \log. \left(\frac{1+z\sqrt{2}+z^2}{1-z\sqrt{2}+z^2} \right).$$

In queste la parte logaritmica si annulla tanto per $z=0$, quanto per $z=\infty$, e la parte circolare è zero per $z=0$, e $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ per $z=\infty$, ritenendo $\frac{\pi}{2}$ l'arco la cui tangente è infinita. Pertanto

$$\int_0^\infty dz \cdot \frac{z^2}{1+z^4} = \int_0^\infty dz \cdot \frac{1}{1+z^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

e quindi dalle (A)

$$\int_0^\infty du \cdot \frac{\cos. u}{\sqrt{u}} = \int_0^\infty du \cdot \frac{\sin. u}{\sqrt{u}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

le quali, posta $u=x^2$, si trasformano subito nelle celebri

$$(q) \qquad \int_0^\infty dx \cdot \cos. x^2 = \int_0^\infty dx \cdot \sin. x^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

78. Fourier ha dedotto (*) dalle precedenti (q) due altre formole che riescono utilissime nelle applicazioni a' problemi fisici: ecco in qual modo. Le (q) danno subito (vedi num. 22) le seguenti

(*) *Théorie de la Chaleur*, pag. 531 et suiv.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \cos. x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \sin. x^2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,;$$

pongasi ora $x = y + b$, dove b è una costante qualunque: i limiti rimangono i medesimi, ed essendo per isvolgimento di notissime formole

$$\cos.(y^2 + 2by + b^2) = \cos. y^2 \cos. 2by \cos. b^2 - \sin. y^2 \sin. 2by \cos. b^2$$
$$- \sin. y^2 \cos. 2by \sin. b^2 - \cos. y^2 \sin. 2by \sin. b^2$$
$$\sin.(y^2 + 2by + b^2) = \sin. y^2 \cos. 2by \cos. b^2 + \cos. y^2 \sin. 2by \cos. b^2$$
$$+ \cos. y^2 \cos. 2by \sin. b^2 - \sin. y^2 \sin. 2by \sin. b^2$$

le precedenti equazioni danno

$$\cos. b^2 \int_{-\infty}^{\infty} dy \cdot \cos. y^2 \cos. 2by - \sin. b^2 \int_{-\infty}^{\infty} dy \cdot \sin. y^2 \cos. 2by = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\cos. b^2 \int_{-\infty}^{\infty} dy \cdot \sin. y^2 \cos. 2by + \sin. b^2 \int_{-\infty}^{\infty} dy \cdot \cos. y^2 \cos. 2by = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

avvertendo essere (num. 22 corollario 2.°)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \cdot \sin. y^2 \sin. 2by = \int_{-\infty}^{\infty} dy \cdot \cos. y^2 \sin. 2by = 0.$$

La risoluzione delle trovate equazioni, in cui i due integrali si considerano come due incognite, ci somministra

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \cdot \cos. y^2 \cos. 2by = \sqrt{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos. b^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin. b^2\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \cdot \sin. y^2 \cos. 2by = \sqrt{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos. b^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin. b^2\right).$$

Ora osserva l'insigne Geometra che mettendo opportunamente $\sin. \frac{\pi}{4}$, ovvero $\cos. \frac{\pi}{4}$ per $\frac{1}{\sqrt{2}}$, i secondi membri si riducono rispettivamente

$$\sqrt{\pi} \sin. \left(\frac{\pi}{4} + b^2\right)\;;\quad \sqrt{\pi} \sin. \left(\frac{\pi}{4} - b^2\right)$$

quindi facendo $y = x\sqrt{t}$, dove t figura costante, e poi $2b\sqrt{t} = c$, si hanno

$$(r)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \cos. t x^2 \cos. cx = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sin. \frac{1}{4}\left(\pi + \frac{c^2}{t}\right) \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \sin. t x^2 \cos. cx = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sin. \frac{1}{4}\left(\pi - \frac{c^2}{t}\right). \end{cases}$$

79. Se al num. 77 invece di appoggiarci alla formola (δ) del num. 64 avessimo presa a fondamento la (η) del num. 66, moltiplicando similmente per

cos.u, sin.u, e cambiando a in u ci saremmo formate le due

$$\int_0^\infty dx\cdot\cos.bx\cdot e^{-ux^2}\cos.u=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\frac{e^{-\frac{b^2}{4u}}\cos.u}{\sqrt{u}}$$

$$\int_0^\infty dx\cdot\cos.bx\cdot e^{-ux^2}\sin.u=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\frac{e^{-\frac{b^2}{4u}}\sin.u}{\sqrt{u}}$$

dalle quali possono cavarsi due formole assai eleganti che contengono le (q) come casi particolari. S'integrino le precedenti per u fra i limiti *zero*, ∞, e a motivo delle (6) del num. 29 dedurremo prontamente

$$(s)\qquad \int_0^\infty du\cdot\frac{e^{-\frac{b^2}{4u}}\cos.u}{\sqrt{u}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dx\cdot\frac{x^2\cos.bx}{1+x^4}$$

$$\int_0^\infty du\cdot\frac{e^{-\frac{b^2}{4u}}\sin.u}{\sqrt{u}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dx\cdot\frac{\cos.bx}{1+x^4}.$$

Qui i secondi membri hanno valori assegnabili, che si ottengono da un'analisi generale del sig. Poisson (*): ma non potendo questa per la sua lunghezza aver luogo nel presente trattato, mi è forza cercarli altrimenti.

Partasi dall' equazione identica

$$\frac{1}{1+x^4}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{x+\sqrt{2}}{1+x\sqrt{2}+x^2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{x-\sqrt{2}}{1-x\sqrt{2}+x^2}$$

e potrassi scrivere

$$(*)\qquad \int_0^\infty dx\cdot\frac{\cos.bx}{1+x^4}=A-B$$

essendo

$$A=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^\infty dx\cdot\frac{(x+\sqrt{2})\cos.bx}{1+x\sqrt{2}+x^2}\;;\quad B=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^\infty dx\cdot\frac{(x-\sqrt{2})\cos.bx}{1-x\sqrt{2}+x^2}.$$

Avverto che per rendere le espressioni meno complicate metterò, ove mi torni comodo, r in luogo di $\frac{1}{\sqrt{2}}$, restituendo poi ad r il suo valore sul fine. Per trovare A pongo $x=y-\frac{1}{\sqrt{2}}$, d'onde $x+\sqrt{2}=y+r$; riuscendo quindi

$(x+\sqrt{2})\cos.bx=y\cos.by\cos.br+y\sin.by\sin.br+r\cos.by\cos.br+r\sin.by\sin.br$

ottengo dopo le riduzioni

(*) *Journal Polyt.* Cah XVI, pag. 225 et suiv.

$$A = \frac{\cos.br}{2\sqrt{2}}\int_r^\infty dy\cdot\frac{y\cos.by}{r^2+y^2} + \frac{\sin.br}{2\sqrt{2}}\int_r^\infty dy\cdot\frac{y\sin.by}{r^2+y^2}$$
$$+ \frac{\cos.br}{4}\int_r^\infty dy\cdot\frac{\cos.by}{r^2+y^2} + \frac{\sin.br}{4}\int_r^\infty dy\cdot\frac{\sin.by}{r^2+y^2}.$$

Similmente per trovare B pongo $x = y + \frac{1}{\sqrt{2}}$ d' onde $x - \sqrt{2} = y - r$. Qui ho

$(x-\sqrt{2})\cos.bx = y\cos.by\cos.br - y\sin.by\sin.br - r\cos.by\cos.br + r\sin.by\sin.br$

e in conseguenza

$$B = \frac{\cos.br}{2\sqrt{2}}\int_{-r}^\infty dy\cdot\frac{y\cos.by}{r^2+y^2} - \frac{\sin.br}{2\sqrt{2}}\int_{-r}^\infty dy\cdot\frac{y\sin.by}{r^2+y^2}$$
$$- \frac{\cos.br}{4}\int_{-r}^\infty dy\cdot\frac{\cos.by}{r^2+y^2} + \frac{\sin.br}{4}\int_{-r}^\infty dy\cdot\frac{\sin.by}{r^2+y^2}.$$

Scompongo nei quattro precedenti integrali il corso della variabile in due parti, delle quali la prima da $-r$ a $+r$ e la seconda da r a ∞; osservando poi (num. 22) che si hanno

$$\int_{-r}^{r} dy\cdot\frac{y\cos.by}{r^2+y^2} = 0\ ; \quad \int_{-r}^{r} dy\cdot\frac{y\sin.by}{r^2+y^2} = 2\int_0^r dy\cdot\frac{y\sin.by}{r^2+y^2}$$
$$\int_{-r}^{r} dy\cdot\frac{\cos.by}{r^2+y^2} = 2\int_0^r dy\cdot\frac{\cos.by}{r^2+y^2}\ ; \quad \int_{-r}^{r} dy\cdot\frac{\sin.by}{r^2+y^2} = 0$$

vedo di poter dare a B la seguente espressione

$$B = \frac{\cos.br}{2\sqrt{2}}\int_r^\infty dy\cdot\frac{y\cos.by}{r^2+y^2} - \frac{\sin.br}{2\sqrt{2}}\left\{2\int_0^r dy\cdot\frac{y\sin.by}{r^2+y^2} + \int_r^\infty dy\cdot\frac{y\sin.by}{r^2+y^2}\right\}$$
$$- \frac{\cos.br}{4}\left\{2\int_0^r dy\cdot\frac{\cos.by}{r^2+y^2} + \int_r^\infty dy\cdot\frac{\cos.by}{r^2+y^2}\right\} + \frac{\sin.br}{4}\int_r^\infty dy\cdot\frac{\sin.by}{r^2+y^2}.$$

Con questa nella differenza $A-B$ si elidono quattro termini, e ricomponendo negli integrali restanti il corso spezzato da *zero* a r e da r a ∞ in un solo da *zero* a ∞, viene

$$A - B = \frac{\sin.br}{\sqrt{2}}\int_0^\infty dy\cdot\frac{y\sin.by}{r^2+y^2} + \frac{\cos.br}{2}\int_0^\infty dy\cdot\frac{\cos.by}{r^2+y^2}.$$

Siamo così arrivati a integrali noti (vedi num. 72, formole (a), (b)): mettansi i loro valori, e si dedurrà per la $(*)$

$$(t)\qquad \int_0^\infty dx\cdot\frac{\cos.bx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\sin.\frac{b}{\sqrt{2}} + \cos.\frac{b}{\sqrt{2}}\right)e^{-\frac{b}{\sqrt{2}}}.$$

Derivando ora per la costante b discende

$$(u) \qquad \int_0^\infty dx \cdot \frac{x \sin. bx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2} \cdot \sin. \frac{b}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{b}{\sqrt{2}}}$$

e derivaudo un'altra volta per b

$$(x) \qquad \int_0^\infty dx \cdot \frac{x^2 \cos. bx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left(\cos. \frac{b}{\sqrt{2}} - \sin. \frac{b}{\sqrt{2}}\right) e^{-\frac{b}{\sqrt{2}}}.$$

Per le (t), (x) le (s), ove facciasi $u = x^2$, $b = a\sqrt{2}$ diventano

$$(y) \qquad \begin{aligned} \int_0^\infty dx \cdot e^{-\frac{a^2}{2x^2}} \cos. x^2 &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(\cos. a - \sin. a)\, e^{-a} \\ \int_0^\infty dx \cdot e^{-\frac{a^2}{2x^2}} \sin. x^2 &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(\cos. a + \sin. a)\, e^{-a}. \end{aligned}$$

Si può in queste introdurre un'altra costante facendo come sul fine del numero 78: molte, e alcune nuove, sono le formole che facilmente se ne cavano derivando o integrando per le costanti.

80. Vedemmo come si deriva o si integra per costanti che nel ritrovamento dei valori delle formole integrali definite rimasero indeterminate: non potrebbero dunque servir di fondamento a ricerche di tal sorta formole integrali nelle quali le costanti non vi fossero, o fossero determinate. Or havvi un metodo col quale le costanti indeterminate s'introducono in formole integrali quando non ve ne siano, o si aumentano quando vi siano. Eccolo compendiato dietro gl'insegnamenti del degno Continuatore delle scoperte di Eulero (*).

Sia una formola $\int_0^\infty dx \cdot \phi(x)$ di cui conoscasi il valore, che chiamo A. Scompongo il corso della variabile in due parti delle quali la prima da *zero* a m, e la seconda da m a ∞; talchè

$$\int_0^m dx \cdot \phi(x) + \int_m^\infty dx \cdot \phi(x) = A.$$

In questa trasformo il primo integrale ponendo $x = mz$, e il secondo ponendo $x = \frac{m}{z}$: dietro facili riduzioni nelle quali debbo supporre che il mio lettore non abbia più di presente alcuna difficoltà: trovo

$$(z) \qquad \int_0^1 dx \, \left\{\phi(mx) + \frac{1}{x^2}\phi\left(\frac{m}{x}\right)\right\} = \frac{A}{m}.$$

Così la formola proposta me ne ha somministrata un'altra nella quale havvi l'indeterminata m per cui si può derivare quante volte piace ottenendo le

$$\int_0^1 dx \cdot \left\{x\phi'(mx) + \frac{1}{x^3}\phi'\left(\frac{m}{x}\right)\right\} = -\frac{A}{m^2}\ ;\ \text{ecc.}$$

(*) *Exercices de Calcul Intégrale.* IVme P., num. 155.

Viceversa da un integrale definito fra *zero*, 1 se ne può dedurre un altro definito fra *zero*, ∞ avente una costante indeterminata.

Sia
$$\int_0^1 dx\cdot\psi(x)=B\;;$$

facciasi $x=\frac{nz}{1+nz}$ dove n è una costante indeterminata, e troverassi

$$(w)\qquad \int_0^\infty dx\cdot\frac{1}{(1+nx)^2}\cdot\psi\left(\frac{nx}{1+nx}\right)=\frac{B}{n}$$

da cui, come dalla (z) possono dedursi altre formole derivando per n.

Non pongo esempj perchè lo studioso può formarseli a piacere: piuttosto avendo mostrato come da una sola formola integrale di valor noto se ne possono dedurre altre infinite, chiuderò questo capo traducendo le parole colle quali il Legendre termina il paragrafo ultimamente citato della sua opera. « Vedesi quanto è feconda la teorica degli integrali definiti, ma la ricchezza di « questo ramo d'analisi, come quella di tutti gli altri, non tanto consiste nel « numero delle formole, quanto nella scelta di quelle che riuniscono l'eleganza « alla semplicità, sole qualità che possono renderle atte a numerose applica- « zioni. »

CAPO XI.

Dell'uso delle equazioni differenziali per la ricerca dei valori di alcuni integrali definiti.

81. Nel Capo precedente fu esaminato il principio di derivazione e integrazione per le costanti indeterminate nel caso in cui di una formola integrale definita è noto il valore: mostrerò in questo come esso vale molte volte per trovare lo stesso valore quando è incognito.

Chiamisi y il valore di una formola integrale definita ove entri una indeterminata a: può darsi che derivando per a, l'integrale dapprima incognito riducasi ad un altro che sappiasi assegnare: allora una successiva integrazione per la stessa costante conduce a trovare il valore di y cercato. Sia per esempio

$$(1)\qquad y=\int_0^\infty dx\cdot\frac{\sin.ax}{x(m^2+x^2)}$$

derivando per a si ottiene

$$\left(\frac{dy}{da}\right)=\int_0^\infty dx\cdot\frac{\cos.ax}{m^2+x^2}$$

dove il secondo membro è un integrale noto (num. 72 formola (a)): dunque

$$\left(\frac{dy}{da}\right)=\frac{\pi}{2m}e^{-ma}\,,$$

Integrando per a

$$y = -\frac{\pi}{2m^2} e^{-ma} + C.$$

La costante C si determina osservando dietro l'equazione di posizione (I) che y deve essere zero per $a = 0$, e si cava

$$C = \frac{\pi}{2m^2}.$$

Fatte le sostituzioni, la (I) diventa

$$(\alpha) \qquad \int_0^\infty dx \cdot \frac{\sin . a x}{x(m^2 + x^2)} = \frac{\pi}{2m^2}(1 - e^{-ma}).$$

Per un secondo esempio sia

$$(\text{II}) \qquad y = \int_0^1 dx \cdot \frac{(1 - x^{a-1})(1 - x^m)}{(x-1)\log . x}.$$

Si derivi per la costante a e avrassi

$$\left(\frac{dy}{da}\right) = \int_0^1 dx \cdot \frac{x^{a-1}(1 - x^m)}{1 - x}.$$

Il secondo membro di questa equazione presenta una formola di cui può assegnarsi il valore per mezzo dell'equazione (μ) del num. 68 ove facciasi $p = a$, $r = a + m$. Esso risulta $Z'(a+m) - Z'(a)$ ossia

$$\left(\frac{d \cdot \log . \Gamma(a+m)}{da}\right) - \left(\frac{d \cdot \log . \Gamma(a)}{da}\right) = \left(\frac{d \cdot \log . \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)}}{da}\right).$$

Ritenuta pertanto $\left(\frac{dy}{da}\right)$ eguale a tale ultima espressione, si ha integrando per a

$$y = \log . \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)} + C.$$

Si determina la costante C riflettendo che per la prima equazione (II) y deve essere zero quando $a = 1$, e si deduce $C = -\log . \Gamma(1+m)$. Eseguite le sostituzioni, la (II) diventa

$$(\beta) \qquad \int_0^1 dx \cdot \frac{(1 - x^{a-1})(1 - x^m)}{(x-1)\log . x} = \log . \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)\Gamma(1+m)}.$$

Pongasi in questa $a + n$ per a; avremo

$$(\gamma) \qquad \int_0^1 dx \cdot \frac{(1 - x^{a+n-1})(1 - x^m)}{(x-1)\log . x} = \log . \frac{\Gamma(a+m+n)}{\Gamma(a+n)\Gamma(1+m)}$$

e sottraendovi l'antecedente risulterà

$$(\partial)\qquad \int_0^1 dx\cdot\frac{x^{a-1}(1-x^m)(1-x^n)}{(x-1)\log.x}=\log.\frac{\Gamma(a)\Gamma(a+m+n)}{\Gamma(a+m)\Gamma(a+n)}\,;$$

formola celebre di Eulero feconda di conseguenze (*).

82. Il più delle volte però non riuscirà $\left(\frac{dy}{da}\right)$ eguale ad una funzione nota di a: ma potrà accadere che si renda eguale ad una espressione che contiene la stessa y; allora si ha un' equazione differenziale spesso integrabile coi metodi noti: il che succedendo si ottiene il valore cercato.

Comincerò con questo mezzo a confermare un risultato già trovato (num. 66 formola (n)). Pongasi

$$(A)\qquad y=\int_0^\infty dx\cdot e^{-ax^2}\cos.bx\,;$$

si consideri y funzione di b e derivando per b avrassi

$$\left(\frac{dy}{db}\right)=-\int_0^\infty dx\cdot x\,e^{-ax^2}\sin.bx\,.$$

Stando agli integrali indefiniti e integrando a parti si trova subito

$$\int dx\cdot x\,e^{-ax^2}\sin.bx=-\frac{e^{-ax^2}\sin.bx}{2a}+\frac{b}{2a}\int dx\cdot e^{-ax^2}\cos.bx\,;$$

si passi ai limiti e osservando che la quantità $\frac{-e^{-ax^2}\sin.bx}{2a}$, quando a è positiva, svanisce tanto per $x=0$ quanto per $x=\infty$, conchiuderassi

$$\int_0^\infty dx\cdot xe^{-ax^2}\sin.bx=\frac{b}{2a}\int_0^\infty dx\cdot e^{-ax^2}\cos.bx=\frac{by}{2a}\,.$$

Così si forma l'equazione differenziale

$$\left(\frac{dy}{db}\right)+\frac{by}{2a}=0$$

la quale s'integra facilmente coi metodi noti, e se ne deduce

$$(B)\qquad y=Ce^{-\frac{b^2}{4a}}$$

dove C è la costante introdotta dall'integrazione. Per determinarla bisogna appoggiarsi ad altra formola nota corrispondente ad un valore particolare della costante indeterminata: e questo è l'andamento ordinario negli altri casi simili. Pel valore particolare di $b=0$ abbiamo dalla formola $(\mathscr{E})$ del num. 64, come facemmo sul principio del num. 77, $y_0=\int_0^\infty dx\cdot e^{-ax^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$, (avendo

(*) Legendre. *Exercices de Calcul Intégral.* IVme P., num. 111.

segnato y_0 il valore che prende y quando $b=0$), e per l'ultima equazione si vedrà dover questo essere il valore di C. Sostituendolo nella precedente (B), e mettendo nella stessa per y il suo valor di posizione stabilito colla (A) vedremo riprodursi la formola del numero citato.

83. Passiamo collo stesso metodo alla ricerca di un integrale di valore incognito. Si metta

$$y=\int_0^\infty dx\cdot e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}$$

e considerando y funzione di a dedurremo

$$\left(\frac{dy}{da}\right)=-2a\int_0^\infty dx\cdot\frac{1}{x^2}e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}.$$

Ora si faccia $x=\frac{a}{y}$, da cui $y=\frac{a}{x}$, ed essendo a quantità positiva, vedrassi che ai limiti $x=0$, $x=\infty$ corrispondono i limiti $y=\infty$, $y=0$; eseguita poi la trasformazione coi teoremi dei numeri 10, 12, si trova

$$\int_0^\infty dx\cdot\frac{1}{x^2}e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}=\frac{1}{a}\int_0^\infty dy\cdot e^{-y^2-\frac{a^2}{y^2}}=\frac{y}{a}$$

quindi l'ultima equazione differenziale riducesi

$$\left(\frac{dy}{da}\right)+2y=0\;;$$

l'integrale della quale è

$$y=Ce^{-2a}$$

essendo C la costante arbitraria indipendente da a. Per determinarla si osservi che il valore di C è quello di y per $a=0$, e che un tal valore per la formola (δ) del num. 64 è $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$: si conchiude

$$(\varepsilon)\qquad\int_0^\infty dx\cdot e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot e^{-2a}$$

formola originariamente data da Laplace: il precedente metodo per trovarla è dovuto al sig. Poisson (*).

84. Recherò ora un'analisi de' signori Legendre e Poisson (**) in cui si discende ad una equazione differenziale di second'ordine, e con essa intenderò di soddisfare in parte a un impegno assunto al num. 72.

Sia $$y=\int_0^\infty dx\cdot\frac{\cos.rx}{m^2+x^2}.$$

(*) *Journal Polyt.* Cah. XVI, pag. 235.

(**) *Exercices de Calcul Intégral.* IIIme P., pag. 357.

Derivando due volte per r si ha

$$\left(\frac{d^2y}{dr^2}\right) = -\int_0^\infty dx \cdot \frac{x^2 \cos. rx}{m^2 + x^2}$$

e ponendo $m^2 + x^2 - m^2$ in luogo di x^2

$$\left(\frac{d^2y}{dr^2}\right) = -\int_0^\infty dx \cdot \cos. rx + m^2 \int_0^\infty dx \cdot \frac{\cos. rx}{m^2 + x^2}\,.$$

Dalla formola (λ) del num. 32 derivata per r si ha

$$(\vartheta) \qquad \int_0^\infty dx \cdot \cos. rx = 0$$

risultato che sarà confermato in questo stesso Capo e su cui tornerò in seguito a fare qualche riflessione. Pertanto l'ultima equazione diventa

$$\left(\frac{d^2y}{dr^2}\right) - m^2 y = 0$$

che ha per integrale completo $y = Ae^{mr} + Be^{-mr}$ quindi

$$\text{(I)} \qquad \int_0^\infty dx \cdot \frac{\cos. rx}{m^2 + x^2} = Ae^{mr} + Be^{-mr}$$

essendo A, B due costanti indipendenti da r che debbono essere determinate dietro l'esame di alcuni valori particolari di r. Ciò fecesi dai sullodati geometri in maniera che conteneva un ragionamento alquanto indiretto; il sig. Lacroix (*) lo schivò col seguente artificio. Si derivi la (I) per r: viene

$$\text{(II)} \qquad \int_0^\infty dx \cdot \frac{x \sin. rx}{m^2 + x^2} = Bme^{-mr} - Ame^{mr}\,;$$

ora pongasi $rx = z$, e l'integrale del primo membro si trasformerà in $\int_0^\infty dz \cdot \frac{z \sin. z}{m^2 r^2 + z^2}$; quindi l'ultima equazione può scriversi

$$\text{(III)} \qquad \int_0^\infty dx \cdot \frac{x \sin. x}{m^2 r^2 + x^2} = Bme^{-mr} - Ame^{mr}\,.$$

Si faccia adesso $r = 0$: il primo membro della (I) diverrà $\frac{\pi}{2m}$, chè tale è il valore di $\int_0^\infty dx \cdot \frac{1}{m^2 + x^2}$, come dicemmo anche al num. 76, e il primo della (III) per la ($\varkappa$) del num. 32 diverrà $\frac{\pi}{2}$. Le due equazioni risultanti

$$\frac{\pi}{2m} = A + B\;; \quad \frac{\pi}{2} = Bm - Am$$

(*) *Traité du Calcul.* Tom. III, pag. 493. Note.

danno $A=0$, $B=\frac{\pi}{2m}$: valori che sostituiti nelle (I), (II) riproducono le formole (a), (b) del num. 72.

Prevedo che lo studioso avrà qui una difficoltà circa il fare $r=0$ nella (III) e non piuttosto nella (II): ma per ora non gli posso rispondere.

85. L'esposto metodo può essere generalizzato ed esteso al caso in cui la equazione differenziale lineare di secondo ordine ha nel secondo membro una funzione qualunque della variabile che figura da costante nell' integrale. Sia

$$(C) \qquad y=\int_{\alpha}^{6} dx \cdot \frac{k_x \cos. a h_x}{c^2+h_x^2}$$

dove k_x, h_x esprimono funzioni qualsivogliono della x, e α, 6 due limiti qualunque. Avremo

$$\left(\frac{d^2 y}{d a^2}\right)=-\int_{\alpha}^{6} dx \cdot \frac{k_x h_x^2 \cos. a h_x}{c^2+h_x^2}=-\int_{\alpha}^{6} dx \cdot k_x \cos. a h_x + c^2 y$$

e se facciamo

$$(D) \qquad \int_{\alpha}^{6} dx \cdot k_x \cos. a h_x = -\phi(a)$$

ci risulta l'equazione differenziale

$$\left(\frac{d^2 y}{d a^2}\right)-c^2 y=\phi(a)$$

il cui integrale facilmente trovabile mediante la bellissima formola generale dovuta originariamente a Brunacci (*) può col mezzo di una integrazione a parti mettersi sotto la forma

$$(E) \qquad y=\frac{1}{2c}e^{ca}\int da \cdot e^{-ca}\phi(a)-\frac{1}{2c}e^{-ca}\int da \cdot e^{ca}\phi(a).$$

Se avessimo posto

$$(F) \qquad z=\int_{\alpha}^{6} dx \cdot \frac{k_x \sin. a h_x}{c^2+h_x^2}$$

$$(G) \qquad \int_{\alpha}^{6} dx \cdot k_x \sin. a h_x = -\psi(a)$$

avremmo trovato collo stesso andamento

$$(H) \qquad z=\frac{1}{2c}e^{ca}\int da \cdot e^{-ca}\psi(a)-\frac{1}{2c}e^{-ca}\int da \cdot e^{ca}\psi(a).$$

Ben molte sono le applicazioni che possono farsi delle precedenti espressioni generali: ne vedremo una interessante, ma mi è forza differirla, perchè debbo in essa far uso di formole non per anco dimostrate.

(*) *Calcolo integrale delle equazioni lineari.* 1798. Cap. II, num. 5, ovvero Bordoni. *Lezioni di Calcolo Sublime.* Tom. II, pag. 79.

86. Se nella precedente (C) la quantità c^2 del denominatore fosse stata negativa, si avesse cioè posto

$$(L) \qquad y = \int_a^6 dx \cdot \frac{k_x \cos.a h_x}{h_x^2 - c^2}$$

ritenuta la (D), saremmo arrivati all'equazione differenziale

$$(M) \qquad \left(\frac{d^2 y}{d a^2}\right) + c^2 y = \phi(a).$$

Questa è facilmente integrabile alla maniera seguente. Si osservi che il suo primo membro può mettersi sotto l'una o l'altra delle due forme

$$\frac{1}{\sin.ca}\left(\sin.^2 ca \left(\frac{y}{\sin.ca}\right)'\right)' \; ; \qquad \frac{1}{\cos.ca}\left(\cos.^2 ca \left(\frac{y}{\cos.ca}\right)'\right)'$$

significando cogli apici le derivate per a. Quindi subito

$$y = \sin.ca \int da \cdot \frac{1}{\sin.^2 ca} \int da \cdot \sin.ca\,\phi(a)$$

ovvero $$y = \cos.ca \int da \cdot \frac{1}{\cos.^2 ca} \int da \cdot \cos.ca\,\phi(a).$$

Entrambe le quali, integrando a parti, per essere

$$\int da \cdot \frac{1}{\sin.^2 ca} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\cos.ca}{\sin.ca} \; ; \qquad \int da \cdot \frac{1}{\cos.^2 ca} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\sin.ca}{\cos.ca}$$

conducono alla medesima espressione

$$(N) \qquad y = \frac{1}{c} \sin.ca \int da \cdot \cos.ca\,\phi(a) - \frac{1}{c} \cos.ca \int da \cdot \sin.ca\,\phi(a).$$

Per una delle più facili applicazioni sia $h_x = x$, $k_x = 1$, $a = 0$, $6 = \infty$. Avremo dalla (D), e dalla precedente $(\mathfrak{I})$ $\phi(a) = 0$; quindi nella (N) i due integrali sono semplicemente due costanti, e si ha per essa

$$\int_0^\infty dx \cdot \frac{\cos.ax}{x^2 - c^2} = A \cos.ca + B \sin.ca$$

dove A, B sono due costanti indipendenti da a che restano a determinarsi.

Sia $$(\iota) \qquad I = \int_0^\infty dx \cdot \frac{1}{x^2 - c^2}$$

e vedremo più tardi che il vero valore di quest'I è soggetto a controversia; caveremo per $a = 0$, $A = I$. In seguito collo stesso artificio del sig. Lacroix riferito al num. 84 troveremo $B = -\frac{\pi}{2c}$: epperò le formole

$$(x)\quad \begin{aligned}\int_0^\infty dx\cdot\frac{\cos.ax}{x^2-c^2}&=-\frac{\pi}{2c}\sin.ca+I\cos.ca\\ \int_0^\infty dx\cdot\frac{x\sin.ax}{x^2-c^2}&=\frac{\pi}{2}\cos.ca+cI\sin.ca\,.\end{aligned}$$

Avverto che non colla sola posizione (L) ma con parecchie altre si arriva a trovare una equazione differenziale della forma (M), e quindi riesce applicabile l'integrale (N).

87. Oltre le equazioni differenziali ordinarie si possono adoperare per l'oggetto che c'interessa anche le equazioni a differenze parziali. Il sig. Paoli (*) è, per quanto io sappia, il primo che abbia insegnato questo mezzo onde cercare i valori degl'integrali definiti; egli ne usò per dimostrare alcune formole già note e da lui stesso antecedentemente confermate mediante altra sua elegantissima analisi: quindi si limitò a dire che il metodo può essere utile in varii casi. Io tenterò di esporlo in maggiore generalità, giacchè sembrami di vedervi un principio assai fecondo.

Sia
$$((1))\qquad y=\int_\alpha^\beta dx\cdot e^{-bh_x}\cos.ah_x\cdot k_x$$

dove α, β sono limiti qualunque; a, b due costanti indeterminate; h_x, k_x due funzioni qualsivogliono della x. Abbiamo

$$\left(\frac{d^2y}{da^2}\right)=-\int_\alpha^\beta dx\cdot e^{-bh_x}\cos.ah_x\cdot h_x^2k_x$$
$$\left(\frac{d^2y}{db^2}\right)=\int_\alpha^\beta dx\cdot e^{-bh_x}\cos.ah_x\cdot h_x^2k_x$$

le quali sommate somministrano

$$((2))\qquad \left(\frac{d^2y}{da^2}\right)+\left(\frac{d^2y}{db^2}\right)=0$$

di cui è notissimo l'integral generale

$$((3))\qquad y=\psi(b+a\sqrt{-1})+\phi(b-a\sqrt{-1})$$

esprimendo ψ, ϕ due forme di funzioni arbitrarie.
La determinazione di dette funzioni arbitrarie si farà nei diversi casi il più sovente dietro valori particolari di y, e di $\left(\frac{dy}{da}\right)$ desunti dalla ((1)).

Se invece della ((1)) avessimo assunta la

$$((4))\qquad z=\int_\alpha^\beta dx\cdot e^{-bh_x}\sin.ah_x\cdot k_x$$

saremmo egualmente giunti alle

(*) Memorie della Società Italiana. Tom. XX. pag. 179.

$$((5)) \qquad \left(\frac{d^2 z}{d a^2}\right) + \left(\frac{d^2 z}{d b^2}\right) = 0$$

$$((6)) \qquad z = \psi(b + a\sqrt{-1}) + \phi(b - a\sqrt{-1})$$

dipendendo la determinazione delle funzioni arbitrarie nella ((6)) dalla ((4)) come quella delle funzioni arbitrarie nella ((3)) dalla ((1)).

88. Siano per un esempio $a=0$, $\beta=\infty$, $h_x=x^m$, $k_x=x^{n-1}$: la ((1)) diverrà

$$((7)) \qquad y = \int_0^\infty dx \cdot e^{-bx^m} \cos . a x^m \cdot x^{n-1}$$

da cui

$$((8)) \qquad \left(\frac{dy}{da}\right) = -\int_0^\infty dx \cdot e^{-bx^m} \sin . a x^m \cdot x^{m+n-1} .$$

Segniamo con y_0, $\left(\frac{dy}{da}\right)_0$ i valori particolari di y e $\left(\frac{dy}{da}\right)$ per $a=0$: avremo dalla ((7))

$$y_0 = \int_0^\infty dx \cdot e^{-bx^m} \cdot x^{n-1} = \frac{1}{m b^{\frac{n}{m}}} \Gamma\left(\frac{n}{m}\right)$$

valore quest'ultimo cavato dalla (α) del num. 64. Avremo poi evidentemente dalla ((8))

$$\left(\frac{dy}{da}\right)_0 = 0 .$$

Per un altro verso la ((?)) ci dà

$$y_0 = \psi(b) + \phi(b) \; ; \quad \left(\frac{dy}{da}\right)_0 = \psi'(b)\sqrt{-1} - \phi'(b)\sqrt{-1} .$$

Dunque la determinazione delle funzioni arbitrarie dipenderà dalle due equazioni

$$\psi(b) + \phi(b) = \frac{1}{m b^{\frac{n}{m}}} \Gamma\left(\frac{n}{m}\right)$$

$$\psi'(b) - \phi'(b) = 0 .$$

La seconda somministra $\psi(b) - \phi(b) = c$ costante indipendente da b: quindi sommando e sottraendo

$$\psi(b) = \frac{1}{2 m b^{\frac{n}{m}}} \Gamma\left(\frac{n}{m}\right) + \frac{1}{2} c$$

$$\phi(b) = \frac{1}{2 m b^{\frac{n}{m}}} \Gamma\left(\frac{n}{m}\right) - \frac{1}{2} c$$

e in conseguenza la ((3)) diventa

$$y=\frac{1}{2m}\,\Gamma\left(\frac{n}{m}\right)\left\{\frac{1}{(b+a\sqrt{-1})^{\frac{n}{m}}}+\frac{1}{(b-a\sqrt{-1})^{\frac{n}{m}}}\right\}.$$

Una facile riduzione e la sostituzione ad y dell'espressione ((7)) conduce alla formola rimarcabilissima

$$(\lambda)\qquad \int_0^\infty dx\cdot e^{-bx^m}\cos.ax^m\cdot x^{n-1}=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{m}\right)}{m(a^2+b^2)^{\frac{n}{m}}}\cdot\frac{(b+a\sqrt{-1})^{\frac{n}{m}}+(b-a\sqrt{-1})^{\frac{n}{m}}}{2}.$$

Tenute le stesse determinazioni particolari abbiamo dalla ((4))

$$((9))\qquad z=\int_0^\infty dx\cdot e^{-bx^m}\sin.a\,x^m\cdot x^{n-1}$$

da cui, e dalla (a) del num. 64

$$z_0=0\ ;\quad \left(\frac{dz}{da}\right)_0=\frac{1}{m\,b^{\frac{m+n}{m}}}\,\Gamma\left(\frac{m+n}{m}\right).$$

Quindi a determinare le funzioni arbitrarie nella ((6)) abbiamo in questo caso le due

$$\psi(b)+\phi(b)=0$$

$$\psi'(b)\sqrt{-1}-\phi'(b)\sqrt{-1}=\frac{1}{m\,b^{\frac{m+n}{m}}}\,\Gamma\left(\frac{m+n}{m}\right).$$

Iutegrando quest'ultima e rissovenendoci (num. 52) essere

$$\Gamma\left(\frac{m+n}{m}\right)=\Gamma\left(\frac{n}{m}+\ \right)=\frac{n}{m}\,\Gamma\left(\frac{n}{m}\right),$$

otteniamo con qualche riduzione

$$\psi(b)-\phi(b)=-\frac{1}{m}\Gamma\left(\frac{n}{m}\right)\cdot\frac{1}{b^{\frac{n}{m}}\sqrt{-1}}+c$$

e in seguito a motivo dell'antecedente

$$\psi(b)=-\frac{1}{m}\Gamma\left(\frac{n}{m}\right)\cdot\frac{1}{2b^{\frac{n}{m}}\sqrt{-1}}+\frac{1}{2}c$$

$$\phi(b)=\ \ \frac{1}{m}\Gamma\left(\frac{n}{m}\right)\cdot\frac{1}{2b^{\frac{n}{m}}\sqrt{-1}}-\frac{1}{2}c.$$

Richiamata la ((6)) in cui ora sono note le forme delle funzioni, e sostituita per z la sua espressione ((9)), giungiamo all'altra formola egualmente osservabile

$$(\mu)\qquad \int_0^\infty dx\cdot e^{-bx^m}\sin.ax^m\cdot x^{n-1}=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{m}\right)}{m(a^2+b^2)^{\frac{n}{m}}}\cdot\frac{(b+a\sqrt{-1})^{\frac{n}{m}}-(b-a\sqrt{-1})^{\frac{n}{m}}}{2\sqrt{-1}}.$$

89. È cosa facile eliminare nelle (λ), (μ) gl'immaginarii: ponendo

$$b = f \cos.g \; ; \quad a = f \sin.g$$

da cui inversamente

$$f = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \; ; \quad g = \text{Arc.tan.} \frac{a}{b} \; .$$

Fatte tutte le riduzioni suggerite dall'uso intermedio delle precedenti denominazioni, si trova che i secondi membri delle (λ), (μ) possono rispettivamente scriversi

$$\frac{\frac{1}{m}\Gamma\left(\frac{n}{m}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2m}}} \cdot \cos.\left[\frac{n}{m}\,\text{Arc.tan.}\frac{a}{b}\right] \; ; \qquad \frac{\frac{1}{m}\Gamma\left(\frac{n}{m}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2m}}} \cdot \sin.\left[\frac{n}{m}\,\text{Arc.tan.}\frac{a}{b}\right]$$

dove non vi sono immaginarii. Sembra però che per alcune applicazioni a casi particolari torni più comodo servirsi delle espressioni come stanno nel numero precedente: così quando $\frac{n}{m}$ è numero intero, sviluppando nelle (λ), (μ) i binomj immaginarj si vedono i secondi membri ridursi a espressioni finite e reali che sono funzioni razionali di a, b.

90. Le trovate formole contengono come casi particolari varie delle antecedentemente dimostrate: cito per un esempio quelle del num. 29. Notisi ch'esse formole generali a motivo dell'uso che si è fatto della (a) del num. 64 vanno soggette alle condizioni necessarie per la sussistenza di quest'ultima; quindi sarà n positiva maggiore di zero, e b positiva che può essere anche zero. Facciasi in esse $b = 0$, e usando pei secondi membri le espressioni del numero precedente avremo

$$(\nu) \qquad \begin{aligned} \int_0^\infty dx \cdot x^{n-1} \cos.ax^m &= \frac{1}{m}\,\Gamma\left(\frac{n}{m}\right) a^{-\frac{n}{m}} \cos.\frac{n\pi}{2m} \\ \int_0^\infty dx \cdot x^{n-1} \sin.ax^m &= \frac{1}{m}\,\Gamma\left(\frac{n}{m}\right) a^{-\frac{n}{m}} \sin.\frac{n\pi}{2m} \; . \end{aligned}$$

Queste per $n=1, a=1, m=2$ riproducono le (q) del num. 77: e per $n=1, m=1$ danno le seguenti

$$(\xi) \qquad \begin{aligned} \int_0^\infty dx \cdot \cos.ax &= 0 \\ \int_0^\infty dx \cdot \sin.ax &= \frac{1}{a} \end{aligned}$$

la prima delle quali è la (ϑ) del num. 84.

91. Le formole (ν) sono due di quelle che mi abbisognavano per l'applicazione accennata sulla fine del num. 85: ma se ne richiede un'altra assai importante che mi preparerò in questo numero.

Considero l' integrale

$$\int_0^\infty dz\cdot\frac{z^{a-1}}{(1+z)^r}$$

e lo trasformo ponendo $z=\frac{1}{x}-1$. Osservando che ai valori $z=0$, $z=\infty$ corrispondono i valori $x=1$, $x=0$: ottengo (numeri 10, 12)

$$\int_0^\infty dz\cdot\frac{z^{a-1}}{(1+z)^r}=\int_0^1 dx\cdot x^{r-a-1}(1-x)^{a-1}.$$

L'integrale del secondo membro è un primo integrale Euleriano (num. 59 formola (t)), come subito si vede facendo nella citata formola (t) $p=r-a$, $q=a$; ma $(r-a,a)$ è esprimibile per la *gamma* (num. 61 formola (z)): dunque

$$(o)\qquad \int_0^\infty dz\cdot\frac{z^{a-1}}{(1+z)^r}=\frac{\Gamma(a)\Gamma(r-a)}{\Gamma(r)}.$$

Sia in questa $r=1$, e a motivo della formola (l) del num. 55, avremo

$$(\pi)\qquad \int_0^\infty dz\cdot\frac{z^{a-1}}{1+z}=\frac{\pi}{\sin.a\pi}.$$

Notisi che dovendo l'elemento p nel trascendente (p,q) essere positivo (num. 59) vi è per l'antecedente (o) la condizione di $a<r$, e per la (π) la condizione di $a<1$.

Si trasformi la (π) facendo $z=x^n$, e supponendo n positiva: i limiti rimangono gli stessi; quindi col porre $an=a$ si ha prontamente

$$(\rho)\qquad \int_0^\infty dx\cdot\frac{x^{a-1}}{1+x^n}=\frac{\pi}{n\sin.\frac{a\pi}{n}}$$

insigne formola di Eulero in cui dagli antecedenti si deduce per a la condizione di dover essere compresa fra *zero*, n.

È facile cavar dalla (ρ) le due

$$(\sigma)\qquad \int_0^\infty dx\cdot\frac{x^{a-1}}{r^2+x^2}=\frac{\pi r^{a-2}}{2\sin.\frac{a\pi}{2}}\ ;\qquad \int_0^\infty dx\cdot\frac{x^a}{r^2+x^2}=\frac{\pi r^{a-1}}{2\cos.\frac{a\pi}{2}}$$

per la prima delle quali a deve avere un valore fra *zero*, 2, e per la seconda fra -1, 1: essendo per entrambe r quantità positiva.

Tutta l'analisi magistrale di questo numero è dovuta al sig. Legendre (*).

(*) *Exercices de Calcul Intégral.* IVme P., pag. 100.

92. Ora cerchiamo il valore dell'integrale

$$\int_0^\infty dx \cdot \frac{x^{a-1}}{r^2+x^2} \sin.\left(\frac{a\pi}{2} - bx\right)$$

che per brevità chiamo Y, il quale è uno dei più osservabili cui sia giunto il sig. Cauchy col sussidio del suo nuovo calcolo dei residui (*).

Diamo ad Y l'espressione

$$Y = \sin.\frac{a\pi}{2}\int_0^\infty dx \cdot \frac{x^{a-1}\cos.bx}{r^2+x^2} - \cos.\frac{a\pi}{2}\int_0^\infty dx \cdot \frac{x^{a-1}\sin.bx}{r^2+x^2} \;:$$

facciamo

$$y = \int_0^\infty dx \cdot \frac{x^{a-1}\cos.bx}{r^2+x^2} \;;\qquad z = \int_0^\infty dx \cdot \frac{x^{a-1}\sin.bx}{r^2+x^2}$$

ed arriveremo facilmente alle equazioni

$$\left(\frac{d^2y}{db^2}\right) = -\int_0^\infty dx \cdot x^{a-1}\cos.bx + r^2 y$$

$$\left(\frac{d^2z}{db^2}\right) = -\int_0^\infty dx \cdot x^{a-1}\sin.bx + r^2 z\,.$$

Qui gl'integrali sono funzioni assegnabili di b mediante le precedenti formole (ν), e si giunge alle

$$\left(\frac{d^2y}{db^2}\right) - r^2 y = -\Gamma(a)\, b^{-a}\cos.\frac{a\pi}{2}$$

$$\left(\frac{d^2z}{db^2}\right) - r^2 z = -\Gamma(a)\, b^{-a}\sin.\frac{a\pi}{2}$$

i cui integrali completi per le formole (E), (H) del num. 85 sono

$$y = \frac{1}{2r}\Gamma(a)\cos.\frac{a\pi}{2}\left\{e^{-br}\int db \cdot e^{br} b^{-a} - e^{br}\int db \cdot e^{-br} b^{-a}\right\}$$

$$z = \frac{1}{2r}\Gamma(a)\sin.\frac{a\pi}{2}\left\{e^{-br}\int db \cdot e^{br} b^{-a} - e^{br}\int db \cdot e^{-br} b^{-a}\right\}.$$

Si chiamino per un momento $P(b)$, $Q(b)$ le funzioni incognite di b equivalenti ai due integrali indefiniti $\int db \cdot e^{br} b^{-a}$, $\int db \cdot e^{-br} b^{-a}$, e i precedenti valori di y, z dovranno scriversi

$$y = \frac{1}{2r}\Gamma(a)\cos.\frac{a\pi}{2}\left\{e^{-br}P - e^{br}Q + Ae^{-br} - Be^{br}\right\}$$

$$z = \frac{1}{2r}\Gamma(a)\sin.\frac{a\pi}{2}\left\{e^{-br}P - e^{br}Q + A'e^{-br} - B'e^{br}\right\}$$

(*) *Exercices de Mathématiques*. Tom. I, pag. 108.

essendo A, B, A', B' quattro costanti indipendenti da b ed arbitrarie. Avventuratamente le funzioni incognite P, Q escono dal calcolo nel formare coi valori precedenti quello di $Y=\sin.\frac{a\pi}{2}\cdot y-\cos.\frac{a\pi}{2}\cdot z$, e si capisce dover essere

$$Y=Me^{-br}+Ne^{br}$$

significando M, N quantità da determinarsi che non contengono b. Pongasi in questa per Y l'integrale equivalente, e si prenda la derivata dell'equazione per rapporto a b: indi nella stessa prima, e nella sua derivata si faccia $b=0$: giungeremo alle

$$\sin.\frac{a\pi}{2}\int_0^\infty dx\cdot\frac{x^{a-1}}{r^2+x^2}=M+N$$

$$\cos.\frac{a\pi}{2}\int_0^\infty dx\cdot\frac{x^{a}}{r^2+x^2}=Mr-Nr\,.$$

Qui si sostituiscano agl'integrali i loro valori dati dalle precedenti formole (σ) e sarà facile conchiuderne $M=\frac{\pi}{2}\cdot r^{a-2}$, $N=0$. Per tal maniera l'ultima trovata espressione di Y somministra

$$(\tau)\qquad \int_0^\infty dx\cdot\frac{x^{a-1}}{r^2+x^2}\sin.\left(\frac{a\pi}{2}-bx\right)=\frac{\pi}{2}\,r^{a-2}\,e^{-br}$$

la cui derivata per b riesce

$$(v)\qquad \int_0^\infty dx\cdot\frac{x^{a}}{r^2+x^2}\cos.\left(\frac{a\pi}{2}-bx\right)=\frac{\pi}{2}\,r^{a-1}\,e^{-br}$$

formole nelle quali la a ha rispettivamente le stesse restrizioni come nelle (σ).

93. *Scolio.* Osservò il sig. Cauchy nel luogo citato che la celebre formola di Laplace (la (a) del num. 72) è contenuta come caso particolare in quest'ultima (v) in cui facciasi $a=0$. Lo studioso ripassando colla mente tutto il processo analitico con cui siamo giunti alla precedente (v) si persuaderà che non vi entrano richiami di formole appoggiate alla ricordata di Laplace, quindi potrà conchiudere che la sua deduzione dalla precedente (v) è forse la più limpida dimostrazione che finora ne sia stata data.

(sarà continuato)

PARTE PRIMA

Continuazione e fine delle *RIFLESSIONI SULLA LEGGE DELL'ATTRAZIONE MOLECOLARE* di GIUSEPPE BELLI (V. Fascicolo III, pag. 237).

ARTICOLO QUARTO

Delle leggi di attrazione a cui è d'uopo ricorrere per conservare le più ricevute nozioni sulla costituzione de' corpi.

XXI.

Da tutto quello che abbiamo superiormente veduto noi possiamo conchiudere, esser cosa impossibile il far dipendere dalla sola gravitazione operante direttamente fra i corpi, la coesione di essi, la loro adesione, e gli altri fenomeni di attrazione al contatto de' medesimi, se già non si vogliano adottare sulla interna struttura di essi corpi delle ipotesi stravagantissime, complicatissime, e quasi affatto assurde. E però per chi cerchi di appigliarsi al vero stato delle cose, per quanto le nostre attuali cognizioni il concedono, il migliore consiglio è certamente quello di ricorrere ad una nuova forza attrattiva dotata di un'altra più rapida legge (e sia pure essa, se si vuole e se è possibile, un effetto indiretto della gravitazione medesima), la quale nuova forza spieghi più naturalmente que' fenomeni, e nello stesso tempo lasci sussistere sulla costituzione della materia quelle nozioni a cui i Fisici dall'esame di molti fenomeni sono stati condotti. Al quale consiglio se noi vorremo attenerci, infinite leggi ci si presentano di decremento abbastanza rapido per l'aumentarsi delle distanze e di abbastanza rapido incremento per la diminuzione delle distanze medesime, onde possa una forza attrattiva essere insensibile a qualche distanza ed assai energica al contatto de' corpi. Dal che abbiamo il vantaggio di non vincolar punto la nozione che noi ci possiamo fare sulla struttura dei corpi medesimi, la quale noi possiamo ritenere quale meglio si accorda con tutti gli altri fenomeni fisici e chimici, sicuri di poter sempre fra cotali infinite leggi ritrovarne una che dia compiutamente ragione della coesione e dell'adesione, con tutte le particolarità che in esse si potranno riconoscere. Se non è abbastanza rapida la ragione reciproca dei cubi delle distanze, noi possiamo ricorrere a quella delle quarte potenze reciproche, delle quinte, delle seste, ecc. E se la ragione reciproca di nessuna potenza intera delle distanze soddisfà pienamente a tutte le particolarità de' fenomeni attrattivi al contatto de' corpi, noi possiamo far ricorso o ad una potenza frazionaria intermedia alle suddette o ad una somma di più termini che decrescano con leggi diverse allo aumentarsi delle distanze.

A me sembra pertanto esser questo in conclusione il partito più conveniente a prendersi, cioè:

1.° Di lasciar sussistere sulla interna struttura dei corpi quelle nozioni che ora sono più accettate dai Fisici e dai Chimici, senza stillarsi il cervello a ricercare delle nuove e bizzarre ipotesi. E siccome la dottrina che più si accorda con tutti i fenomeni presentemente conosciuti è quella degli *atomi*, posta ora quasi fuor d'ogni dubbio dalle scoperte sulla struttura dei cristalli e sulle *proporzioni determinate*, così noi potremo ammetter questa liberamente (Vedi intorno a ciò quanto si è detto al num. VIII).

2.° Di ammettere, per la spiegazione della coesione e de' fenomeni affini, che esista ne' corpi, oltre all'azione diretta della gravitazione, un'altra forza attrattiva, la quale al cangiarsi delle distanze varii secondo una legge più rapida della ragione inversa de' quadrati delle distanze stesse, rimettendo però la precisa determinazione di questa sua legge a quel tempo nel quale ci venga ciò permesso da una più chiara cognizione de' fenomeni (1).

XXII.

Ma, opporrà taluno, non è egli assurdo l'ammettere che in questi fenomeni presentati dai corpi al loro vicendevole contatto, la natura operi dissimilmente da se medesima, e che dopo avere da enormi distanze fino a distanze assai piccole seguita in un modo rigorosissimo la ragione de' quadrati reciproci delle distanze, recati poscia i corpi fino al contatto, o per dire più esattamente fino a distanze piccolissime, muti ad un tratto il suo modo d'operare, e violi così quella legge di continuità che sì scrupolosamente ella suole osservare? E a quale distanza avverrà questo salto, per cui una legge cessi e sottentri l'altra?

Per rispondere a questa obbiezione osserverò che io già non pretendo che la natura cangi la maniera di operare, e che vi sieno due specie di attrazione

(1) Ecco come si esprime a questo riguardo il celebre Poisson, che è anch'esso di questo medesimo parere: » Toutes les parties de la matière sont soumises à deux sortes d'actions » mutuelles. L'une est attractive, indépendante de la nature des corps, proportionnelle au » produit des masses, et en raison inverse du carré des distances: elle s'étend indéfiniment » dans l'espace, et produit la pesanteur universelle et tous les phénomènes d'équilibre et de » mouvement qui sont du ressort de la *mécanique céleste*. L'autre est attractive ou répulsive: » elle dépend de la nature des particules et de leur quantité de chaleur; son intensité décroît » très-rapidement quand la distance augmente, et devient insensible, dès que la distance a » acquis une grandeur sensible...... Les corps sont formés de *molécules* disjointes, c'est-à-dire » de portions de matière pondérable, d'une grandeur insensible, séparées par des espaces vides, » ou des *pores*, dont les dimensions sont aussi imperceptibles à nos sens. Les molécules sont » si petites et si rapprochées les unes des autres, qu'une portion d'un corps, qui en renferme » un nombre extrêmement grand, peut encore être supposée extrêmement petite, et la grandeur » de son volume insensible ». *Mémoire sur les Équations générales de l'Équilibre et du Mouvement des Corps solides élastiques et des Fluides; lu à l'Académie des Sciences, le* 12 *Octobre* 1829: nel *Journal de l'École Polytechnique*, XX Cahier, pag. 4. Ben s'avvede il lettore che la seconda delle forze ammesse da Poisson nelle parti della materia, è quella che risulta dal comporre insieme l'attrazione molecolare e l'azione del calorico tendente a separare le molecole l'una dall'altra.

operanti separatamente, delle quali l'una valga rigorosamente alle grandi distanze e cessi affatto alle minime, mentre l'altra operando energicamente alle minime svanisca poscia assolutamente alle grandi. Ma si ammettono due attrazioni contemporanee, operanti l'una e l'altra a tutte le distanze, tali però che l'una alle piccole distanze sia grandissima e di gran lunga prevalente, ma rapidissimamente scemi allo accrescersi delle distanze stesse, talchè sebbene ella esista ancora alle grandi distanze, pure sia in esse sì debole da non potere in milioni e milioni di secoli produrre un effetto riconoscibile; l'altra in vece sia estremamente piccola alle brevi distanze e fra le piccole masse e di gran lunga minore della prima, ma pure nel passare alle grandi distanze e alle grandi masse, ingrandendosi per queste ultime assai più che non iscemi per quelle, possa divenire grandissima, ed operare perciò poderosamente sulle masse celesti e ritenerle nelle loro orbite: così i corpi, essendo sottoposti all'azione combinata di ambedue queste forze, non mostrano sensibilmente alle grandi distanze che i soli effetti della seconda di esse, e alle distanze piccolissime que'soli della prima, vale a dire di quella dotata della più rapida legge. Ovvero anche, componendo le due attrazioni in una forza unica, il che in ultimo conto torna esattamente allo stesso (1), si ammette esistente ne'corpi una sola forza attrattiva che operi a tutte le distanze, ma la cui legge debba essere espressa per mezzo di due termini, l'un de'quali decresca allo accrescersi delle distanze nella ragione inversa dei quadrati di queste e l'altro in una ragione più rapida (potendo però quest'ultimo termine, se così vuole il bisogno, essere formato dall'unione di parecchi); e il primo de'quali termini prevalga alle grandi distanze, e il secondo in vece sia maggiore e di gran lunga prevalente alle minime. A questo modo non vi ha interruzione o salto da una legge ad un'altra, e rimane del tutto illesa la legge di continuità.

Si potrebbe anche supporre che quest'unica attrazione la quale dà origine alle due specie di effetti, abbia per espressione dell'azion sua fra due punti materiali una funzione delle distanze, la quale, senza essere formata dall'unione di più potenze moltiplicate per coefficienti costanti, sia nulladimeno di tal natura, che allorquando queste distanze sono incomparabilmente maggiori delle dimensioni delle molecole elementari de'corpi, il valore di essa funzione coincida quasi esattamente colla seconda potenza reciproca di tali distanze moltiplicata per un coefficiente costante; e che quando al contrario queste distanze non sono grandissime in paragone delle dimensioni delle molecole, il valore della medesima funzione sia molto più grande di quello di essa seconda potenza reciproca moltiplicata pel coefficiente costante. E molte funzioni si possono immaginare le quali godano di siffatta proprietà; tali potrebbero essere le seguenti

$$\left(\frac{a}{x}\right)^2 \cdot e^{\left(\frac{a}{x}\right)^2}, \quad \log.\left\{\frac{1+\left(\frac{a}{x}\right)^2}{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}\right\}, \quad \text{ecc.}$$

(1) Vedi il passo di Laplace citato più sopra al numero X.

essendo e la base de' logaritmi iperbolici, log. il simbolo di questa specie di logaritmi, a una quantità poco diversa dalla lunghezza dei diametri delle molecole, e x la distanza fra i punti materiali che vicendevolmente si attraggono. Quest'ultima maniera di vedere sarebbe quella che potrebbe venire adottata da coloro i quali riguardano l'attrazione vicendevole de'corpi non già come una proprietà *primitiva* della materia, ma bensì come una proprietà *derivativa* ossia come una conseguenza di qualche altra proprietà della materia medesima (1); egli è in fatti ben noto, che quantunque le cause operanti sieno sovente regolate da leggi assai semplici, gli effetti loro nei corpi sogliono nulladimeno avere delle leggi molto complicate.

XXIII.

Ma non è egli in opposizione, dirà alcun altro, con quella maravigliosa semplicità di mezzi che sempre si osserva in natura, il voler ammettere questa doppia forza attrattiva o questa complicazione di legge? Ella è cosa verissima, io rispondo, che la natura si vale sempre de' mezzi più semplici, e che con un piccolissimo numero di cause e con leggi semplicissime ella riesce ad ottenere numerosissimi e diversissimi effetti; ed anzi si ha qui una delle più forti prove dell'infinita saggezza del Creatore. Però questa semplicità noi la dobbiamo ammirare ogni volta che ci avviene di scoprirla, ma non già presupporla gratuitamente in qualche fatto naturale a quel modo che a noi piace. Può essa aver luogo ora in maggiore ed ora in minor grado, secondo che al Creatore è parso più opportuno per la moltiplicità e per la convenienza degli effetti ch'Egli voleva ottenere; se talora non trovò sufficiente un solo mezzo, Egli ne avrà impiegato due, tre, secondo che avrà stimato più conveniente. E però noi coll'immaginarci anticipatamente e col limitare nel nostro pensiero questa semplicità, corriamo rischio di supporla in troppo alto grado, e di commettere con ciò de' gravi errori. Le cause de'fenomeni naturali dobbiamo sempre rintracciarle con altri modi più rigorosi di raziocinio, tenendo per certo che quando avremo potuto rinvenirle e pienamente conoscerle, vi troveremo sempre una più o meno grande ma ognor meravigliosa semplicità.

Il celebre Haüy nello esaminare la struttura de'corpi cristallizzati, venne a ritrovare per le molecole integranti dei corpi tre generi di forme, il tetraedro, il prisma triangolare, e il parallelepipedo, e questi non sempre regolari, e ciascun d'essi in generale dissomigliante dall'un minerale all'altro. Ora questo risultamento il trovò egli sì semplice, posto a confronto colla innumerevole moltitudine delle forme cristalline de'minerali, ch'ebbe a dire, riconoscersi

(1) Così pensa fra gli altri il Le Sage da noi citato al num. XVI, riguardando egli l'attrazione de'corpi come prodotta dall'urto di finissime molecole che si muovano velocissimamente nello spazio, e le quali incontrando i corpi gli spingano ad avvicinarsi l'uno all'altro: io però non intendo di punto ingerirmi nell'argomento dell'*intima essenza* dell'attrazione.

qui il solito costume della natura, cioè *economia e semplicità ne' mezzi, ricchezza e varietà inesauribile negli effetti* (1). Pure la semplicità sarebbe stata ancora maggiore se le molecole integranti di tutti i minerali avessero avuto una forma unica, e questa fosse stata la più semplice di quelle tre ed altresì regolare. Ma sarebbe stata una stolta presunzione, e un pretendere di saper conoscere tutti i segreti della natura, se taluno avesse voluto sostenere che così veramente stesse la cosa, presunzione che sarebbe stata punita col nessun successo nel tentar di spiegare la struttura de' corpi cristallizzati.

D'altronde poi, tornando al caso nostro, quantunque l' adottare una sola forza attrattiva sia una supposizione più semplice che l'adottarne due, egli è chiaro che il pregio di questa semplicità verrebbe affatto tolto dalla complicazione e dalla stravaganza che si dovrebbe ammettere nella tessitura de' corpi, come si è veduto nell'Articolo III.

XXIV.

Concedendo che l'attrazione universale esercitata direttamente fra i corpi, non sia la causa della coesione e degli altri effetti congeneri, potrebbe qualche Fisico pensare (come si è già accennato al num. XIX) che questa forza li produca indirettamente, coll'operare, a cagion d'esempio, su qualche fluido sottile sparso nello spazio, il quale fluido reso pesante da questa forza, si opponga colla sua pressione alla separazione de' corpi in contatto, e produca i medesimi effetti come una nuova forza attrattiva sottoposta ad una legge più rapida. Io non discuterò qui una tale opinione stata emessa già da lungo tempo (per quanto è almeno dell'ipotesi del fluido sottile), e sulla quale si è già assai disputato (2). Io mi contenterò di avere, se non m' inganno, dimostrato che gli effetti attrattivi che si manifestano al contatto dei corpi non possono dipendere dall'attrazione universale esercitata *direttamente* fra essi corpi, nel supposto che questa forza operi *attraverso alla materia, in ragione diretta del prodotto delle masse e inversa de' quadrati delle distanze;* e che nemmeno possono questi effetti venir cagionati da verun' altra forza diversa dalla gravitazione, ma operante fra i corpi colla medesima legge (vedi al numero XX). E in quanto alla ipotesi particolare che l'attrazione universale produca indirettamente cotali effetti per mezzo di quel fluido sottile, senza accingermi a combatterla mi limiterò a dire, che nello stato attuale delle nostre cognizioni ella non è gran fatto soddisfacente. Non sono lontani presentemente i Fisici dall' ammettere sparso negli spazii un fluido sottile; si può anche ragionevolmente ritenere, da quelli cui piace ammetterlo, che esso sia pesante; ma se esso invade anche gli inter-

---

(1) *Traité élémentaire de Physique*, Paris 1821, Tom. I, pag. 64.

(2) Veggasi la Memoria di Musschenbroek che ha per titolo *Introductio ad cohærentiam corporum firmorum*, verso il principio. Si può anche consultare il nuovo Dizionario Fisico di Gehler, Tom. I, pag. 325; Tom II, pag. 115.

valli fra le molecole, non si vede come possa premerle l'una contro l'altra, e tenerle legate insieme a una piccola vicendevole distanza.

Comunque sia, questa azione indiretta sarebbe sempre una nuova causa oltre all'azione diretta dalla gravitazione; e questa nuova causa dovrebbe spingere i corpi l'un verso l'altro, per quello che si è detto nel numero XX, con una legge diversa da quella dei quadrati inversi delle distanze.

XXV.

Abbandonata adunque pei fenomeni molecolari l'attrazione di gravitazione esercitata direttamente fra i corpi, come pure la legge de'quadrati reciproci delle distanze, ci rimarrebbe ora a vedere qual sia la vera legge dell'attrazione molecolare; vale a dire, immaginando che gli effetti attrattivi i quali si mostrano al contatto apparente dei corpi, vengano diminuiti di tutta la parte dovuta alla gravitazione, sarebbe a determinarsi la legge secondo la quale opera quella causa che produce in essi corpi la rimanente parte di quegli effetti medesimi, parte che è senza paragone la più grande. Io mi era già occupato nella citata memoria anche di questa ricerca (1), e ammettendo che questa causa sia una forza attrattiva la quale si eserciti direttamente fra i corpi ove si manifestano quegli effetti, ed operi attraverso alla materia, con una energia proporzionale alla massa attraente, aveva dimostrato per mezzo di calcoli approssimativi che per ispiegare la coesione e l'adesione conviene ricorrere ad una legge almeno più rapida di quella della ragione reciproca delle quarte potenze delle distanze, e che non basta la ragione reciproca dei cubi delle medesime come alcuni avevano pensato (2). E a questa conclusione io trovava conforme anche il fenomeno della rifrazione della luce; al quale ultimo argomento però io do ora men peso, conoscendo non essere ben sicura la dottrina dell'emissione della luce. I fenomeni poi de'tubi capillari mi portavano ancora più innanzi, cioè a conchiudere che supponendoli prodotti dall'attrazione molecolare, dee questa operare secondo una legge più rapida di quella delle quinte potenze reciproche delle distanze. Io potrei presentemente trattare di nuovo questa parte del mio soggetto col mezzo di calcoli più rigorosi; ma siccome non verrei ancora con ciò alla determinazione precisa della vera legge, e nemmeno a recare la questione più innanzi che allora, non essendo abbastanza inoltrate le nostre cognizioni sulla struttura dei corpi, e sulle leggi degli effetti dell'attrazione molecolare, così ho pensato di riserbare una tal parte del mio lavoro ad altro tempo, allorquando qualche nuovo fenomeno o qualche nuova considerazione mi permetterà per avventura di dire qualche cosa di più preciso.

---

(1) *Giornale di Fisica di Pavia*, 1814, pag. 169 e seg.

(2) Haüy. *Traité élémentaire de Physique*, Tom. I, pag. 48.

NOTA

Si espongono in questa Nota le dimostrazioni di alcune Proposizioni di cui si è fatto uso ne' due numeri XIV e XV, e che non si sarebbero potute ivi dimostrare senza troppo interrompere il filo de' ragionamenti. Parecchie di siffatte Proposizioni sono, a dire il vero, per se evidenti, quelle cioè dal § 1 al § 13 inclusivamente; e di esse a molti lettori potrà bastare il veder l'enunciazione, ammettendone del resto la verità come se fossero assiomi. Ho nulladimeno voluto dar la dimostrazione anche di queste, cioè mostrare come esse dipendano dai principii fondamentali della Geometria e della Meccanica, per dare tutto il rigore che per me si poteva alle dottrine che vi si appoggiano.

1. *Lemma I.* Supponghasi che in un dato piano vi abbia una retta di determinata lunghezza, nella quale si trovi concentrata e uniformemente distribuita per tutta questa sua lunghezza una data quantità di materia; e che in un altro piano, parallelo al precedente, si trovi un punto materiale (un punto cioè ove sia concentrata una determinata quantità di materia) il quale venga attirato da questa retta in conseguenza della gravitazione. Se questo punto si trasporterà successivamente in diverse posizioni, movendosi nel suo piano lungo una retta parallela alla retta data, ne avverrà che decomponendo l'attrazione esercitata fra il punto e la retta in due forze l'una perpendicolare e l'altra parallela ai due piani, la componente perpendicolare si aumenterà allorquando il punto immaginato s'accosterà col suo movimento al punto di mezzo della retta, e in vece questa medesima componente diminuirà quando il detto punto materiale si allontanerà dal punto di mezzo suddetto.

Noi considereremo soltanto il caso dell'avvicinamento, ciò bastando come è facile a vedersi. E cominceremo ad osservare essere affatto lo stesso per riguardo all'effetto dell'attrazione, sia che il punto materiale percorra col suo movimento un determinato spazio, sia che si muova per altrettanto spazio in direzione contraria la retta attraente, e sia anche che venga levata da questa retta, alla estremità più lontana dal punto materiale, una parte uguale in lunghezza allo spazio che si suppone percorso dal punto e che in seguito questa parte torni ad essere aggiunta alla retta suddetta dall'altra sua estremità e nella stessa di lei direzione. Ciò posto, non è difficile a dimostrarsi che in quest'ultimo caso tutti i punti della parte di retta trasportata si collocano più appresso al punto materiale di quello che fossero precedentemente, e che perciò l'attrazione fra questa parte trasportata e il punto materiale, considerandone l'effetto nell'indicata direzione, si aumenta.

Rappresentiamo in fatti nelle figure 10 (α) e 10 (β) con

BC la posizione della retta materiale pria ch'ella venga segata, con

Bb la parte tagliata, con

Cc la nuova posizione data a questa parte tagliata, con

A' la projezione del punto materiale, projettato perpendicolarmente sul piano ove si suppone esistere la retta *BC*; e chiamiamo

A questo punto materiale stesso, esistente, per ciò che si è detto, in una retta alzata dal punto *A'* perpendicolarmente al piano or ora citato. E supponiamo che nella figura (α) tutta la retta *BC* e la parte *Cc* si trovino da una medesima banda per riguardo alla perpendicolare abbassata dal punto *A'* sulla direzione di *BC*; e che nella figura (β) le linee *Cc* e *Bb* si trovino da due bande opposte per rispetto alla perpendicolare calata da *A'* su *BC*.

Noi veggiamo nella prima di queste figure che tutti i punti di *Cc* si trovano più vicini al punto *A'* e perciò al punto *A* che non i punti di *Bb*. In conseguenza di ciò, l'energia dell'attrazione esercitata secondo la direzione perpendicolare ai due piani, dal punto *A* verso un punto qualsivoglia del pezzo di linea trasportato si aumenterà per questo trasporto, essendo quest'energia proporzionale alla distanza fra i due piani divisa pel cubo della distanza fra i

due punti suddetti; e perciò s'aumenterà eziandio l'effetto dell'attrazione esercitata nel supposto verso fra A e la retta Bb, col trasportarsi di questa alla posizione Cc; e aggiungendo l'attrazione di bC, ne verrà che l'effetto attrattivo fra il punto A e la intera BC si farà maggiore col ridursi di questa retta, mediante il trasporto di Bb, alla retta bc. E si aumenterà pure, e della stessa quantità, l'attrazione fra A e BC nel caso che la riduzione della BC alla retta bc si ottenga col mezzo di un movimento della total linea BC senza che questa venga segata, giacchè, come s'è già avvertito, l'ultima grandezza dell'attrazione fra A e BC dipende unicamente dalla posizione finale della linea BC e in nessun modo dalla maniera colla quale viene operato il cangiamento di posizione. Questa parte della dimostrazione vale pel movimento della linea BC dalle posizioni più lontane da A, fino alla posizione in cui questa linea colla sua estremità più vicina ad A sia arrivata alla perpendicolare calata da A'.

Nella figura (6) si scorge che, essendo $A'c$ o minore o al più uguale ad $A'b$, ed essendo il punto c quello che in tutta la retta Cc è il più lontano da A', mentre b è il punto più vicino ad A' che possa aversi in tutta la Bb, si scorge, io dico, che tutti i punti di Cc sono più vicini ad A' e per conseguenza anche ad A che non i punti di Bb, trattone qualche caso in cui i punti b e c potrebbero essere alla medesima distanza da A. L'attrazione perciò fra Cc ed A, nella direzione perpendicolare ai due piani, è maggiore di quella fra Bb ed A; e così l'attrazione fra A e la retta BC si accresce, se questa linea viene a prendere la posizione bc, sia che ciò avvenga per mezzo del trasporto di una delle sue parti la quale dal luogo Bb passi al Cc, ovvero per mezzo di un movimento dell'intera linea BC. Questa seconda parte della dimostrazione vale pel caso del movimento di questa linea BC dalla posizione nella quale una delle sue estremità si trova nella perpendicolare abbassata da A', fino alla posizione in cui si trova in questa medesima perpendicolare il suo punto di mezzo, e nella quale l'attrazione nella direzion considerata è al suo massimo.

Segue da tutto ciò che l'attrazione fra BC ed A considerata nel verso già detto, s'accresce sempre allorquando questa linea BC si muove di tal maniera secondo la propria direzione che il suo punto di mezzo venga a portarsi più vicino ad A. E siccome non vi ha la minima differenza riguardo all'attrazione summenzionata, dal muoversi della linea BC per un verso al muoversi del punto A in una direzione parallela ma pel verso contrario, così se ne conchiude che una tale attrazione si aumenta anche allorquando il punto A movendosi parallelamente alla retta BC si avvicina al punto di mezzo di questa.

2. *Osservazione.* Se il punto A dopo esser giunto alla minima distanza dal mezzo della BC continua a muoversi pel medesimo verso, in maniera da scostarsi di nuovo da esso punto di mezzo, l'attrazione suddetta nel verso perpendicolare ai due piani torna a diminuire; e ad eguaglianza di distanze fra il punto A e il suddetto punto di mezzo della BC le attrazioni sono uguali.

3. *Lemma II.* Supponiamo che in un dato piano vi abbia una retta, dove si trovi, come precedentemente, concentrata e uniformemente distribuita una data quantità di materia, e che in un altro piano parallelo al precedente vi abbia, non più un semplice punto, ma un'altra retta parallela a quella or ora supposta, e dove similmente si trovi concentrata e uniformemente distribuita un'altra data quantità di materia, avendo le quantità di materia distribuite nelle due rette un qualunque rapporto fra loro, e similmente essendo le lunghezze delle rette medesime in un rapporto qualunque, uguale o no a quello delle masse. Se una di queste rette verrà a muoversi secondo la sua direzione, rimanendo parallela a se medesima, e se mediante questo movimento il suo punto di mezzo si accosterà al punto di mezzo dell'altra retta, l'attrazione esercitata fra queste due rette nel verso perpendicolare ai due piani si farà maggiore; e la massima attrazione avrà luogo alla minima distanza fra i due punti di mezzo.

Si rappresenti (fig. 11) con AB la retta mobile, la quale se le due rette sono inegual noi supporremo essere la più grande, con C il suo punto di mezzo, con $a'b'$ la projezione della retta immobile sopra il piano di quella mobile, e con c' il suo punto di mezzo, chiaman-

do ab la retta immobile medesima e c il suo punto di mezzo; e intendo, tanto qui come altrove, che il projettamento sia fatto perpendicolarmente al piano della projezione.

Egli è facile a vedersi che in luogo di supporre un movimento col quale la retta AB si trasporti alla posizione $A'B'$, noi possiamo immaginare levata da essa AB una parte AA' e trasportata questa alla posizione BB'. Ora se nel movimento della AB il suo punto di mezzo C passa ad una posizione C' più vicina a c', di maniera però che i due punti C e C' si trovino da una medesima banda per riguardo alla perpendicolare calata da c' su AB, il punto B' sarà più vicino che non A' al punto c, sia che esso punto B' si trovi dalla medesima banda di C' per rispetto alla detta perpendicolare, sia che si trovi dalla banda contraria; e tutti i punti di BB' saranno più vicini a c che non qualsivoglia punto di AA'. Segue da ciò che l'attrazione esercitata perpendicolarmente ai due supposti piani, dalla retta ab verso un punto qualsivoglia di AA' diverrà più energica in forza del trasporto di essa AA' alla posizione BB', come si ha dal Lemma I.°; e che per conseguenza l'attrazione fra la ab e tutta la AB, nel verso supposto, diverrà maggiore allorquando quest'ultima retta prenderà la posizione $A'B'$ mediante un tale trasporto della parte AA' alla posizione BB'. E questo aumento avrà luogo anche nel caso che il cangiamento di posizione si effettui per mezzo di un movimento dell'intera retta AB.

Se il punto C' si troverà nella perpendicolare calata da c' su AB, i punti A', B' saranno ugualmente lontani da c; ma B' sarà il punto più lontano da c in tutta la BB', e A' il punto più vicino a c in tutta la AA'; perciò anche in questo caso il trasporto della AA' alla posizione BB' come pure il passaggio della AB alla posizione $A'B'$ faranno aumentare l'attrazione nel verso già detto.

4. *Lemma III.* Si supponga che lungo una medesima retta geometrica collocata in un dato piano si trovino parecchie rette materiali collocate a qualche distanza l'una dall'altra, le quali abbiano le masse nella proporzione delle rispettive lunghezze, e in ciascuna delle quali la massa sia distribuita uniformemente per tutta la propria lunghezza. Si supponga che in un altro piano parallelo al precedente e lungo un'altra retta geometrica parallela alla precedente, si trovino parecchie altre rette materiali, disposte similmente a qualche distanza l'una dall'altra, con masse proporzionali alle rispettive lunghezze, e aventi ciascuna la propria massa distribuita uniformemente per tutta la sua lunghezza; di maniera però che prendendo uguali lunghezze in queste ultime rette e nelle prime, le masse corrispondenti a queste lunghezze possano essere dall'uno all'altro sistema in un rapporto qualunque. Supposta determinata l'attrazione vicendevole che ha luogo fra questi due sistemi di rette materiali così collocate, secondo la direzione perpendicolare ai due piani, concepiamo che le rette appartenenti all'uno de' sistemi si muovano secondo le loro direzioni fino ad unirsi insieme in una retta unica di una lunghezza uguale alla somma delle lunghezze delle rette componenti, e collocata anch'essa nella medesima retta geometrica; concepiamo che lo stesso avvenga per riguardo all'altro sistema di rette; e immaginiamo in fine che l'una qualunque delle due rette materiali risultanti, movendosi convenientemente lungo la rispettiva retta geometrica si trasporti fino a porsi col suo punto di mezzo alla minima distanza possibile dal punto di mezzo dell'altra retta materiale. L'attrazione che verrà esercitata perpendicolarmente ai due piani fra cotali due rette materiali risultanti ridotte a quest'ultima posizione, è maggiore di quella che qui sopra abbiamo supposta determinata e la quale aveva luogo fra i due sistemi di rette materiali mentre queste erano ancora separate.

Chiamiamo $A, B, C, \dots N$ le rette materiali esistenti nell'uno de' piani, prese per ordine incominciando da una delle estremità del loro sistema e venendo gradatamente alla estremità opposta.

Chiamiamo $a, b, c, \dots n$ le rette materiali che compongono l'altro sistema, supposte prese per ordine l'una dopo l'altra camminando per un verso analogo a quello che conduce da A ad N. Può vedersi questa disposizione rappresentata nella figura 12, nella quale le rette se-

gnate A, B, C, - - - N rappresentano le rette materiali del primo sistema, e quelle segnate a', b', c', - - - n' rappresentano le projezioni gettate sopra il piano delle precedenti dalle rette materiali a, b, c, - - - n esistenti nell'altro piano e costituenti l'altro sistema.

Chiamiamo in fine V l'effetto dell'attrazione fra i due sistemi di rette prima de'loro spostamenti, nella direzione perpendicolare ai due piani.

Immaginiamo dopo ciò che si sia condotto un piano perpendicolare alle direzioni di queste rette, il quale lasci da una medesima banda tutte le rette medesime tanto dell'uno quanto dell'altro sistema; e il quale, per fissare le idee, sia collocato per rispetto a cotali rette da quella banda ove si trovano le due N, n; e scegliamo quella delle due rette A, a la quale ha il suo punto di mezzo ad una maggiore distanza da un siffatto piano. Supponendo che ella sia la retta A, concepiamo che questa, mantenendosi parallela a se medesima, si muova secondo la sua direzione per avvicinarsi a B, e continui a muoversi in sino a che o arrivi ad unirsi colla B, ovvero, se questa seconda cosa accade più presto, insino a che il suo punto di mezzo sia giunto alla sua più piccola distanza dal punto di mezzo della a. Avendo luogo il primo di questi due casi, si supponga che all'istante del toccarsi delle due rette il movimento della A si fermi; avendo invece luogo il secondo caso, si concepisca che un tale movimento della A venga ancora continuato, ma che inoltre prenda a muoversi anche la retta a, essa pure secondo la propria direzione e per lo stesso verso di A e colla stessa velocità e serbandosi similmente parallela a se medesima, cominciando il suo movimento appunto in quell'istante nel quale il punto di mezzo della A perviene alla suddetta più piccola distanza dal punto di mezzo della a; e si supponga che questi due simultanei movimenti di A e di a sieno continuati sino a che o la A incontri la B, ovvero la a incontri la b, e cessino entrambi all'istante che succede o l'uno o l'altro di questi incontri.

Egli avverrà che per l'immaginato cangiamento di posizione l'attrazione vicendevole dei due sistemi nella direzione supposta si farà maggiore. Vi sarà infatti un aumento nell'attrazione fra A ed a, in conseguenza del ravvicinamento de' loro punti di mezzo (Lemma II). Vi sarà eziandio un aumento nell'attrazione fra A e ciascuna delle linee b, c, - - - n, per la medesima ragione. Riguardo all'attrazione fra l'aggregato delle linee B, C, - - - N e la linea a vi sarà aumento nel caso che la a abbia cangiato di posizione, non vi sarà variazione nel caso che la a sia rimasta al suo luogo. L'attrazione in fine fra l'aggregato delle rette B, C, - - - N e quello delle rette b, c, - - - n rimarrà costante. Aumentandosi adunque alcune delle attrazioni parziali fra le linee materiali de' due sistemi, e rimanendo costanti altre delle attrazioni medesime, la somma loro diverrà necessariamente maggiore.

Oltre a ciò col mezzo di questo cangiamento di posizione due delle rette A, B, C, - - - N, a, b, c, - - - n verranno a formarne una sola, e perciò il total numero di esse rette scemerà di una unità.

Eseguitosi questo primo cangiamento di posizione o ravvicinamento delle rette materiali, immaginiamo che ne succeda un altro affatto simile ne'due sistemi di rette che si vengono ad avere di poi. Ne risulterà similmente un aumento di attrazione, e una diminuzione di un'altra unità nel numero delle rette componenti i due sistemi.

Se noi immagineremo quindi un terzo cangiamento di posizione o avvicinamento di rette, un quarto, ecc. in sino a che i due sistemi di rette si sieno ridotti a non essere formati che da una sola retta ciascuno, vi sarà in ognuno de'cangiamenti un nuovo accrescimento di attrazione.

E se infine noi immagineremo che le due rette materiali, alle quali i due sistemi si ridurranno dopo questi ravvicinamenti, prendano delle tali posizioni rispettive, per mezzo di un opportuno movimento dell'una di esse, che i loro punti di mezzo vengano a trovarsi in una retta unica ad esse perpendicolare, la loro vicendevole attrazione riceverà un altro aumento.

Segue da tutto ciò che l'attrazione vicendevole fra cotali due rette materiali risultanti, collocate in quest'ultima posizione, è maggiore dell'attrazione V che aveva luogo fra i due sistemi delle rette primitive.

Può avvenire che le due rette A, a, o quelle che tengono il luogo di esse nel seguito delle operazioni indicate, abbiano fin da principio i loro centri ugualmente distanti dal piano immaginato, come pure che esse rette, mentre si vanno avvicinando a questo piano, vengano ad incontrarsi tutte e due nello stesso istante con quelle che rispettivamente le seguono. In questi casi però non v'è altro di particolare che una maggiore semplicità in alcune delle suddette operazioni; nè è necessario trattenersi su ciò di proposito.

5. *Teorema I.* Supponiamo che una data quantità di materia sia concentrata e uniformemente distribuita in una superficie piana la cui estensione sia data ma di cui si possa cangiare la figura ad arbitrio ed anche dividere in più parti staccate, le quali però sieno sempre disposte nel piano medesimo. Supponiamo inoltre che un'altra quantità data di materia sia concentrata ed uniformemente distribuita in un'altra superficie piana parallela alla precedente, di un'estensione ugualmente data, ma di cui possa similmente mutarsi la forma a nostro arbitrio. E sieno le estensioni delle due superficie proporzionali o no alle masse rispettive. Fra i diversi valori che potrà avere l'attrazione esercitata fra queste due masse nella direzione perpendicolare ai due piani, corrispondentemente alle diverse forme che possono darsi alle superficie attraenti conservando loro la medesima estensione, il più grande di tutti sarà allorquando le suddette due superficie avranno la forma di due cerchii co' centri collocati ambedue in una retta perpendicolare ai loro piani.

Dimostrazione. Noi osserveremo prima di tutto che l'attrazione delle due masse nella direzione supposta, non può col variare di forma delle due superficie aumentarsi indefinitamente; ma che vi ha un massimo cui essa attrazione non può oltrepassare. In fatti non può giammai cotale attrazione, qualunque sia la forma di queste superficie, giungere ad uguagliare quella che verrebbe esercitata fra le dette due masse, quando queste fossero concentrate in due punti aventi per vicendevole distanza la distanza de' due piani. Per conseguenza, se noi supponiamo che le due masse abbiano una data disposizione, diversa da quella de' due menzionati cerchii, noi potremo bensì (come vedremo or ora) cangiare questa disposizione in maniera da aumentare l'attrazione fra esse due masse nella direzione perpendicolare ai due piani, ma non potremo recare l'aumento che sino ad un certo punto, dove una tale attrazione, per quella distanza dei due piani, per quelle estensioni superficiali e per quelle grandezze delle due masse attraenti, sia la più grande possibile.

Rimane a dimostrarsi che un tale massimo di attrazione ha luogo allorquando le due masse si trovano distribuite ne' due citati cerchii. Ora ciò sarà manifesto quando si sarà provato che avendosi qualsivoglia altra disposizione, è sempre possibile il cangiar questa per tal modo che le venga a corrispondere un maggior valore di siffatta attrazione.

Immaginiamo adunque che le due superficie materiali abbiano una forma qualunque diversa da quella de' due cerchii suddetti. Noi possiamo osservare che qualunque sia questa loro forma, dovrà necessariamente aver luogo o l'uno o l'altro de' due seguenti casi.

Primo Caso. Potrà avvenire che fra le infinite rette le quali possono condursi ne' piani di esse due superficie, ve ne sia qualcuna la quale abbia più parti separate giacenti nella superficie corrispondente. Ciò è quello che avverrebbe allorquando una almeno di esse superficie fosse composta di più parti staccate; ovvero, benchè consistente in un pezzo unico, avesse però de' vani o interrompimenti al di dentro del suo contorno; ovvero finalmente avesse degli angoli o de' seni rientranti.

Per venire in questo primo caso alla conclusione proposta, sia la retta MON (fig. 15) nella condizione accennata, abbia cioè più parti separate comprese nella corrispondente superficie materiale rappresentata da ABC. E sia abc la projezione dell'altra superficie materiale, sopra il piano di essa ABC. Conduciamo per un qualunque punto di questo piano una retta PQ perpendicolare alla MON, e prendiamo questa PQ per asse delle ascisse x, supponendo che queste x crescano nella direzione da P a Q. Sieno rispettivamente H e K la più piccola e la più grande ascissa cui possano avere i punti presi nella ABC; e similmente sieno

h e k la più piccola e la più grande ascissa dei punti della abc. Conduciamo attraverso ad ABC una retta qualsivoglia RS parallela ad MON, di cui l'ascissa sia X; conduciamo similmente attraverso all'altra superficie materiale una retta che diremo rs parallela ad MON e la cui projezione nel piano della ABC abbia per ascissa x. Concepiamo per un istante che nella parte o nelle parti di RS che giacciono nella ABC si trovi concentrata e uniformemente distribuita per tutta la loro lunghezza una quantità di materia la quale stia a tutta la massa di ABC, come un rettangolo avente per lunghezza questa parte di RS o la somma di queste parti di RS, e avente per larghezza l'unità che si vuol assumere per le lunghezze, sta a tutta l'estensione superficiale di ABC; e immaginiamo che similmente nella parte o nelle parti di rs che sono contenute nell'altra superficie materiale si trovi uniformemente distribuita una quantità di materia che stia a tutta la massa di essa seconda superficie materiale come un rettangolo avente questa parte o la somma di queste parti della rs per lunghezza e l'unità delle lunghezze per larghezza, sta all'estensione di questa seconda superficie materiale medesima; e chiamiamo

$$f(x, X)$$

l'attrazione che in questo supposto verrebbe esercitata perpendicolarmente a'due piani fra la parte o le parti di RS, e la parte o le parti di rs.

Adottate queste denominazioni, l'attrazione totale fra le due superficie materiali, nella direzione perpendicolare ai due piani, sarà

$$\int_H^K dX \int_h^k dx \cdot f(x, X),$$

come è chiaro dalle dottrine del Calcolo Integrale.

Immaginiamo ora che la superficie materiale ABC senza cangiare nè di massa nè di estensione, si muti di forma per tale maniera che quella parte di ciascuna retta perpendicolare a PQ, la quale giace in essa ABC, movendosi secondo la sua direzione senza mutare nè una tal direzione nè la propria lunghezza, si trasporti intorno a questa retta PQ, disponendosi con una sua metà dall'una banda di questa PQ e coll'altra metà dalla banda contraria; intendendo che allorquando una di queste perpendicolari a PQ avrà parecchie parti separate giacenti nella ABC, queste parti, pria di trasportarsi come si è detto, si riuniscano insieme in una sola retta di una lunghezza uguale alla somma delle lunghezze separate di esse parti. E immaginiamo che una cosa somigliante avvenga esiandio per riguardo alla materia distribuita nel-l'altro piano, la quale in un modo affatto simile si supponga trasportata intorno a quella retta la cui projezione sul piano di ABC coincide con PQ.

Indicando con

$$f'(x, X)$$

l'attrazione che fra loro eserciterebbero, nella direzione perpendicolare ai due piani, le due precedenti rette di cui X, x sono le ascisse, dopo essere state trasportate nelle loro nuove posizioni e supposto che in esse si trovino ancora concentrate quelle stesse quantità di materia che avevamo detto qui sopra, sarà l'attrazione esercitata perpendicolarmente ai due piani fra le due superficie materiali cangiate di figura nella maniera descritta, data dalla espressione

$$\int_H^K dX \int_h^k dx \cdot f'(x, X).$$

Se ora noi paragoniamo $f(x, X)$ con $f'(x, X)$, noi scorgiamo che la seconda di queste quantità non è giammai minore della prima, ch'ella può talvolta essere uguale a questa, ma che necessariamente v'hanno valori di X, x pe'quali ella ne è più grande; perocchè, come si ha

dai Lemmi II e III, l'ultima disposizione delle due rette materiali attraentisi è quella che dà la massima attrazione possibile fra tutte le disposizioni che queste rette possono prendere movendosi lungo le proprie direzioni, laddove la prima disposizione può bene qualche volta trovarsi in questo caso, ma non sempre, e segnatamente ella non vi si trova quando la retta materiale appartenente alla ABC è la MON, la quale per la fatta supposizione è formata di più parti staccate. Per conseguenza dando differenti valori alla X, potranno forse in certi casi esservi alcuni di questi valori, pe'quali tutte le grandezze che potrà avere $f'(x, X)$ col mutarsi della x, sieno uguali alle corrispondenti grandezze di $f(x, X)$; e per questi valori di X si avrà

$$\int_h^k dx\cdot f'(x, X) = \int_h^k dx\cdot f(x, X).$$

Potranno anche in altri casi esservi dei valori di X pe'quali col cangiarsi della x si abbia talvolta $f'(x, X)$ uguale a $f(x, X)$, e talvolta $f'(x, X)$ maggiore di $f(x, X)$; e per questi valori di X sarà

$$\int_h^k dx\cdot f'(x, X) > \int_h^k dx\cdot f(x, X),$$

come si ha dalle dottrine della quadratura delle curve. Ma vi saranno eziandio necessariamente in ogni caso de'valori di X, pe'quali qualunque sia la x, sarà sempre $f'(x, X)$ maggiore di $f(x, X)$; tale sarebbe il valore di X corrispondente ad MON; e per questi ultimi valori di X si avrà, come qui sopra,

$$\int_h^k dx\cdot f'(x, X) > \int_h^k dx\cdot f(x, X).$$

Non vi sarà al contrario nessun valore di X pel quale si abbia $f'(x, X)$ minore di $f(x, X)$.

Segue da ciò che paragonando le grandezze delle due funzioni

$$\int_h^k dx\cdot f'(x, X), \quad \int_h^k dx\cdot f(x, X)$$

ora ad uno ed ora ad altro valore della X, si troveranno necessariamente de' valori di essa X pe'quali la prima di esse funzioni sarà maggiore della seconda; potranno forse esservi de' valori di questa X pe'quali essa prima funzione sia uguale alla seconda; ma non avverrà giammai che la prima funzione sia minore della seconda. Sarà perciò, come vien dato dalla dottrina della quadratura delle curve,

$$\int_H^K dX \int_h^k dx\cdot f'(x, X) > \int_H^K dX \int_h^k dx\cdot f(x, X);$$

l'attrazione cioè vicendevole delle due superficie materiali, secondo la direzione perpendicolare ai due piani, diverrà maggiore quando queste superficie passeranno dalla prima forma e disposizione alla seconda.

Secondo Caso. Potrà avvenire che fra le infinite rette le quali si possono condurre ne'piani delle due superficie materiali, non ve ne sia nessuna la quale abbia più parti separate giacenti nella superficie rispettiva; ma qualsivoglia di queste rette, quando seghi la corrispondente superficie, la segbi in due punti soltanto e vi giaccia con una sola sua parte.

Per questo secondo caso, ritenuto sempre che il sistema delle due superficie sia diverso da quello di due cerchii co'centri in una stessa retta perpendicolare ai loro piani, noi osserveremo prima di tutto, che alzata dal centro O di massa dell'una ABC di esse superficie (fig. 16) una retta perpendicolare al piano di essa ABC e la quale incontri in un punto che diremo o il piano dell'altra superficie, e condotte pei punti O, o due rette fra loro parallele e situate ne' piani suddetti, osserveremo dico, che per queste due rette vi saranno sempre delle posizioni colle quali l'una

almeno di esse rette dividerà la rispettiva superficie materiale in due parti non simmetriche, in due parti tali cioè che facendone rotare una di un mezzo giro intorno alla retta dividente, non potrà essa sovrapporsi interamente all'altra. Proviamo in fatti a supporre che una di queste rette, per esempio quella condotta per O, tagli sempre la superficie materiale esistente nel piano medesimo in due parti simmetriche, e supponiamo inoltre che questa retta, per una sua particolare direzione OF scelta arbitrariamente (fig. 14), abbia le sue due intersecazioni col contorno di ABC collocate da due bande opposte per riguardo al punto O. In questo supposto una siffatta superficie ABC sarà un cerchio col centro in O. Perciocchè, indicando con G una delle due intersecazioni di cui si tratta, e con OG' una retta condotta da O al contorno di ABC in un'altra direzione qualunque diversa dalla OG, siccome la ABC si suppone simmetrica intorno alla retta che divide per metà l'angolo GOG', così deesi avere la retta OG' uguale ad OG; e avendo ciò luogo per tutte le altre rette condotte da O in modo analogo ad OG', ne verrà che tutte le rette tirate da O al contorno della ABC saranno oguali. Supponiamo ora in vece che la retta condotta per O, continuando a dividere sempre, in tutte le sue direzioni, la superficie ABC in due parti simmetriche, abbia in una sua posizione OF scelta a piacere (fig. 15) le due intersecazioni con ABC situate da una medesima banda per riguardo ad O. È facile il vedere che lo stesso dovrà avvenire per qualunque altra sua posizione OF' in conseguenza della simmetria che dee aver luogo, nella nostra ipotesi, intorno ad una retta che divida per metà l'angolo FOF' formato da queste due posizioni, ed inoltre le due intersecazioni fatte colla superficie ABC dalla seconda posizione OF' della suddetta retta passante per O dovranno trovarsi a quelle medesime distanze da O come le due intersecazioni appartenenti alla prima posizione della retta medesima. Per conseguenza ABC sarà un anello rinchiuso fra due periferie circolari aventi O per comun centro.

Ciò che si è detto di ABC vale altresì per l'altra superficie materiale, la quale nel caso della supposta simmetria dovrà essa pure o essere un cerchio intorno ad o, o un anello circolare pure col centro in o.

Ora nel presente secondo caso della nostra dimostrazione noi non possiamo ammettere che nel sistema delle due superficie materiali vi abbiano anelli circolari; giacchè in questo supposto esso sistema apparterrebbe evidentemente al primo caso di essa dimostrazione il quale noi abbiamo già esaminato, e sarebbe escluso, per ipotesi, dal presente secondo caso del quale ora ci occupiamo. Non può adunque nè l'una nè l'altra superficie essere formata ad anello. In quanto alla forma di cerchio intorno ad Oo, potrà bensì questa concedersi per una sola delle due superficie materiali, ma non già per tutte e due contemporaneamente; giacchè questo sarebbe contrario all'ipotesi assunta sul principio della dimostrazione, essendoci noi proposti in questa di considerare quelle disposizioni e forme di esse superficie, le quali sono diverse da un sistema di due cerchii intorno ad una retta perpendicolare ai loro piani. Le disposizioni adunque che noi dobbiamo considerare in questo secondo caso non sono tali che possa aver luogo in ambedue le superficie materiali quella costante divisione in due parti simmetriche della quale abbiamo parlato. Ma vi debbono essere necessariamente delle direzioni per le rette condotte per O e per o, colle quali o l'una o l'altra di queste due rette, o sì l'una che l'altra, dividano la corrispondente superficie in due parti non simmetriche.

Siano adunque le due superficie materiali di cui si tratta divise, o tutte e due o una sola, in due parti non simmetriche da un piano innalzato perpendicolarmente alle due superficie medesime, sulla retta POQ (fig. 16) passante pel centro O di massa della ABC. Il che, per quello che ora abbiamo veduto, dee sempre potersi ottenere col dare una opportuna direzione alla retta POQ. Prendiamo questa retta per asse delle ascisse, e operando allo stesso modo come nel primo caso chiamiamo rispettivamente

H, K la più piccola e la più grande ascissa de' punti appartenenti alla superficie materiale ABC,

h, k la più piccola e la più grande ascissa de' punti appartenenti alla projezione abc. Supponiamo che attraverso alla ABC sia condotta una qualsivoglia retta RS perpendicolare a

POQ terminata in R, S al contorno di essa ABC, e avente X per ascissa; e che attraverso all'altra superficie materiale sia condotta un'altra retta parallela a RS, co' termini nel contorno di questa seconda superficie medesima, della qual nuova retta, che noi chiameremo rs, la projezione sul piano della ABC abbia x per ascissa. Concepiamo inoltre che nella RS si trovi uniformemente distribuita una tale quantità di materia ch'ella stia alla massa di tutta la ABC, come un rettangolo avente questa RS per lunghezza e avente l'unità delle lunghezze per larghezza sta all'intera estensione della ABC; e facciamo una supposizione somigliante per riguardo alla rs e all'altra superficie materiale. E chiamiamo, come precedentemente,

$$f(x, X)$$

l'effetto secondo la direzione perpendicolare ai due piani, della vicendevole attrazione esercitata fra le due quantità di materia le quali si suppongono in RS e in rs.

Immaginiamo dopo ciò che la superficie materiale ABC, conservando la medesima estensione di prima, si cangi di forma per tal modo che tutte le rette in essa inscritte e perpendicolari a POQ, movendosi secondo la propria direzione senza cangiare di lunghezza, vengano a collocarsi intorno a POQ in maniera da essere divise per metà dalla POQ medesima. Concepiamo che un somigliante cangiamento si effettui eziandio per riguardo all'altra superficie materiale, in cui pure le rette che vi sono inscritte e che hanno le rispettive projezioni perpendicolari a POQ, per mezzo di movimenti secondo la loro direzione sieno spostate di tal modo che le loro projezioni vengano ad essere divise per metà dalla stessa POQ; e chiamiamo

$$f'(x, X)$$

l'attrazione vicendevole che verrà esercitata, nella direzione perpendicolare ai due piani, fra la quantità di materia distribuita nella RS e quella distribuita nella rs, dopo che queste saranno state spostate nel modo dichiarato, supponendo che queste quantità di materia sieno le stesse di prima sì per la RS che per la rs.

Noi possiamo notare che per valori quali si vogliano di X, x le supposte rette RS, rs, dopo lo spostamento di cui si è parlato, hanno la disposizione più favorevole per potersi attrarre a vicenda nel verso perpendicolare ai due piani, fra tutte le disposizioni che queste possono prendere movendosi lungo se medesime; ma che per riguardo alla prima loro disposizione vi sono necessariamente de' valori di X e di x pe' quali essa disposizione non è la più vantaggiosa per una siffatta attrazione vicendevole. In fatti

1.° Può essere simmetrica la superficie materiale ABC intorno al piano eretto sulla POQ e non esserlo l'altra superficie materiale; e allora, siccome tutte le rette inscritte in ABC e perpendicolari alla POQ sono divise per mezzo da essa POQ, ma così non avviene di molte delle rette analoghe appartenenti alla projezione abc, così vi sono molti valori di x pe' quali la disposizione della rs non è la più favorevole per la sua attrazione colla RS, nella direzione già detta;

2.° Può non essere simmetrica la superficie ABC intorno all'anzidetto piano, ed esserlo in vece l'altra superficie materiale; e in questo caso, per la stessa ragione che abbiamo or ora esposta, vi saranno molti valori della X pe' quali la RS non avrà la più favorevole disposizione per la sua attrazione colla rs nel verso già detto;

3.° Può essere in fine che nè l'una nè l'altra delle due superficie materiali sia simmetrica intorno al suddetto piano: in questo ultimo supposto, siccome il punto O è il centro di massa della ABC, ed essa ABC non è simmetrica intorno all'anzidetto piano eretto su POQ, così vi saranno de' valori di X pe' quali la RS giacerà per una lunghezza maggiore della sua metà dalla banda sinistra del suddetto piano, ed altri valori di X pe' quali essa RS giacerà per più della sua metà dalla banda destra; e riguardo alla rs dovranno esservi de' valori di x pe' quali essa rs non sarà divisa per mezzo dal suddetto piano, ma eccederà o dalla banda destra

o dalla sinistra del medesimo; e però noi potremo sempre prendere la X e la x in modo che delle due rette RS, rs l'una sopravvanzi maggiormente dalla destra banda di esso piano eretto su POQ, e l'altra dalla banda sinistra, e così esse rette non abbiano la disposizione più favorevole per attraersi vicendevolmente nella direzione più volte detta.

In conseguenza di tutto ciò potranno ben esservi de' valori di X e di x pe' quali si abbia

$$f'(x, X) = f(x, X),$$

ma ve ne saranno eziandio necessariamente di quelli, pe' quali sarà

$$f'(x, X) > f(x, X),$$

laddove non potrà mai, per nessun valore di X e di x, essere la $f'(x, X)$ più piccola di $f(x, X)$. Dopo ciò è facile a vedersi che la quantità

$$\int_H^K dX \cdot \int_h^k dx \cdot f'(x, X),$$

la quale esprime l'attrazione vicendevole delle due superficie materiali, nella direzione perpendicolare ai due piani, dopo il cangiamento di forma sarà maggiore della quantità

$$\int_H^K dX \cdot \int_h^k dx \cdot f(x, X)$$

esprimente l'attrazione fra le medesime superficie materiali, secondo la medesima direzione, avanti il loro cangiamento di forma.

Deesi dunque conchiudere che per tutte le forme e disposizioni possibili che possono darsi alle due superficie materiali, purchè tali forme e disposizioni non sieno quelle di due cerchii coi centri collocati in una stessa retta perpendicolare ai loro piani, la forza con cui queste due superficie si attraggono nella direzione perpendicolare ai loro piani, può sempre essere aumentata mediante un opportuno cangiamento in esse forme o in esse disposizioni. Il massimo perciò di attrazione, del quale noi abbiamo già dimostrata l'esistenza, non può aver luogo se non allorquando queste due superficie sono entrambe circolari e collocate come si è detto.

6. *Teorema II.* Supponiamo che in due piani paralleli fra loro sieno collocate due quantità di materia, condensate entrambe in ispazii meramente superficiali, ma ciascuna delle quali abbia nelle sue varie parti delle densità differenti, sia cioè con queste sue varie parti disposta in modo che pari masse prese in diverse di queste parti corrispondano a estensioni superficiali ineguali; e supponiamo inoltre che ciascuna di queste due quantità di materia possa cangiare disposizione senza però uscire dal suo piano, e senza che avvenga in nessuna delle sue parti nè condensazione nè rarefazione. Se si vuole che queste due quantità di materia esercitino fra loro nel verso perpendicolare ai due piani la più grande attrazione possibile, converrà ch'esse sieno disposte nella maniera seguente. La parte più densa della materia appartenente all'uno dei piani dovrà essere distribuita in uno spazio circolare; la parte che succede alla precedente nell'ordine delle densità dovrà formare un anello circolare contiguo e concentrico a questo spazio circolare; la parte che ha la più grande densità dopo le due precedenti dovrà formare un altro anello circolare esteriore, contiguo e concentrico all'anello precedente; e così di seguito tutte le altre parti di materia esistenti nel medesimo piano dovranno disporsi in tanti anelli circolari contigui fra loro e concentrici col cerchio centrale, succedendosi gradatamente l'un anello all'intorno dell'altro secondo che esse parti si succedono nell'ordine delle densità. Una disposizione affatto somigliante dovrà aver luogo rispetto alla materia distribuita nell'altro piano; e oltracciò il centro del cerchio e degli anelli esi-

stenti nell'uno de' piani, e il centro del cerchio e degli anelli esistenti nell'altro piano, dovranno trovarsi in una stessa retta perpendicolare ai due piani.

Dimostrazione. Sia l'estensione superficiale che viene occupata dalla materia esistente nell'un de'piani, composta delle parti

$$A,\ B,\ C,\ ---\ M,\ N,$$

nelle quali questa materia abbia quelle densità a cui nell' unità di superficie corrisponderebbero rispettivamente le masse

$$a,\ [a+b],\ [a+b+c],\ ---\ [a+b+c\ ----+m],\ [a+b+c\ ----+m+n],$$

essendo b, c, --- m, n, quantità tutte positive; le quali densità noi per brevità appelleremo la densità a, la densità $[a+b]$, ecc. rispettivamente. E similmente l'estensione occupata dalla materia che si trova nell'altro piano sia composta delle parti

$$A',\ B',\ C',\ ---\ M',\ N',$$

ove la materia medesima sia distribuita con tali densità che all'unità di superficie possano corrispondere rispettivamente le masse

$$a',\ [a'+b'],\ [a'+b'+c'],\ ---\ [a'+b'+c'\ ----+m'],\ [a'+b'+c'\ ----+m'+n'].$$

Noi osserveremo primieramente che in luogo di concepire in ciascuno dei due piani tante distinte parti superficiali ove la materia abbia delle densità successivamente crescenti, noi possiamo immaginare che vi abbia una serie di superficie materiali sovrapposte l'una all'altra e di estensioni decrescenti. Possiamo cioè immaginare che in quel piano che or ora noi abbiamo considerato per primo, vi sieno: 1.° una superficie dell'estensione $A+B+C\ ---+M+N$, formata di più distinte parti delle estensioni A, B, C, --- M, N rispettivamente, e nella quale la materia sia distribuita colla densità a; 2.° una superficie dell'estensione $B+C\ ----+M+N$, ove la materia sia distribuita colla densità b, e che sia sovrapposta alla precedente in modo da lasciarne scoperta la sola parte dell'estensione A; 3.° una superficie dell'estensione $C\ ----+M+N$, ove la materia abbia la densità c, e la quale sia sovrapposta all'ultima delle due precedenti, in guisa da lasciare scoperta in questa la parte dell'estensione B; e così successivamente, di maniera che si abbia in fine una superficie dell'estensione N, ove la materia abbia la densità n, e la quale sia sovrapposta all'ultima di quelle che la precedono cioè alla superficie dell'estensione $M+N$, lasciando scoperta in questa la parte dell'estensione M. E una cosa somigliante possiamo concepire per riguardo all'altro piano.

In quest'altra maniera di vedere, la disposizione che noi abbiamo asserito essere la più vantaggiosa per l'attrazione viene a risultare per l'uno de'piani quella di tanti cerchii materiali concentrici sovrapposti, aventi rispettivamente le estensioni $[A+B+C\ ----+M+N]$, $[B+C\ ---+M+N]$, $[C\ ---+M+N]$, --- $[M+N]$, N, e le densità a, b, c, --- m, n; e per l'altro piano quella similmente di tante superficie materiali circolari, sovrapposte, concentriche, aventi rispettivamente le estensioni

$$[A'+B'+C'\ ---+M'+N'],\ [B'+C'\ ---+M'+N'],\ [C'\ ---+M'+N'],\ ---\ [M'+N'],\ N',$$

e le densità a', b', c', --- m', n'.

Per convincerci ora che quest'ultima disposizione sia realmente la più vantaggiosa per l'attrazione, si osservi che se noi prendiamo una ad arbitrio delle superficie materiali $(A+B+C\ ----+M+N)$, $(B+C\ ----+M+N)$, ecc. appartenenti all'uno dei piani, ed una ad arbitrio fra quelle appartenenti all'altro piano, noi veggiamo dal Teorema I.° che avendo luogo la indicata ultima forma e disposizione, esse due superficie si trovano nella condizione più favorevole per attrarsi a vicenda perpendicolarmente ai due piani, e che questa loro attrazione dovrebbe necessariamente diminuire quando esse cangiassero di posizione rela-

tiva, ovvero quando esse, senza uscire de' loro piani e conservando la stessa estensione e la stessa uniforme densità, soffrissero o l'una o l'altra o entrambe un qualche mutamento di forma. E siccome ciò vale per tutte le diverse combinazioni di due delle dette superficie materiali, l'una appartenente all'uno de' piani e l'altra all'altro, così tutte le attrazioni parziali donde risulta l'attrazione totale delle due quantità di materia esistenti ne' due piani suddetti, verrebbero a diminuire quando nelle forme e nelle posizioni relative delle diverse superficie materiali medesime avvenisse qualche cangiamento, tenendo conto, nel caso di questo cangiamento, dell'effetto dell'attrazione nel solo verso perpendicolare ai due piani. Segue da ciò che questa disposizione a cerchii concentrici sovrapposti, alla quale nel primo modo di vedere corrisponde quella a cerchii e ad anelli concentrici, è effettivamente la più favorevole per l'attrazione secondo il verso indicato.

7. *Lemma II.* Se un punto materiale movendosi in un piano parallelo a un cerchio materiale di uniforme densità, viene ad avvicinarsi all'asse di questo cerchio (a una retta cioè passante pel suo centro e perpendicolare al suo piano), l'attrazione che un tal punto sente dal cerchio nella direzione dell'asse di questo, si aumenta.

Dimostrazione. Concepiamo che da questo punto materiale sia abbassata una perpendicolare sul piano di questo cerchio, supponendo all'uopo che questo piano sia opportunamente prolungato. Concepiamo che pel piede P di questa perpendicolare (fig. 17) sia condotta una retta al centro O del cerchio, e una retta RPS perpendicolare a PO. Prendendo RS per asse delle ascisse, e P per origine di queste ascisse, supponiamo che in una corda MN parallela a PO e la cui ascissa sia x, si trovi distribuita uniformemente una quantità di materia la quale sia alla total massa del cerchio, come il rettangolo che ha MN per lunghezza e l'unità delle lunghezze per larghezza sta alla superficie del cerchio medesimo. E chiamiamo

r il raggio del cerchio,

a la lunghezza della retta PO,

$f(x, a)$ l'attrazione esercitata, secondo l'asse del cerchio, fra il supposto punto materiale e la massa che abbiamo immaginato distribuita su MN. L'attrazione che ha luogo nella direzione medesima, fra il punto materiale e l'intero cerchio, sarà misurata dall'espressione

$$\int_{-r}^{+r} dx \cdot f(x, a).$$

Ora noi abbiamo dal Lemma I.°, che la quantità

$$f(x, a)$$

aumenta a proporzione che la a diminuisce. Perciò al diminuire di a, la quantità

$$\int_{-r}^{+r} dx \cdot f(x, a)$$

vale a dire l'attrazione fra il punto materiale e il cerchio, secondo la direzione dell'asse di quest'ultimo, si aumenta anch'essa. Egli è poi evidente non essere necessario che il moto del punto materiale avvenga secondo una retta parallela a PO, bastando che la distanza dall'asse del cerchio diminuisca, stantechè l'attrazione è sempre quella medesima a uguaglianza di distanze dall'asse.

8. *Teorema III.* Se in due piani paralleli si trovano disposte due quantità di materia ciascuna delle quali sia formata di più parti diversamente dense; se cotali parti possono muoversi, ciascuna nel proprio piano, per tal modo da poter prendere delle forme e delle disposizioni qualunque; e se inoltre qualsivoglia di esse parti può restringersi e condensarsi fino a poter prendere, quando lo si voglia, la più grande delle densità che avevano luogo primitivamente nel piano rispettivo; la maggiore attrazione che potrà ottenersi fra esse due quantità di materia nel verso perpendicolare ai due piani, mediante questi cangiamenti, si avrà allor-

quando esse saranno distribuite in due cerchii co' centri in una stessa retta perpendicolare ai loro piani, e con delle densità che sieno rispettivamente le più grandi fra quelle che avevano luogo dapprincipio ne' piani medesimi.

Dimostrazione. Supponiamo che le due quantità di materia di cui si tratta abbiano una disposizione qualsivoglia differente da quella di cotali cerchii. Egli è chiaro che si potrà cominciare ad aumentarne la vicendevole attrazione nel verso supposto col dar loro la disposizione a cerchii e ad anelli concentrici collocati i men densi all'esterno de' più densi nel modo dichiarato nel Teorema II; se già questa disposizione non era quella che aveva luogo dapprincipio.

Si potrà in seguito aumentare ancora cotal vicendevole attrazione, col fare in modo che nell'uno qualunque de' due piani la materia de' diversi anelli si avvicini al cerchio centrale per formare intorno a questo cerchio altri anelli di minore area, i quali abbiano lo stesso centro di esso e la stessa densità, e seco più non formino che un cerchio unico più grande, di densità uniforme. Potendosi infatti concepire che questo cangiamento venga ottenuto col mezzo di un moto delle molecole o piccole porzioni di materia componenti i diversi anelli, mediante il quale esse molecole si accostino all'asse de' diversi cerchii materiali che possono concepirsi sovrapposti l'uno all'altro nell'altro piano, giusta il modo esposto nel Teorema II, egli avverrà pel Lemma IV che questo cangiamento di disposizione della materia dovrà aumentar l'attrazione.

Si potrà infine aumentare ancora la stessa attrazione col dare la disposizione medesima anche alla materia esistente nell'altro piano. Donde segue evidentemente essere vero quanto ci eravamo proposti di dimostrare.

Osservazione. La dimostrazione precedente serve pel caso che in ciascuno de' due piani la densità varii dall'una parte materiale all'altra per salti o per differenze finite; ma è facile il vedere che la proposizione vale anche pel caso che una tale densità varii in ciascuno de' piani per gradazioni insensibili. Io non mi fermo a darne dimostrazione, per non occupare i lettori in cosa evidente, e la quale, volendo, può ciascuno agevolmente dimostrare da se.

9. *Scolio I*. Ne' due Teoremi precedenti e nel Lemma IV si è supposto che la materia attrattivo fosse distribuita e concentrata in ispazii meramente superficiali. È facile il far passaggio a corpi di forma prismatica retta, e il dimostrare anche per questi delle proposizioni analoghe. E qui per corpo prismatico retto o per prisma retto io intendo qualsivoglia solido compreso da due piani paralleli e da una superficie generata dal moto di una retta mantenuta perpendicolare ad essi due piani, lungo una linea rientrante qualsivoglia o rettilinea o curvilinea o mistilinea: possono anche esser parecchie le superficie di quest'ultima specie, abbracciando una di esse tutte le altre, ed essendo la materia del solido distribuita nell'intervallo fra la prima e le seconde.

Immaginiamoci in primo luogo che si abbiano due prismi retti, ciascuno di densità uniforme per tutta la sua solidità, potendo però la densità diversificare dall'uno all'altro; e i quali abbiano le loro quattro basi tutte parallele fra loro, e collocate di tal maniera che i piani prolungati di quelle dell'uno non possano segare l'altro. Se si cangia in parecchi modi la forma di queste basi, senza cangiare nè i piani ove esse si trovano, nè le loro estensioni, la maggiore attrazione che si potrà avere fra i detti prismi nella direzione perpendicolare a cotali loro basi, avrà luogo allorquando queste basi avranno la forma di altrettanti cerchii co' centri disposti in una medesima retta perpendicolare ai loro piani.

Abbiano in fatti le basi di questi prismi una forma qualsivoglia. Immaginiamo che parallelamente a queste basi si sia condotto un piano il quale lasci ambedue i prismi da una medesima banda; e chiamiamo p, q, P, Q le distanze di questo piano dalle quattro basi dei prismi, cominciando dalla più vicina e venendo gradatamente alle più lontane. Supponiamo che attraverso al prisma più vicino al piano immaginato, alla distanza z da questo medesimo piano si sia condotto un altro piano similmente parallelo alle basi, e che nella sezione fatta da questo

secondo piano nel detto prisma si trovi concentrata e uniformemente distribuita una quantità di materia uguale a quella che potrebbe comporre un altro prisma retto avente questa sezione per base, l'unità di lunghezza per altezza, e la densità del prisma segato per densità. Supponiamo in fine che ottraverso all'altro prisma, alla distanza Z dal primo de' piani immaginati, siasi condotto un terzo piano similmente parallelo alle diverse basi, e che nella sezione fatta in questo secondo prisma da un siffatto terzo piano si trovi concentrata e uniformemente distribuita una massa uguale a quella di un prisma avente questa medesima sezione per base, l'unità di lunghezza per altezza, e la densità del prisma segato per densità. E chiamiamo

$$f(z, Z)$$

l'attrazione vicendevole delle due quantità di materia che supponiamo distribuite in queste due sezioni, considerando soltanto l'effetto attrattivo che ha luogo nella direzione perpendicolare alle basi. L'attrazione vicendevole de' due prismi secondo questa direzione sarà

$$\int_p^Q dZ \int_p^q dz \cdot f(z, Z).$$

Ora fra tutti i diversi valori che può acquistare la quantità

$$f(z, Z)$$

per determinate grandezze di z, Z, col dare diverse forme alle basi de' prismi, il più grande possibile si ha quando questi due prismi hanno la forma di due cilindri retti a basi circolari co' centri di queste basi collocati in una stessa retta perpendicolare ad esse basi medesime: perocchè in questo caso le due sezioni di cui si è parlato or ora, sono due cerchii co' centri in una stessa retta perpendicolare ai loro piani, alla quale disposizione, come risulta dal Teorema I, corrisponde la più grande attrazione possibile fra queste due sezioni supposte materiali, secondo la detta direzione perpendicolare ai loro piani.

Segue da ciò che questa forma de' due prismi è altresì quella a cui corrisponde il massimo valore della quantità

$$\int_p^Q dZ \int_p^q dz \cdot f(z, Z),$$

esprimente l'attrazione de' due prismi nella direzione perpendicolare alle loro basi.

Osservazione. È facile a vedersi che la dimostrazione può venire estesa anche al caso che in luogo di avere fra due dei piani un solo prisma retto, si abbia una serie di prismi pur retti ugualmente alti ed ugualmente densi, e che fra gli altri due piani si abbia similmente, in luogo d'un prisma unico, un'altra serie di prismi retti uguali fra loro in altezza e in densità. Anche in questo caso onde avere la massima attrazione nel verso perpendicolare ai quattro piani fra la massa compresa in mezzo ai primi due piani e quella compresa in mezzo agli altri due, col cangiar forma e disposizione alle masse medesime, mantenendo però la forma di prismi retti colle basi sempre negli stessi piani, converrà ridurre ciascuna delle due masse ad un unico cilindro retto a base circolare, e collocare i due cilindri per modo che i loro assi sieno parti di una medesima retta.

10. *Scolio II*. Supponiamo in secondo luogo che fra due piani paralleli l'uno all'altro si trovino disposti più prismi retti di diverse densità, contigui o no fra loro, e aventi le basi in questi medesimi piani; e che fra due altri piani paralleli ai precedenti, e collocati fuori dello spazio compreso fra i due piani precedenti medesimi, si trovino disposti parecchi altri prismi retti, anch'essi di diverse densità, contigui o no fra loro, e i quali abbiano le basi in questi ultimi piani; e supponiamo inoltre che le basi di tutti questi prismi tanto dell'uno quanto dell'altro sistema possano cangiare di forma e di posizione ma non di estensione. La massima attrazione che potrà venire esercitata fra i due sistemi di prismi, perpendicolarmente alle basi di questi,

avrà luogo quando i prismi dell'un sistema avranno la forma di tanti anelli cilindrici concentrici abbracciantisi l'un l'altro, aventi per loro sezioni trasversali altrettanti anelli circolari, e disposti all'intorno e a contatto di un cilindro centrale a sezione circolare, essendo questo cilindro centrale formato colla materia del prisma più denso, ed essendo collocato ciascuno degli anelli tanto più all'esterno quanto men denso è il prisma da cui sarà derivato; e quando insieme con ciò i prismi dell'altro sistema avranno una forma e una disposizione affatto somigliante, essendo inoltre gli assi de' due cilindri centrali formati da due parti di una medesima retta.

Per dimostrarlo si riferiranno i due sistemi di prismi a un quinto piano il quale lasci da una medesima banda sì l'uno che l'altro sistema; si chiameranno p, q, P, Q le distanze di questo nuovo piano dai quattro piani precedenti, cominciando dal più vicino e venendo gradatamente ai più lontani; si concepirà che il sistema de' prismi più vicini al quinto piano, a una qualsivoglia distanza z da questo piano medesimo, venga tagliato da un altro piano parallelo ai precedenti, e che in tutte le sezioni fatte da quest'ultimo piano ne' differenti prismi di questo sistema, si trovino concentrate e uniformemente distribuite delle quantità di materia separatamente uguali a quelle delle quali questi medesimi prismi sarebbero composti nel caso che avendo le stesse basi e le stesse densità avessero tutti l'unità di lunghezza per loro altezza; si immaginerà in fine che attraverso all'altro sistema di prismi a una distanza qualsivoglia Z dal quinto piano passi un ultimo piano, e che nelle sezioni fatte da questo ne' differenti prismi di un siffatto secondo sistema si trovino separatamente concentrate e uniformemente distribuite delle masse uguali a quelle di cui consterebbero i prismi rispettivi nel caso che avendo le stesse basi e la stessa densità avessero l'unità delle lunghezze per altezza; e si chiamerà

$$f(z, Z)$$

l'effetto dell'attrazione esercitata secondo il verso perpendicolare alle basi de' prismi, fra la quantità di materia supposta distribuita nell'ultimo piano e quella nel penultimo. In seguito si compirà la dimostrazione in un modo analogo a quello tenuto nello Scolio precedente, salvi que' mutamenti che agevolmente si riconosceranno del caso. Il che non importando veruna difficoltà noi lasceremo che il facciano da se i lettori.

Questa proposizione si può evidentemente estendere anche al caso che la densità della materia nell'uno e nell'altro de' due sistemi di prismi, in luogo di variare a salti, si muti per gradazioni insensibili, ovvero si cangi dall'un punto all'altro in una maniera mista, cioè in alcuni luoghi a salti ed in alcuni per gradazioni impercettibili; sempreché però in tutti i punti di una retta perpendicolare alle basi de' prismi, condotta per un punto qualunque in uno qualsivoglia dei due sistemi, la densità sia la medesima.

11. *Scolio III.* Abbiasi in terzo luogo un cilindro retto ordinario o a basi circolari, il quale attiri un punto materiale collocato fuori dello spazio compreso fra i piani prolungati di queste sue basi, e venga avvicinato questo punto all'asse del cilindro mediante un moto parallelo alle basi medesime. L'attrazione fra questo cilindro e questo punto nel verso perpendicolare alle basi si aumenterà.

Supponiamo che in una sezione del cilindro fatta mediante un piano parallelo alle sue basi e passante alla distanza z dal punto materiale, si trovi concentrata e uniformemente distribuita quella massa di cui consterebbe un altro cilindro avente uguali le basi ed uguale la densità col proposto e avente l'unità delle lunghezze per altezza. E chiamiamo

a la distanza del punto materiale dall'asse del cilindro;

p la distanza dello stesso punto dalla più vicina delle basi del cilindro medesimo;

q la distanza del punto medesimo dalla base più lontana di esso cilindro;

$f(a, z)$ la componente secondo l'asse del cilindro, dell'attrazione fra questo punto materiale e la massa che abbiamo immaginato distribuita nella supposta sezione di esso cilindro.

L'attrazione dell'intero cilindro verso il punto materiale secondo la direzione dell' asse sarà espressa da

$$\int_p^q dz \cdot f(a, z).$$

Ora siccome la quantità $f(a, z)$ aumenta col diminuire della a (Lemma IV), così allorquando la a diminuisce si aumenta eziandio la quantità

$$\int_p^q dz \cdot f(a, z).$$

Dunque ecc. C. D. D.

12. *Corollario I.* Supponendo che si abbiano i due sistemi di cilindri e di anelli cilindrici de' quali si è parlato nello Scolio II, immaginiamo che nell'uno di questi sistemi la materia degli anelli si avvicini al cilindro centrale per mezzo di movimenti paralleli alle basi, di tal maniera che tutta questa materia acquisti la medesima densità di esso cilindro centrale, e che tutto il sistema si riduca ad un unico cilindro retto a base circolare avente per asse l'asse di questo cilindro centrale medesimo; e immaginiamo che in seguito avvenga un somigliante cangiamento anche per riguardo all'altro sistema, il quale per conseguenza si riduca esso pure ad un unico cilindro retto a base circolare avente per asse l'asse del rispettivo cilindro centrale e per densità la densità di questo. L'attrazione vicendevole de' due sistemi verrà con ciò ad aumentarsi, e perciò l'attrazione finale sarà maggiore di quella che aveva luogo precedentemente fra i due sistemi ad anelli concentrici, e più ancora sarà maggiore dell'azione attrattiva che aveva luogo nella direzione perpendicolare alle basi, fra i due sistemi di prismi considerati nello Scolio II, prima che questi prismi fossero ridotti alla figura di cilindri e di anelli.

13. *Corollario II.* Abbiansi due cilindri retti a basi circolari i cui assi sieno due porzioni di una medesima retta, e i cui raggi, le altezze, e le densità sieno uguali fra loro ovvero differenti dall'uno all'altro in un modo qualunque. Se l'uno di questi cilindri verrà a restringersi nel verso laterale, per modo però che il luogo del suo centro, la direzione del suo asse, la sua lunghezza, e la sua massa rimangano i medesimi di prima, e solamente se ne aumenti uniformemente in tutte le parti la densità a proporzione che se ne restringono le basi, l'attrazione fra questo e l'altro cilindro si renderà maggiore. Si può infatti concepire che questo restringimento venga ottenuto mediante un trasporto di materia secondo una direzione perpendicolare all' asse de' cilindri, per un tal verso da avvicinarsi all' asse medesimo; pel quale trasporto l'attrazione fra ciascun punto materiale trasportato e l'altro cilindro, considerata nella direzione degli assi, viene ad aumentarsi. Per conseguenza anche la somma delle attrazioni, secondo gli assi de' cilindri, fra tutte le parti della materia del cilindro che si condensa e l' altro cilindro, vale a dire la vicendevole attrazione de' due cilindri, mediante un tale restringimento si rende maggiore.

Osservazione. Noteremo in questo luogo che tutte le proposizioni dimostrate finora valgono per qualsivoglia legge di attrazione, purchè ella decresca col crescere delle distanze. È facile infatti il vedere che il Lemma I, da noi dimostrato nel supposto che si tratti della gravitazione, può estendersi a qualsivoglia legge diversa da quella del quadrato reciproco delle distanze; e tutte le altre proposizioni si sono dimostrate indipendentemente da questa legge.

14. *Teorema IV.* Concepiamo che un ordinario cilindro retto di uniforme densità attiri in virtù della gravitazione un punto materiale collocato esteriormente in una retta alzata perpendicolarmente sopra una delle sue basi, da un punto preso o al di dentro della periferia di questa base o nella periferia medesima. E concepiamo che questo cilindro, mantenendo il suo centro nella stessa posizione, conservando la stessa massa, lo stesso raggio, e la stessa direzione dell' asse, si allunghi secondo l'asse stesso e si rarefaccia, senza che però colla base più vicina al punto materiale attirato arrivi a sorpassare questo punto. Con un tale cangiamento di

volume, l'attrazione esercitata fra il cilindro e il punto, nella direzione dell'asse del cilindro stesso, diverrà maggiore.

Dimostrazione. Sia (fig. 18)

A il punto attratto,

p il piede della perpendicolare calata da questo punto A sulla base del cilindro più vicina al punto A medesimo; il quale punto p noi supporremo per ora che non cada nè nel centro nè nella circonferenza; considereremo poi questi due casi sul fine della dimostrazione. Chiamiamo

$2b$ la lunghezza del cilindro,

a la distanza del suo centro da un piano parallelo alle basi e passante per A.

Prendiamo ad arbitrio nell'interno del cilindro un punto O; e nella base del cilindro più vicina ad A prendiamo un tal punto O' che la OO' sia parallela all'asse del cilindro medesimo. E chiamiamo

z la lunghezza di una retta condotta da O ad O' e prolungata fino all'incontro col piano passante per A e parallelo alle basi,

x la lunghezza della retta $p\,O'$,

φ la lunghezza della stessa $p\,O'$ prolungata dalla banda di O' fino alla circonferenza della base circolare $rsRS$ ove essa pO' si trova. Si conduca per p il diametro rpR, il quale verrà diviso in p in due segmenti ineguali rp, Rp; si determini l'angolo fatto dal segmento minore rp colla retta pO', supponendo quest'angolo sempre situato, per rispetto a rp, dalla banda di s, di maniera che dando successivamente diverse posizioni alla pO' intorno a p nel verso da r ad s, R, S, esso angolo cresca gradatamente dal valore *zero* fino al valore 2π; e si chiami

ω un siffatto angolo.

Si immagini nel cilindro un piccolo solido, il quale abbia un angolo solido in O e sia compreso dalle seguenti superficie, cioè:

1.° due piani paralleli alle basi del cilindro, l'uno situato alla distanza z, e l'altro alla distanza $z+\Delta z$ dal punto A;

2.° due superficie cilindriche descritte intorno alla retta Ap come a loro asse, l'una del raggio x e l'altra del raggio $x+\Delta x$,

3.° due piani passanti per la Ap e perciò perpendicolari alle basi del cilindro, l'uno dei quali faccia con rp l'angolo ω, e l'altro l'angolo $\omega+\Delta\omega$, prendendo questi angoli per riguardo a cotale rp dalla medesima banda da cui si è preso l'angolo ω poco sopra.

Il volume di questo piccolo solido sarà

$$\Delta z\cdot\Delta x\cdot x\Delta\omega\cdot(1+P\Delta x),$$

essendo $P\Delta x$ una quantità che svanisce con Δx.

La distanza dal punto O al punto A sarà

$$\sqrt{x^2+z^2}.$$

Per conseguenza se la massa del piccolo solido fosse concentrata nel punto O, la sua attrazione col punto A sarebbe

$$\frac{H\cdot\Delta z\cdot\Delta x\cdot x\Delta\omega\cdot(1+P\Delta x)}{x^2+z^2},$$

essendo H un coefficiente costante per riguardo a x, ω, z, ma variabile insieme colla massa del punto attratto e colla densità del cilindro attraente, mutandosi in ragione diretta sì di una tal massa che di una tale densità.

Decomponendo quest'attrazione in due forze l'una parallela all'asse del cilindro e l'altra perpendicolare, la componente parallela sarà

$$\frac{H \cdot z x \cdot \Delta z \cdot \Delta x \cdot \Delta \omega \cdot (1 + P \Delta x)}{(x^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

donde si ha per le regole del calcolo integrale che indicando con C l'azione attrattiva del totale cilindro verso il punto A nella direzione dell'asse, sarà

$$C = \int_0^{2\pi} d\omega \cdot \int_{a-b}^{a+b} dz \cdot \int_0^{\phi} dx \cdot \frac{H x z}{(x^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Eseguendo ora la prima integrazione si ha

$$\int dx \cdot \frac{H x z}{(x^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{H z}{\sqrt{x^2+z^2}} + \text{Cost.}$$

$$\int_0^{\phi} dx \cdot \frac{H x z}{(x^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = H - \frac{H z}{\sqrt{\phi^2+z^2}}.$$

Colla seconda integrazione si ottiene

$$\int dz \cdot \int_0^{\phi} dx \cdot \frac{H x z}{(x^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \int dz \cdot \left\{ H - \frac{H z}{\sqrt{\phi^2+z^2}} \right\}$$

$$= H z - H \sqrt{\phi^2+z^2} + \text{Cost.}$$

$$\int_{a-b}^{a+b} dz \cdot \int_0^{\phi} dx \cdot \frac{H x z}{(x^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = H \left\{ 2b - \sqrt{\phi^2+(a+b)^2} + \sqrt{\phi^2+(a-b)^2} \right\}.$$

Sarà perciò

$$[a] \qquad C = \int_0^{2\pi} d\omega \cdot H \left\{ 2b - \sqrt{\phi^2+(a+b)^2} + \sqrt{\phi^2+(a-b)^2} \right\}.$$

Per eseguire l'ultima integrazione converrebbe sostituire il valore di ϕ espresso in funzione di ω; ma pel nostro oggetto una tale integrazione non è necessaria.

Abbiamo fatto riflettere che il valore di H varia in ragione diretta della densità del cilindro. Ora, siccome al variare di b questa densità del cilindro varia in ragione reciproca di essa b, così la quantità H dee variare essa pure in ragione inversa di b, e però si può fare

$$H = \frac{M}{b},$$

essendo M una quantità indipendente da b. Si avrà pertanto

$$[b] \qquad C = M \int_0^{2\pi} d\omega \cdot \left\{ 2 - \frac{1}{b} \sqrt{\phi^2+(a+b)^2} + \frac{1}{b} \sqrt{\phi^2+(a-b)^2} \right\},$$

dalla quale equazione si potrà avere l'attrazione fra il punto A e il supposto cilindro, secondo la direzione dell'asse di questo, pe' differenti valori che si possono dare a b, e nella supposizione che la massa, il raggio, la direzione dell'asse, e la posizione del centro di questo cilindro rimangano costanti.

Per conoscere se la quantità C aumenti o diminuisca coll'aumentarsi della quantità b, diamo un'altra forma alla quantità contenuta sotto il simbolo d'integrazione nell'equazione [b], facciamo cioè

$$C=\int_0^{2\pi} d\omega \cdot \left\{2-\frac{1}{b}\left[\frac{\phi^2+(a+b)^2-\phi^2-(a-b)^2}{\sqrt{\phi^2+(a+b)^2}+\sqrt{\phi^2+(a-b)^2}}\right]\right\}$$

$$=\int_0^{2\pi} d\omega \cdot \left\{2-\frac{4a}{\sqrt{\phi^2+(a+b)^2}+\sqrt{\phi^2+(a-b)^2}}\right\}.$$

Prendiamo la derivata prima della quantità

$$\sqrt{\phi^2+(a+b)^2}+\sqrt{\phi^2+(a-b)^2}$$

per riguardo a b; avremo

$$\frac{a+b}{\sqrt{\phi^2+(a+b)^2}}-\frac{(a-b)}{\sqrt{\phi^2+(a-b)^2}},$$

ossia, essendo $(a-b)$ nel caso nostro sempre positiva,

$$[\gamma] \qquad \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\phi}{a+b}\right)^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\phi}{a-b}\right)^2}}.$$

Ora essendo

$$\frac{\phi}{a+b}<\frac{\phi}{a-b},$$

e però

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\phi}{a+b}\right)^2}}>\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\phi}{a-b}\right)^2}},$$

il valore della quantità $[\gamma]$ sarà sempre positivo. Per conseguenza coll'aumentarsi di b la quantità

$$\sqrt{\phi^2+(a+b)^2}+\sqrt{\phi^2+(a-b)^2}$$

dee nel nostro caso sempre crescere, e la quantità

$$\frac{4a}{\sqrt{\phi^2+(a+b)^2}+\sqrt{\phi^2+(a-b)^2}}$$

sempre diminuire, e la quantità

$$2-\frac{4a}{\sqrt{\phi^2+(a+b)^2}+\sqrt{\phi^2+(a-b)^2}},$$

sempre crescere. D'onde segue che per questo ingrandirsi di b dee la quantità C aumentarsi. Il che è ciò che dovevasi dimostrare.

Ci rimangono a considerare i due casi, l'uno che il punto p si trovi collocato nel centro della base del cilindro più vicina ad A, l'altro ch'esso punto si trovi nella periferia della base medesima. Ora per riguardo al primo di questi casi non vi è altra particolarità se non che la ϕ è costante rispetto ad ω, il che permette, anzi rende agevolissima anche la terza integrazione: però non essendo questa necessaria, non conviene abbandonare la data dimostrazione, la quale sussiste compiutamente.

Pel secondo caso conviene modificare alcun poco la nozione dell'angolo ω, e intendere per ω l'*angolo formato dalla retta* p O' *con una perpendicolare al diametro* p R (giacchè il punto p coincide con r) *condotta da* p *verso quella banda, rispetto a questo diametro, dalla quale si trova il semicerchio* p s R; ed è da osservare che quest'angolo aprendosi successivamente comincia dal valor *zero*, e finisce col valore π. E similmente dove si determina il piccolo solido che ha un angolo solido in O, e precisamente dove si parla de' due piani passanti per Ap si dee dire che questi debbono fare colla già detta perpendicolare a pR l'uno

l'angolo ω, e l'altro l'angolo $\omega + \Delta\omega$. Con queste mutazioni l'attrazione C del cilindro verso il punto A, secondo la direzione dell' asse, viene ad essere espressa da

$$C = \int_0^{\pi} d\omega \cdot \int_{a-b}^{a+b} dz \cdot \int_0^{\rho} dx \cdot \frac{Hxz}{(x^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= M \int_0^{\pi} d\omega \left\{ 2 - \frac{1}{b}\sqrt{\rho^2 + (a+b)^2} + \frac{1}{b}\sqrt{\rho^2 + (a-b)^2} \right\}$$

essendo ancora M una quantità indipendente da b. Il rimanente della dimostrazione sussiste come è, anche per questo secondo caso.

15. *Corollario.* Se un cilindro si estende nella direzione dell'asse e si rarefà senza cangiare nè massa nè raggio nè posizione del suo centro nè direzione del suo asse, l'attrazione fra questo cilindro e un altro di raggio o uguale o più piccolo e che abbia l'asse nel prolungamento dell'asse del primo, diviene maggiore. Infatti mediante questo allungamento si aumenta l'azione attrattiva del primo cilindro, giusta la direzione del suo asse, verso ciascun punto del secondo cilindro.

16. *Teorema V.* Supponiamo che si abbiano parecchi cilindri di uguale densità, di uguali raggi, disposti intorno al medesimo asse, con delle lunghezze uguali o differenti come più piaccia, e collocati a distanze qualunque, uguali o diverse, l'uno dall'altro. Supponiamo scelte fra tutte le basi di questi varii cilindri le due più esteriori, quelle cioè i piani delle quali comprendono frammezzo ad essi tutti quanti i cilindri; concepiamo presa ad arbitrio una di queste due basi, e scelto in essa un punto qualunque o al di dentro della circonferenza o nella circonferenza medesima: e supponiamo eretta su questo punto una perpendicolare volta dalla banda opposta a quella ove si trovano i cilindri, e in questa perpendicolare collocato un punto materiale che sia attratto dai cilindri medesimi in virtù della gravitazione. Se questi cilindri si ravvicineranno l'uno all'altro fino a toccarsi o a non formare che un unico cilindro, ma movendosi per tal modo che gli assi loro si mantengano sempre nella medesima retta e che il comun centro delle loro masse si conservi allo stesso posto, e se durante un tale ravvicinamento il punto materiale attratto continuerà a rimanere nello stesso luogo dello spazio, egli avverrà che la somma delle attrazioni di questi cilindri con un siffatto punto, nella direzione parallela all'asse, diverrà minore.

Cominciamo a supporre che questi cilindri sieno due soltanto ed uguali fra loro e che essi si accostino alcun poco l'uno all'altro percorrendo spazii uguali. Dimostriamo che la somma delle loro attrazioni col punto materiale, nella direzione dell'asse, viene con ciò a diminuire.

Adottiamo per quello di questi cilindri che è il più vicino al punto materiale le denominazioni usate nel Teorema IV, non facendo per l'altro cilindro verun altro cangiamento che quello di chiamare

a' la distanza del suo centro da quel piano parallelo alle sue basi il quale passa pel punto materiale attratto che qui pure diremo A.

C' l'attrazione fra questo cilindro e il punto A, parallelamente all'asse. E supponiamo dapprima che questo punto A insista perpendicolarmente a un punto preso dentro alla periferia della più vicina delle basi de' cilindri. Avremo

$$C = \int_0^{2\pi} d\omega \cdot H \left\{ 2b - \sqrt{\rho^2 + (a+b)^2} + \sqrt{\rho^2 + (b-a)^2} \right\}$$

$$C' = \int_0^{2\pi} d\omega \cdot H \left\{ 2b - \sqrt{\rho^2 + (a'+b)^2} + \sqrt{\rho^2 + (a'-b)^2} \right\}$$

$$C + C' = \int_0^{2\pi} d\omega \cdot H \left\{ 4b - \sqrt{\rho^2 + (a+b)^2} + \sqrt{\rho^2 + (a-b)^2} - \sqrt{\rho^2 + (a'+b)^2} + \sqrt{\rho^2 + (a'-b)^2} \right\}.$$

Noi possiamo osservare che al cangiare di posizione de' due cilindri la quantità

$$a + a'$$

rimane costante. Noi porremo perciò

$$a + a' = N$$

essendo N una quantità costante, e supporremo che a varii di grandezza. Noi avremo

$$\left(\frac{d[C+C']}{da}\right)=\int_0^{2\pi} d\omega \cdot H \left\{ -\frac{(a+b)}{\sqrt{\varphi^2+(a+b)^2}} + \frac{(a-b)}{\sqrt{\varphi^2+(a-b)^2}} - \frac{(a'+b)\left(\frac{da'}{da}\right)}{\sqrt{\varphi^2+(a'+b)^2}} + \frac{(a'-b)\left(\frac{da'}{da}\right)}{\sqrt{\varphi^2+(a'-b)^2}} \right\};$$

e siccome

$$a' = N - a, \quad \left(\frac{da'}{da}\right) = -1,$$

così sarà

$$[\vartheta] \quad \left(\frac{d[C+C']}{da}\right)=\int_0^{2\pi} d\omega \cdot H \left\{ -\frac{(a+b)}{\sqrt{\varphi^2+(a+b)^2}} + \frac{(a-b)}{\sqrt{\varphi^2+(a-b)^2}} + \frac{(a'+b)}{\sqrt{\varphi^2+(a'+b)^2}} - \frac{(a'-b)}{\sqrt{\varphi^2+(a'-b)^2}} \right\}.$$

Si tratta ora di dimostrare che in questa equazione la quantità sotto il segno d'integrazione è negativa.

Osserviamo a questo effetto che si ha

$$\left(\frac{d}{da} \cdot \left\{ \frac{-(a+b)}{\sqrt{\varphi^2+(a+b)^2}} + \frac{(a-b)}{\sqrt{\varphi^2+(a-b)^2}} \right\}\right)$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\varphi^2+(a+b)^2}} + \frac{(a+b)(a+b)}{\left\{\varphi^2+(a+b)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{\varphi^2+(a+b)^2}} - \frac{(a-b)(a-b)}{\left\{\varphi^2+(a-b)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{\left\{\varphi^2+(a+b)^2-(a+b)^2\right\}}{\left\{\varphi^2+(a+b)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} + \frac{\varphi^2+(a-b)^2-(a-b)^2}{\left\{\varphi^2+(a-b)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \varphi^2 \left\{ \frac{-1}{\left\{\varphi^2+(a+b)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left\{\varphi^2+(a-b)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \right\},$$

dove l'ultimo de' secondi membri si vede evidentemente essere di valor positivo. Segue da ciò che all'aumentarsi della a, si aumenta altresì la quantità

$$\frac{-(a+b)}{\sqrt{\varphi^2+(a+b)^2}} + \frac{(a-b)}{\sqrt{\varphi^2+(a-b)^2}},$$

riceve cioè quest'ultima delle addizioni di quantità positive. Per conseguenza siccome a' è più grande di a, così si ha

$$\frac{-(a'+b)}{\sqrt{\varphi^2+(a'+b)^2}} + \frac{a'-b}{\sqrt{\varphi^2+(a'-b)^2}} > \frac{-(a+b)}{\sqrt{\varphi^2+(a+b)^2}} + \frac{(a-b)}{\sqrt{\varphi^2+(a-b)^2}};$$

e però deducendo il primo membro di questa ineguaglianza dal secondo si ha un risultamento negativo. Adunque nel secondo membro dell'equazione [∂] la quantità sotto il segno d'integrazione è negativa; e perciò la quantità

$$C+C'$$

decresce allorquando la a aumenta, o in altri termini la somma delle attrazioni de' due cilindri verso il punto A, secondo la direzione dei loro assi, diminuisce allorquando essi si accostano percorrendo degli spazii uguali.

Facilissima cosa è lo estendere la dimostrazione al caso che il punto A insista perpendicolarmente a un punto della periferia della più vicina delle basi de' cilindri; e però io ne lascerò la cura al lettore.

Supponiamo dopo ciò che si abbiano ancora due soli cilindri ma di lunghezze ineguali, però fra loro commensurabili, e dimostriamo che la somma delle loro attrazioni verso il punto A, nella direzione degli assi, diminuisce allorquando essi si avvicinano alcun poco l'uno all' altro percorrendo spazii reciprocamente proporzionali alle loro masse.

Poniamo che la lunghezza del cilindro più vicino ad A stia a quella del cilindro più lontano come m ad n. Dividiamo il primo di questi due cilindri per mezzo di piani paralleli alle basi in m porzioni uguali fra loro, e il secondo in n porzioni pure uguali fra loro e altresì uguali a quelle del primo cilindro. Dividiamo eziandio in m parti uguali lo spazio che dev'essere percorso dal secondo cilindro, e in n uguali parti quello che dev' essere percorso dal primo; le quali parti saranno di una stessa lunghezza in ambedue gli spazii.

Immaginiamo quindi che le porzioni dell' un cilindro vengano l'una dopo l'altra ad avvicinarsi all'altro cilindro, con tale ordine che ciascuna porzione del primo cilindro percorra primieramente una prima parte di spazio, quindi una seconda, poscia una terza, ecc. fino a che essa porzione di cilindro abbia interamente percorso lo spazio assegnato a questo primo cilindro, dopo di che sottentri un'altra porzione di esso primo cilindro a fare lo stesso, e quindi una terza, e così via via fino all'ultima; concepiamo che contemporaneamente le porzioni del secondo cilindro si ravvicinino l'una dopo l'altra al primo cilindro, percorrendo ciascuna con de' piccoli movimenti successivi le diverse parti dello spazio che dev' essere percorso da esso secondo cilindro; e concepiamo inoltre che fra i movimenti dall'una parte e quelli dall'altra v' abbia questa corrispondenza, che mentre dall'una banda una porzione di cilindro percorre una delle sue parti di spazio, dall' altra banda una porzione dell'altro cilindro percorra similmente una delle sue parti di spazio.

Egli è evidente in primo luogo che allorquando le porzioni dell'uno de' cilindri avranno terminato di percorrere le loro parti di spazio, le porzioni dell'altro cilindro avranno similmente finito di percorrere le parti di spazio loro spettanti. Il numero infatti de' piccoli movimenti che debbono aver luogo dalla banda del cilindro diviso in m porzioni, è mn, e il numero di quelli che debbono eseguirsi dalla banda dell'altro cilindro diviso in n porzioni è similmente mn; col qual numero di piccoli movimenti sì l'uno che l'altro cilindro avrà interamente percorso lo spazio a lui assegnato. In secondo luogo è facile a vedersi che in ciascun pajo di piccoli movimenti l'uno dall'una banda e l'altro dall'opposta, consistenti ciascuno nel venire percorsa una parte di spazio da una porzione di cilindro, il comune centro di massa di tutte le porzioni de' due cilindri rimane a suo luogo, e che allorquando tutti questi movimenti saranno compiuti un siffatto centro si troverà nel medesimo luogo di prima. Egli è evidente per ultimo che in ciascun pajo di movimenti la somma delle attrazioni di tutte le porzioni di cilindro verso il punto A, considerando sempre l'azione attrattiva parallela agli assi, andrà diminuendo; d'onde si trae che la somma delle attrazioni dei due cilindri dopo che questi avranno preso le loro nuove posizioni sarà più piccola che precedentemente.

Consideriamo ora il caso nel quale avendosi ancora due soli cilindri, le lunghezze di questi,

del pari che gli spazii da percorrersi sieno incommensurabili, le prime fra loro e i secondi fra loro; e dimostriamo che onche in questo caso venendo i due cilindri ravvicinati l'uno all'altro per ispazii reciprocamente proporzionali alle loro lunghezze, l'attrazione verso il punto A, nella direzione considerata, diminuisce.

Sopponiamo che al più grande de' due cilindri, dolla banda più lontana dall'altro cilindro, mediante un piano perpendicolare all'asse venga levata una piccola parte tale che il residuo sia commensurabile col cilindro minore; e similmente supponiamo diminuito di una piccola parte, nel suo fine, lo spazio che dev'essere percorso dal cilindro minore, di tal maniera che la parte residua o maggiore del primo cilindro stia a tutto il secondo cilindro, come il residuo spazio del secondo sta all'intero spazio del primo; e concepiamo che lasciando indietro la parte del primo cilindro levata, l'altra parte percorra tutto lo spazio assegnato al suo cilindro totale, e che nello stesso tempo l'altro cilindro percorra l'altro spazio, restando soltanto indietro della parte di spazio tolta. Egli è facile a vedersi che la somma delle attrazioni verrà con ciò a diminuire, e che il comun centro di massa rimarrà a suo posto. Ma la parte dell'un cilindro levata e lasciata indietro, e la parte di spazio che rimone a percorrersi dall'altro cilindro possono esser rese successivamente più piccole, in modo da arrivare al di sotto di ona quantità determinata qualunque: e in ciascuna delle diminuzioni successive che lor possono farsi soffrire, la somma delle attrazioni continua a divenir minore, stantechè una tale diminuzione delle parti levate di spazio e di cilindro si può riguardare dall'una banda siccome il trasporto di una nuova piccola porzione del cilindro maggiore per tutto il tratto di spazio assegnato ad essere percorso da questo cilindro, e dall'altra banda siccome un avanzamento del totale cilindro minore per un tratto della parte di spazio che gli resta a percorrere, movimenti in tal maniera combinati che il comun centro di massa rimanga a suo luogo: oltre a ciò con una bastevole diminuzione della parte del maggior cilindro levata e lasciata indietro, e della parte di spazio che ancor rimane a percorrersi dal cilindro minore, gli effetti provenienti alla somma delle attrazioni dal non avere la prima percorso il suo spazio e dal nou essere la seconda stata percorsa dal suo cilindro possono farsi divenire minori di una quantità data qualunque. Adunque facendo percorrere interamente i due spazii ai due cilindri, l'attrazione deve diminuire anche nel caso dell'incommensurabilità e degli uni e degli altri.

Considerati questi casi più semplici, immaginiamo che si abbia un qoalsivoglia numero di cilindri di lunghezze qualunque, tutti però formati intorno a porzioni di una medesima retta, tutti dello stesso raggio e tutti della stessa densità. Se noi comincceremo a ravvicinare due di essi, lor facendo percorrere degli spazii reciprocamente proporzionali alle loro lunghezze collo scopo che il comun centro di massa di tutto l'oggregato non si cangi di luogo, e se col mezzo di questi movimenti non li recheremo soltanto ad una distanza leggiermente minore ma li porteremo fino al vicendevole contatto, la somma delle attrazioni secondo la direzione degli assi si renderà minore. Se prendendo di poi un terzo cilindro, noi faremo in modo che questo e l'aggregato de' primi due, i quali allora più non ne formeranno che uno solo, si ovvicinino con velocità reciprocamente proporzionali alle loro rispettive lunghezze, di maniera che il centro di massa del sistema rimanga ancora a suo luogo, e se noi continueremo ad avvicinarli in sino a che si tocchino, la somma delle attrazioni diminuerà di nuovo. Noi possiamo concepire un ravvicinamento operato allo stesso modo fra l'aggregato di questi tre cilindri e un quarto, qoindi un ravvicinamento fra l'aggregato de' quattro cilindri con un quinto ecc., proseguendo in cotal modo finchè vi hanno cilindri, e sempre operando in maniera che il centro di massa del sistema rimanga al suo luogo; e onche in questi casi l'ottrazione diminuirà sempre. A questo modo noi avremo in fine tutti i cilindri uniti in uno senza spostamento del centro delle masse; e la somma delle attrazioni nella direzione degli ossi sarà minore che avanti la loro unione: il che è quello che ci eravamo proposti di dimostrare.

17. *Corollario*. Supponiamo che un cilindro il quale ottiri un punto materiale collocato esteriormente nella maniera supposta nel Teorema IV, venga ad essere diviso in più cilindri,

e che questi vengano ad allontanarsi l'uno dall'altro, conservando gli assi nella medesima retta, senza che il comun centro delle masse cangi di luogo, e senza altresì che alcuno di questi cilindri oltrepassi con una delle sue basi il punto attirato. L'attrazione che sentirà esso punto materiale da queste parti, nella direzione degli assi, sarà maggiore dopo la separazione che prima di essa.

Continuazione e fine della *RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI INDETERMINATE DI PRIMO GRADO* di GIOVANNI DE PAOLI (V. Fascicolo III, pag. 262).

15. Le equazioni indeterminate di primo grado a tre, ed a più incognite si risolvono facilmente cogli stessi principj. Sia proposta l'equazione a tre incognite

$$(dd) \qquad ax - by - cz = e,$$

ove a, b, c, e sono numeri dati, non aventi alcun divisore comune, ed x, y, z le tre indeterminate. Si sa, che è assai agevole il ridurre qualunque equazione di primo grado a tre incognite a questa forma (num. 12).

Si supponga, che due qualsivogliansi dei numeri a, b, c, per esempio a, b, abbiano il massimo comun divisore d, che sarà l'unità, quando gli stessi siano primi fra loro.

Facciasi

$$(ee) \qquad A = \frac{a}{d}; \quad B = \frac{b}{d};$$

A, e B saranno interi, e primi fra loro. Per mezzo di queste, trasportando il termine cz della (dd) nel secondo membro, e quindi dividendo la stessa (dd) per d, risulterà l'equazione

$$Ax - By = \frac{e + cz}{d}.$$

Ora siccome il primo membro di questa è numero intero, così deve pur esserlo anche il secondo membro della medesima. Cotesto numero si denomini u; otterremo dopo le opportune riduzioni le

$$(ff) \qquad Ax - By = u; \quad du - cz = e;$$

equazioni di primo grado a due incognite, dalle quali dovrà dipendere la risoluzione della proposta. La prima di queste è sempre risolubile (num. 12); affinchè la seconda possa risolversi, fa d'uopo, che c sia primo con d (num. 12 sud.), o ciò, che è lo stesso, che a, b, c non abbiano alcun fattore comune; condizione nota, necessaria per la soluzione della proposta. Ammettasi dunque, che questa condizione abbia luogo, e paragoniamo le (ff) colla (s). Denominando k' l'esponente, che corrisponde a B; k'' quello che corrisponde a c; ω, ω_1, numeri interi e positivi arbitrarii, otterremo per mezzo delle formole (y) del num. 12 le espressioni

$$(gg) \qquad \begin{aligned} u &= e \cdot d^{k''-1} \pm c\,\omega; \quad & z &= e \cdot \frac{d^{k''} - 1}{c} \pm d\,\omega; \\ x &= u \cdot A^{k'-1} \pm B\omega_1; \quad & y &= u \cdot \frac{A^{k'} - 1}{B} \pm A\,\omega_1; \end{aligned}$$

dalle quali colla debita sostituzione del trovato valore di u, si trarranno le for-

mole generali richieste

$$x = e\,d^{k''-1} A^{k'-1} \pm c\,A^{k'-1}\,\omega \pm B\,\omega_1\,;$$

$$(hh) \qquad y = e\,d^{k''-1} \frac{A^{k'}-1}{B} \pm c\,\frac{A^{k'}-1}{B}\,\omega \pm A\,\omega_1\,;$$

$$z = e\,\frac{d^{k''}-1}{c} \pm d\,\omega.$$

Per tutta la generalità possibile ho messo nelle formole, che precedono, $\pm\omega$, $\pm\omega_1$ in luogo di ω, ω_1. Si possono trovare varie altre espressioni di diversa forma, inservienti allo stesso oggetto, adoperando le equazioni (z), o le (cc), sole, o combinate tra loro, e colle (y); ciò, che il lettore può fare agevolmente da se stesso.

16. Ponendo nelle precedenti formole

$$d = 1,$$

e per conseguenza (equazioni (ee))

$$A = a, \; B = b;$$

e cambiando k' in k, esponente, che corrisponde a b, trovansi pel caso, in cui a, e b siano primi fra loro, le seguenti

$$x = e\;a^{k-1} + c\;a^{k-1}\;\;\omega \pm b\,\omega_1\,;$$

$$(ii) \qquad y = e\,\frac{a^k-1}{b} + c\,\frac{a^k-1}{b}\,\omega \pm a\,\omega_1\,;$$

$$z = \omega.$$

17. Nella pratica applicazione conviene sciegliere i valori generali ridotti alla più semplice espressione tra quelli delle indeterminate soddisfacenti alle (ff), affinchè riesca più facile il calcolo per quelli della (dd).

Si denomini

ξ il più piccolo valore intero, e positivo della u;

λ quello della z;

θ, ϕ i più piccoli numeri interi e positivi, proprii a verificare l'equazione

$$A\,\theta - B\,\phi = 1.$$

I valori generali delle indeterminate, che soddisfanno alle equazioni (ff), saranno (num. 12)

$$u = \xi + c\,\omega; \qquad z = \lambda + d\,\omega;$$

$$x = u\,\theta \pm B\,\omega_1\,; \quad y = u\,\phi \pm A\,\omega_1\,;$$

donde si ricaveranno le formole seguenti più semplici per la risoluzione della (dd)

$$x = \theta\xi + c\theta\omega \pm B\omega_1\,;$$

$$(jj) \qquad y = \phi\xi + c\phi\omega \pm A\omega_1\,;$$

$$z = \lambda + d\omega\,.$$

I numeri $\xi, \lambda, \theta, \phi$ poi si troveranno facilmente col mezzo delle espressioni (*gg*). Infatti, chiamando q il quoziente ottenuto dalla divisione di $e\frac{d^{k''}-1}{c}$ per d, e q_1, quello della divisione di $\frac{A^{k'}-1}{B}$ per A, non tenendo conto dei resti, si avrà

$$(kk) \qquad \xi = ed^{k''-1} - cq\,; \quad \lambda = e\frac{d^{k''}-1}{c} - dq\,;$$

$$\theta = A^{k'-1} - Bq_1\,; \quad \phi = \frac{A^{k'}-1}{B} - Aq_1\,;$$

come rilevasi visibilmente dall'inspezione delle formole (*gg*), dopo avervi fatto

$$u = 1.$$

Per un esempio sia da risolversi l'equazione

$$(ll) \qquad 15x - 6y - 10z = 11.$$

Paragonandola colla (*dd*), si ottiene

$$a = 15\,; \quad b = 6\,; \quad c = 10\,; \quad e = 11.$$

Qui il massimo comun divisore dei numeri 15, e 6 si è 3; perciò

$$d = 3\,;$$

e quindi (equazioni (*ee*))

$$A = \frac{15}{3} = 5\,; \quad B = \frac{6}{3} = 2.$$

L'esponente, che corrisponde al numero 2, si è l'unità, e quello che corrisponde al 10, si è il 4 (num. 7); e però

$$k' = 1\,; \quad k'' = 4.$$

Avremo in seguito

$$e\,\frac{d^{k''}-1}{c} = 11\,\frac{3^4-1}{10} = 88\,,$$

$$\frac{A^{k'}-1}{B} = \frac{5^1-1}{2} = 2\,;$$

e per conseguenza

$$q = 29\,; \quad q_1 = 0.$$

Con questi dati troveremo (equazioni (kk))

$$\xi = 11 \cdot 3^{4-1} - 29 \cdot 10 = 7\,; \quad \lambda = 88 - 3 \cdot 29 = 1\,;$$

$$\theta = 5^{1-1} - 2 \cdot 0 = 1\,; \qquad \phi = 2 - 5 \cdot 0 = 2.$$

I valori attuali posti nelle espressioni (jj) ci daranno in fine quelli delle indeterminate, che soddisfanno alla (ll)

$$x = 7 \ + 10\omega \pm 2\omega_1\,;$$
$$y = 14 + 20\omega \pm 5\omega_1\,;$$
$$z = 1 \ + 3\omega.$$

18. Con un processo simile all' esposto possono trovarsi in tutti i casi particolari le formole per la risoluzione delle equazioni indeterminate di primo grado a quattro, e più incognite. Io però credo bene di far qui conoscere un altro metodo per risolvere l' equazione di primo grado ad n incognite

$$(mn) \qquad a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \text{- - - -} + a_{n-1} x_{n-1} = a_n x_n\,;$$

ove $a_0, a_1, a_2,$ - - - a_n sono numeri dati, che si suppongono non avere alcun fattore comune; ed $x_1, x_2, x_3,$ - - - x_n le n indeterminate.

Si denomini

k_1 l' esponente, che corrisponde ad a_1;

k_2 quello, che corrisponde ad a_2;

k_3 quello, che corrisponde ad a_3;

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

ed in generale k_n l' esponente, che corrisponde ad a_n;

μ_1 un numero primo con a_1;

μ_2 un numero primo con a_2;

μ_3 un numero primo con a_3;

- - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - -

e generalmente μ_n un numero primo con a_n;

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3,$ - - - ε_n numeri interi qualsivogliansi.

Le quantità

$$\varepsilon_1(\mu_1^{k_1} - 1), \quad \varepsilon_2(\mu_2^{k_2} - 1), \quad \varepsilon_3(\mu_3^{k_3} - 1), \text{ - - - } \varepsilon_n(\mu_n^{k_n} - 1)$$

saranno divisibili rispettivamente per $a_1, a_2, a_3,$ - - - a_n (num. 7). Potremo adunque fare

$$(nn) \qquad \begin{aligned} &a_1 x_1 = \varepsilon_1(\mu_1^{k_1} - 1); \quad a_2 x_2 = \varepsilon_2(\mu_2^{k_2} - 1); \quad a_3 x_3 = \varepsilon_3(\mu_3^{k_3} - 1); \\ &\text{- - - } a_{n-1} x_{n-1} = \varepsilon_{n-1}(\mu_{n-1}^{k_{n-1}} - 1); \quad a_n x_n = \varepsilon_n(\mu_n^{k_n} - 1). \end{aligned}$$

Questi valori non sono certamente dotati di tutta la possibile generalità: ma vedremo in seguito, come da un valore particolare si passa al generale. Sostituendoli nella (*mm*), si ricaverà

$$(oo)\qquad \begin{array}{l} a_n + \varepsilon_1\mu_1^{k_1} + \varepsilon_2\mu_2^{k_2} + \varepsilon_3\mu_3^{k_3} + \cdots + \varepsilon_{n-1}\mu_{n-1}^{k_{n-1}} = \varepsilon_n\mu_n^{k_n} \\ \quad - \varepsilon_1 \quad - \varepsilon_2 \qquad - \varepsilon_3 \quad - \cdots - \varepsilon_{n-1} \qquad\qquad - \varepsilon_n . \end{array}$$

19\. Noi dovremo adunque determinare i numeri $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots \varepsilon_n; \mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots \mu_n$ talmente, che quest'equazione sia soddisfatta; e ciò si potrà fare in più maniere. Io ho scelto la seguente, che mi parve assai semplice. Spezziamo la (*oo*) nelle equazioni

$$(pp)\qquad \begin{array}{r} \varepsilon_n = -\varepsilon_{n-1}\mu_{n-1}^{k_{n-1}} ; \\ \varepsilon_{n-1} = \varepsilon_{n-2}\mu_{n-2}^{k_{n-2}} ; \\ \varepsilon_{n-2} = \varepsilon_{n-3}\mu_{n-3}^{k_{n-3}} ; \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_3 = \varepsilon_2\mu_2^{k_2} ; \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_1\mu_1^{k_1} ; \\ a_0 - \varepsilon_1 = \varepsilon_n\mu_n^{k_n} ; \end{array}$$

la di cui legge costante ad eccezione della prima, e dell' ultima è manifesta. Da queste traggonsi con successive sostituzioni le espressioni

$$(qq)\qquad \begin{array}{l} \varepsilon_n = -\mu_{n-1}^{k_{n-1}}\varepsilon_{n-1} = -\mu_{n-1}^{k_{n-1}}\mu_{n-2}^{k_{n-2}}\varepsilon_{n-2} = -\mu_{n-1}^{k_{n-1}}\mu_{n-2}^{k_{n-2}}\cdots\mu_2^{k_2}\varepsilon_2 = -\mu_{n-1}^{k_{n-1}}\cdots\mu_1^{k_1}\varepsilon_1 ; \\ \varepsilon_{n-1} = \mu_{n-2}^{k_{n-2}}\varepsilon_{n-2} = \mu_{n-2}^{k_{n-2}}\mu_{n-3}^{k_{n-3}}\varepsilon_{n-3} = \cdots = \mu_{n-2}^{k_{n-2}}\mu_{n-3}^{k_{n-3}}\cdots\mu_2^{k_2}\varepsilon_2 = \mu_{n-2}^{k_{n-2}}\mu_{n-3}^{k_{n-3}}\cdots\mu_1^{k_1}\varepsilon_1 ; \\ \varepsilon_{n-2} = \mu_{n-3}^{k_{n-3}}\varepsilon_{n-3} = \cdots = \mu_{n-3}^{k_{n-3}}\cdots\mu_2^{k_2}\varepsilon_2 = \mu_{n-3}^{k_{n-3}}\cdots\mu_2^{k_2}\mu_1^{k_1}\varepsilon_1 ; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_3 = \mu_2^{k_2}\varepsilon_2 = \mu_2^{k_2}\mu_1^{k_1}\varepsilon_1 ; \\ \varepsilon_2 = \mu_1^{k_1}\varepsilon_1 . \end{array}$$

Se si sostituisce l'ultimo valore di ε_n nell'ultima delle (*pp*), si ottiene

$$a_0 = \varepsilon_1(1 - \mu_n^{k_n}\mu_{n-1}^{k_{n-1}}\mu_{n-2}^{k_{n-2}}\cdots\mu_2^{k_2}\mu_1^{k_1}).$$

Senza discutere tutti i valori di $\varepsilon_1, \mu_1, \mu_2, \cdots \mu_n$, che convengono a que-

st'ultima, osserveremo, che per soddisfare alla medesima basta di eguagliare a zero uno dei numeri anzidetti $\mu_1, \mu_2, --- \mu_n$, e di fare

$$(rr) \qquad \varepsilon_1 = a_0 .$$

Se si suppone

$$\mu_{n-1} = 0 ;$$

il valore (nn) di x_{n-1} diverrà

$$x_{n-1} = -\frac{\varepsilon_{n-1}}{a_{n-1}} .$$

Fa d'uopo adunque, che ε_{n-1} sia divisibile per a_{n-1}, affinchè x_{n-1} riesca intero. Ora dall'espressione (qq) di ε_{n-1} si ha, sostituendovi il valore precedente di ε_1,

$$\varepsilon_{n-1} = a_0 \mu_1^{k_1} \mu_2^{k_2} --- \mu_{n-2}^{k_{n-2}} .$$

Qui può darsi il caso, che a_{n-1} abbia uno, o più fattori communi con tutti i numeri $a_1, a_2, --- a_{n-1}$, senza che a_0 sia divisibile per gli stessi fattori. Allora il secondo membro dell'ultima espressione non sarà divisibile per a_{n-1}, perchè per ipotesi $\mu_1, \mu_2, --- \mu_{n-2}$ sono primi rispettivamente con $a_1, a_2, --- a_{n-2}$. Adunque ε_{n-1} non sarà divisibile in tutti i casi per a_{n-1}. Adunque non potrà farsi in tutti i casi

$$\mu_{n-1} = 0 .$$

Un ragionamento consimile potrà applicarsi al caso, in cui si supponga

$$\mu_{n-2} = 0 ;$$

ovvero

$$\mu_{n-3} = 0 ;$$

ecc. ecc.

e si troverà sempre, che le supposizioni fatte non valgono per tutti i casi, di cui è suscettibile la risoluzione della proposta. Lo stesso però non potrà dirsi, quando si faccia

$$\mu_n = 0 .$$

In fatti sarà allora (equazioni (nn))

$$x_n = -\frac{\varepsilon_n}{a_n} .$$

Ma dall'espressione (qq) di ε_n si ottiene, eliminando ε_1

$$\varepsilon_n = -a_0 \mu_1^{k_1} \mu_2^{k_2} --- \mu_{n-1}^{k_{n-1}} .$$

Adunque per mezzo di questo valore risulterà

$$(ss) \qquad x_n = \frac{a_0 \mu_1^{k_1} \mu_2^{k_2} --- \mu_{n-1}^{k_{n-1}}}{a_n} ;$$

ed è manifesto, che il numeratore di cotesta frazione sarà sempre divisibile per a_n, purchè questo non abbia verun fattore comune con tutti i numeri $a_1, a_2, \cdots a_{n-1}$; condizione nota, necessaria per la risoluzione della (mm). Ciò supposto, il numero medesimo a_n si potrà sempre mettere sotto la forma

$$d_1 d_2 d_3 \cdots d_{n-1},$$

essendo d_1 un divisore di a_n primo con a_1; d_2 un altro divisore di a_n primo con a_2; d_3 un terzo divisore di a_n primo con a_3, ecc. - - - e d_{n-1} un divisore di a_n primo con a_{n-1}. Facendo quindi

$$(tt) \qquad \mu_1 = d_1;\ \mu_2 = d_2;\ \mu_3 = d_3;\ \cdots\ \mu_{n-1} = d_{n-1};$$

dalla (ss) avremo

$$(uu) \qquad x_n = a_0 d_1^{k_1-1} d_2^{k_2-1} \cdots d_{n-1}^{k_{n-1}-1}.$$

Sostituendo nelle (qq) i medesimi valori (tt), e quello di ε_1 dato dalla (rr), ricaveremo

$$\varepsilon_{n-1} = a_0 d_1^{k_1} d_2^{k_2} \cdots d_{n-2}^{k_{n-2}};$$

$$\varepsilon_{n-2} = a_0 d_1^{k_1} d_2^{k_2} \cdots d_{n-3}^{k_{n-3}};$$

- - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - -

$$\varepsilon_3 = a_0 d_1^{k_1} d_2^{k_2};$$

$$\varepsilon_2 = a_0 d_1^{k_1};$$

$$\varepsilon_1 = a_0;$$

e quindi per mezzo di questi dalle (nn) si otterranno le formole

$$x_{n-1} = a_0 d_1^{k_1} d_2^{k_2} \cdots d_{n-2}^{k_{n-2}} \frac{d_{n-1}^{k_{n-1}} - 1}{a_{n-1}};$$

$$x_{n-2} = a_0 d_1^{k_1} d_2^{k_2} \cdots d_{n-3}^{k_{n-3}} \frac{d_{n-2}^{k_{n-2}} - 1}{a_{n-2}};$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$x_3 = a_0 d_1^{k_1} d_2^{k_2} \frac{d_3^{k_3} - 1}{a_3};$$

$$x_2 = a_0 d_1^{k_1} \frac{d_2^{k_2} - 1}{a_2};$$

$$x_1 = a_0 \frac{d_1^{k_1} - 1}{a_1};$$

le quali unitamente colla (uu) risolveranno la proposta.

20. Non ci rimane attualmente, che di trovare col soccorso delle espressioni precedenti i valori generali richiesti. Queste per abbreviare si denominino rispettivamente α_n, α_{n-1}, α_{n-2}, - - - α_1 in modo che sia α_n il valore trovato di x_n, α_{n-1} quello di x_{n-1}, ecc. - - -, ed α_1 quello di x_1. Si avrà l'identità

$$a_n + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \text{- - - -} + a_{n-1}\alpha_{n-1} = a_n\alpha_n;$$

la quale sottratta dalla (*mm*) ci dà

$$(vv) \qquad a_1(x_1 - \alpha_1) + a_2(x_2 - \alpha_2) + \text{- - - -} + a_{n-1}(x_{n-1} - \alpha_{n-1}) = a_n(x_n - \alpha_n).$$

Facciamo per maggiore semplicità

$$(xx) \qquad \begin{aligned} x_1 - \alpha_1 &= y_1; \\ x_2 - \alpha_2 &= y_2; \\ &\text{- - - - - - - - -} \\ &\text{- - - - - - - - -} \\ x_{n-1} - \alpha_{n-1} &= y_{n-1}; \\ x_n - \alpha_n &= y_n. \end{aligned}$$

L'equazione (*vv*) diverrà

$$(yy) \qquad a_1 y_1 + a_2 y_2 + \text{- - - -} + a_{n-1} y_{n-1} = a_n y_n.$$

21. Questo processo ci fa conoscere, che i valori generali richiesti dipendono da quelli delle indeterminate dell'equazione (*yy*), mancante del termine a_0. Per trovare quest'ultimi potremo tenere la via seguente, che conviene a tutti i casi. Sia δ_{n-2} il massimo comun divisore di a_n, a_{n-1}, e facciasi

$$A_n = \frac{a_n}{\delta_{n-2}}; \quad A_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{\delta_{n-2}}; \quad A_n y_n - A_{n-1} y_{n-1} = z_{n-2};$$

dall'equazione (*yy*) ricaveremo, sostituendo, l'altra

$$(zz) \qquad a_1 y_1 + a_2 y_2 + \text{- - - -} + a_{n-2} y_{n-2} = \delta_{n-2} z_{n-2};$$

la quale ha una indeterminata di meno.

Così si supponga δ_{n-3} il massimo comun divisore di δ_{n-2}, a_{n-2}, e si faccia

$$\Delta_{n-2} = \frac{\delta_{n-2}}{\delta_{n-3}}; \quad A_{n-2} = \frac{a_{n-2}}{\delta_{n-3}}; \quad \Delta_{n-2} z_{n-2} - A_{n-2} y_{n-2} = z_{n-3};$$

dalla (*zz*) si otterrà la seguente con una indeterminata di meno

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \text{- - - -} + a_{n-3} y_{n-3} = \delta_{n-3} z_{n-3}.$$

Nello stesso modo progredendo, arriveremo in fine per mezzo delle precedenti, e delle

$$\Delta_2 = \frac{\delta_2}{\delta_1}; \quad A_2 = \frac{a_2}{\delta_1}; \quad \Delta_2 z_2 - A_2 y_2 = z_1;$$

all' equazione

$$a_1 y_1 = \delta_1 z_1 .$$

La legge dei numeri A_2, A_3, ecc. A_{n-1}; Δ_2, Δ_3, ecc. Δ_{n-1} è data dalle espressioni generali

$$A_m = \frac{a_m}{\delta_{m-1}} ; \quad \Delta_m = \frac{\delta_m}{\delta_{m-1}} ;$$

ed in generale δ_m è massimo comun divisore dei numeri δ_{m+1}, a_{m+1}, che lo precedono.

Così la risoluzione della (yy) dipenderà dalle seguenti

$$A_n\, y_n \;-A_{n-1}\, y_{n-1} = z_{n-2} ;$$
$$\Delta_{n-2}\, z_{n-2} - A_{n-2}\, y_{n-2} = z_{n-3} ;$$
$$- - - - - - - - - - - - -$$
$$(aaa) \qquad - - - - - - - - - - - - -$$
$$\Delta_3 z_3 - A_3 y_3 = z_2 ;$$
$$\Delta_2 z_2 - A_2 y_2 = z_1 ;$$
$$a_1 y_1 = \delta_1 z_1 ;$$

che hanno tutte la condizione di solubilità (num. 12). Dall'ultima di queste traesi

$$y_1 = \frac{\delta_1 z_1}{a_1} .$$

Ora il divisore δ_1 deve essere primo con a_1; giacchè per ipotesi i numeri a_1, a_2, a_3, - - - a_n non hanno alcun fattore comune. Fa d' uopo adunque, che z_1 sia multiplo di a_1, affinchè y_1 riesca intero. Faremo pertanto

$$z_1 = \pm a_1 \omega_1 ;$$

essendo ω_1 un numero qualunque intero, e positivo; e si avrà

$$(bbb) \qquad y_1 = \pm \delta_1 \omega_1 .$$

Attualmente si chiamino ξ_1, λ_1 due valori particolari, o meglio, i più piccoli valori soddisfacenti all' equazione

$$\Delta_2 \xi_1 - A_2 \lambda_1 = 1 ;$$

valori, che si potranno trovare col processo dato superiormente (num. 16); ξ_2, λ_2 quelli, che soddisfanno all' equazione

$$\Delta_3 \xi_2 - A_3 \lambda_2 = 1 ;$$

- -

ξ_{n-3}, λ_{n-3} quelli, proprii a verificare la

$$\Delta_{n-2} \xi_{n-3} - A_{n-2} \lambda_{n-3} = 1 ;$$

e finalmente λ_{n-2}, λ_{n-1} quelli, che soddisfanno all' equazione

$$A_n \lambda_{n-1} - A_{n-1} \lambda_{n-2} = 1 .$$

Dalle *(aaa)* ricaveremo (num. 12)

$$z_2 = z_1 \xi_1 \pm A_2 \omega_2 ; \qquad y_2 = z_1 \lambda_1 \pm \Delta_2 \omega_2 ;$$

$$z_3 = z_2 \xi_2 \pm A_3 \omega_3 ; \qquad y_3 = z_2 \lambda_2 \pm \Delta_3 \omega_3 ;$$

- -

- -

$$z_{n-2} = z_{n-3} \xi_{n-3} \pm A_{n-2} \omega_{n-2} ; \qquad y_{n-2} = z_{n-3} \lambda_{n-3} \pm \Delta_{n-2} \omega_{n-2} ;$$

$$y_{n-1} = z_{n-2} \lambda_{n-2} \pm A_n \omega_{n-1} ; \qquad y_n = z_{n-2} \lambda_{n-1} \pm A_{n-1} \omega_{n-1} ;$$

ove ω_2, ω_3, - - - ω_{n-1} denotano numeri indeterminati interi, e positivi. Quindi si otterranno colle successive sostituzioni le formole

$$y_2 = \pm a_1 \lambda_1 \omega_1 \pm \Delta_2 \omega_2 ;$$

$$y_3 = \pm a_1 \lambda_2 e^{\Sigma_{u=1}^{u=2} \mathrm{l}.\xi_u} \omega_1 \pm A_2 \lambda_2 \omega_2 \pm \Delta_3 \omega_3 ;$$

- -

- -

$$y_{n-2} = \pm a_1 \lambda_{n-3} e^{\Sigma_{u=1}^{u=n-3} \mathrm{l}.\xi_u} \omega_1 \pm A_2 \lambda_{n-3} e^{\Sigma_{u=2}^{u=n-3} \mathrm{l}.\xi_u} \omega_2$$

$$\pm A_3 \lambda_{n-3} e^{\Sigma_{u=3}^{u=n-3} \mathrm{l}.\xi_u} \omega_3 \pm - - - \pm A_{n-4} \lambda_{n-3} e^{\Sigma_{u=n-4}^{u=n-3} \mathrm{l}.\xi_u} \omega_{n-4}$$

$$\pm A_{n-3} \lambda_{n-3} \omega_{n-3} \pm \Delta_{n-2} \omega_{n-2} ; \tag{ccc}$$

$$y_{n-1} = \pm a_1 \lambda_{n-2} e^{\Sigma_{u=1}^{u=n-2} \mathrm{l}.\xi_u} \omega_1 \pm A_2 \lambda_{n-2} e^{\Sigma_{u=2}^{u=n-2} \mathrm{l}.\xi_u} \omega_2 \pm - - -$$

$$\pm A_{n-3} \lambda_{n-2} e^{\Sigma_{u=n-3}^{u=n-2} \mathrm{l}.\xi_u} \omega_{n-3} \pm A_{n-2} \lambda_{n-2} \omega_{n-2} \pm A_n \omega_{n-1} ;$$

$$y_n = \pm a_1 \lambda_{n-1} e^{\Sigma_{u=1}^{u=n-2} \mathrm{l}.\xi_u} \omega_1 \pm A_2 \lambda_{n-1} e^{\Sigma_{u=2}^{u=n-2} \mathrm{l}.\xi_u} \omega_2 \pm - - -$$

$$\pm A_{n-3} \lambda_{n-1} e^{\Sigma_{u=n-3}^{u=n-2} \mathrm{l}.\xi_u} \omega_{n-3} \pm A_{n-2} \lambda_{n-1} \omega_{n-2} \pm A_{n-1} \omega_{n-1} ;$$

ove le quantità $e^{\Sigma \mathrm{l}.\xi_u}$ sono date dalla nota espressione generale

$$e^{\Sigma_{u=h}^{u=h+i+1} \mathrm{l}.\xi_u} = \xi_h \, \xi_{h+1} - - - \xi_{h+i-1} \, \xi_{h+i} .$$

Il valore di y_{n-2} è il termine generale di quelli, che lo precedono. Sostituendo le espressioni (*bbb*), (*ccc*) nelle (*xx*), otterremo in fine i valori ricercati.

22. Tralasciando queste sostituzioni per brevità, farò osservare, che si può soddisfare alla (*yy*) in infiniti modi, col porre

$$y_1 = \pm d_1 d_2 d_3 \cdots d_{n-1} \omega_1 ;$$
$$y_2 = \pm d_1 d_2 d_3 \cdots d_{n-1} \omega_2 ;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_{n-1} = \pm d_1 d_2 d_3 \cdots d_{n-1} \omega_{n-1} ;$$
$$y_2 = \pm a_1 \omega_1 \pm a_2 \omega_2 \pm \cdots \pm a_{n-1} \omega_{n-1} ;$$

ove $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots \omega_{n-1}$ sono novelle indeterminate; ed ove abbiamo messo $d_1 d_2 d_3 \cdots d_{n-1}$ in luogo di a_n. Per mezzo delle espressioni attuali, e delle $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n$ dalle formole (*xx*) ricaveremo

$$x_1 = a_0 \frac{d_1^{k_1} - 1}{a_1} \pm d_1 d_2 d_3 \cdots d_{n-1} \omega_1 ;$$

$$x_2 = a_0 d_1^{k_1} \frac{d_2^{k_2} - 1}{a_2} \pm d_1 d_2 d_3 \cdots d_{n-1} \omega_2 ;$$

$$x_3 = a_0 d_1^{k_1} d_2^{k_2} \frac{d_3^{k_3} - 1}{a_3} \pm d_1 d_2 d_3 \cdots d_{n-1} \omega_3 ;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{n-1} = a_0 d_1^{k_1} d_2^{k_2} \cdots d_{n-2}^{k_{n-2}} \frac{d_{n-1}^{k_{n-1}} - 1}{a_{n-1}} \pm d_1 d_2 d_3 \cdots d_{n-1} \omega_{n-1} ;$$

$$x_n = a_0 d_1^{k_1 - 1} d_2^{k_2 - 1} \cdots d_{n-2}^{k_{n-2} - 1} d_{n-1}^{k_{n-1} - 1} \pm a_1 \omega_1 \pm a_2 \omega_2 \pm \cdots \pm a_{n-1} \omega_{n-1} ;$$

e questi sono i valori, che soddisfanno in un modo assai generale all' equazione indeterminata di primo grado

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_{n-1} x_{n-1} = d_1 d_2 d_3 \cdots d_{n-1} x_n ;$$

dove, come si è già detto più sopra,

d_1 esprime un numero primo con a_1;
d_2 un numero primo con a_2;
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
d_{n-1} un numero primo con a_{n-1};
k_1 esprime l'esponente che corrisponde ad a_1;
k_2 quello che corrisponde ad a_2;
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
e k_{n-1} l'esponente che corrisponde ad a_{n-1}.

Adoperando la notazione del num. 10, potremo dare alle formole precedenti il seguente aspetto

$$x_1 = a_0 \frac{d_1^{k_1} - 1}{a_1} \pm e^{\Sigma_{n=0}^{n=n-1} \text{l.}\, d_{n+1}} \omega_1 ;$$

$$x_2 = a_0 e^{\Sigma_{n=0}^{n=1} \text{l.}\, d_{n+1}^{k_{n+1}}} \cdot \frac{d_2^{k_2} - 1}{a_2} \pm e^{\Sigma_{n=n}^{n=n-1} \text{l.}\, d_{n+1}} \omega_2 ;$$

$$x_3 = a_0 e^{\Sigma_{n=0}^{n=2} \text{l.}\, d_{n+1}^{k_{n+1}}} \cdot \frac{d_3^{k_3} - 1}{a_3} \pm e^{\Sigma_{n=0}^{n=n-1} \text{l.}\, d_{n+1}} \cdot \omega_3 ;$$

- -

- -

$$x_{n-1} = a_0 e^{\Sigma_{n=0}^{n=n-2} \text{l.}\, d_{n+1}^{k_{n+1}}} \cdot \frac{d_{n-1}^{k_{n-1}} - 1}{a_{n-1}} \pm e^{\Sigma_{n=0}^{n=n-1} \text{l.}\, d_{n+1}} \cdot \omega_{n-1} ;$$

$$x_n = a_0 \cdot e^{\Sigma_{n=0}^{n=n-1} \text{l.}\, d_{n+1}^{k_{n+1}-1}} \pm a_1 \omega_1 \pm a_2 \omega_2 \pm \cdots \pm a_{n-1} \omega_{n-1} .$$

Farò osservare, che ai valori anzidetti di x_1, x_2, ecc. si possono far prendere diverse forme; ma penso, che queste risulteranno sempre più complicate delle prime.

23. Il sig. Guglielmo Libri, che si distinse assai per le importanti scoperte da lui fatte in questo ramo d'analisi, ha dato nelle sue *Mémoires de Mathématique, et de Physique* un metodo elegantissimo per la risoluzione dell'equazione di primo grado

$$a y + b = c x ;$$

ove a, e c sono numeri primi fra loro. Ivi dimostra, che il più piccolo valore intero, e positivo di y, che le soddisfa, si è

$$(ddd) \qquad \frac{c-1}{2} + \frac{1}{2} \Sigma_{u=1}^{u=c} \frac{\text{sin.} \left(\frac{2b-a}{c}\right) u \pi}{\text{sin.} \frac{a}{c} u \pi} = \frac{c-1}{2} + \frac{\text{sin.} \left(\frac{2b-a}{c}\right) \pi}{2 \,\text{sin.} \frac{a}{c} \pi} +$$

$$+ \frac{\text{sin.}\, 2 \left(\frac{2b-a}{c}\right) \pi}{2 \,\text{sin.} \frac{2a}{c} \pi} + \cdots + \frac{\text{sin.} (c-1) \left(\frac{2b-a}{c}\right) \pi}{2 \,\text{sin.} \frac{a(c-1)}{c} \pi} ;$$

π designando la semicirconferenza d'un circolo qualunque. Secondo il metodo da me esposto (num. 12) si avrà in generale

$$y = b \cdot \frac{c^k - 1}{a} \pm c \omega ;$$

ove k esprime l'esponente, che corrisponde ad a; e però il più piccolo valore intero, e positivo di y sarà il residuo della divisione di $b \cdot \frac{c^k - 1}{a}$ per c. Questo residuo si denomini r; dal di lui confronto colla espressione (ddd) ricaveremo

$$(eee) \qquad \Sigma_{u=1}^{u=c} \frac{\sin. \frac{2b-a}{c} u\pi}{\sin. \frac{a}{c} u\pi} = 2r - c + 1.$$

24. Per mezzo dell'opportuna trasformazione di questa formola potremo giungere ad ottenere i valori di alcuni integrali doppj definiti. Da un teorema di Fourier abbiamo

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \cos. y(u-z) \cdot dz\, dy;$$

$f(u), f(z)$ designando funzioni simili di u, z; e π essendo il conosciuto rapporto della circonferenza al diametro, supposto questo l'unità. Da qui traesi

$$(fff) \qquad f(1) + f(2) + f(3) \cdots + f(c-1) = \Sigma_{u=1}^{u=c} f(u)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, dz\, dy \left(\cos. y(1-z) + \cos. y(2-z) + \cos. y(3-z) + \cdots + \cos. y(c-1-z)\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z) \sin. \left(\frac{c-1}{2}\right) y \cos. \left(\frac{c-2z}{2}\right) y}{\sin. \frac{1}{2} y}\, dz\, dy.$$

Facendo pertanto

$$f(u) = \frac{\sin. \left(\frac{2b-a}{c}\right) u\pi}{\sin. \frac{a}{c} u\pi};$$

ricaveremo

$$\Sigma_{u=1}^{u=c} \frac{\sin. \left(\frac{2b-a}{c}\right) u\pi}{\sin. \frac{a}{c} u\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin. \frac{2b-a}{c} \pi z \sin. \left(\frac{c-1}{2}\right) y \cos. y \left(\frac{c-2z}{2}\right)}{\sin. \frac{a}{c} \pi z \sin. \frac{1}{2} y}\, dz\, dy = 2r - c + 1;$$

e quindi, posto $2y$ in luogo di y,

$$(ggg) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin. \left(\frac{2b-a}{c}\right) \pi z \sin. (c-1) y \cos. y(c-2z)}{\sin. \frac{a}{c} \pi z \sin. y}\, dz\, dy = (2r-c+1)\pi.$$

25. Attualmente osserviamo collo stesso Autore, che è

$$\Sigma_{u=1}^{u=r}\frac{\sin.\left(\frac{2b-a}{c}\right)u\pi}{\sin.\frac{a}{c}u\pi}=\Sigma_{u=1}^{u=r}\frac{\sin.\frac{2bu\pi}{c}\cos.\frac{a}{c}u\pi}{\sin.\frac{a}{c}u\pi}-\Sigma_{u=1}^{u=r}\cos.\frac{2bu\pi}{c}.$$

Ora supposto $\frac{b}{c}$ una frazione, è noto che si ha

$$\cos.\frac{2b\pi}{c}+\cos.\frac{4b\pi}{c}+\cdots+\cos.\frac{2b(c-1)\pi}{c}=\Sigma_{u=1}^{u=r}\cos.\frac{2bu\pi}{c}=-1.$$

Adunque in questo caso dalla *(eee)* otterremo

$$\Sigma_{u=1}^{u=r}\frac{\sin.\frac{2bu\pi}{c}\cos.\frac{a}{c}u\pi}{\sin.\frac{a}{c}u\pi}=2r-c.$$

Da questa formola trasformata per mezzo della *(fff)* si trarrà, dopo avervi cambiato y in $2y$,

$$(hhh)\quad\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin.\frac{2b\pi z}{c}\cos.\frac{a}{c}\pi z\sin.(c-1)y\cos.y(c-2z)}{\sin.\frac{a}{c}\pi z\sin.y}dz\,dy=(2r-c)\pi.$$

Sottraendo la *(ggg)* dalla *(hhh)*, e quindi mettendo $\frac{z+c}{2}$ in luogo di z, si ottiene la relazione

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin.(c-1)y}{\sin.y}\cos.\frac{b\pi z}{c}\cos.yz\,dz\,dy=2\pi(-1)^{b+1}$$

ove b, e c sono, come abbiam detto, numeri interi e positivi, colla condizione, che non sia b divisibile per c.

26. Applichiamo ad un caso particolare la trovata formola *(ggg)*.

Sia $\qquad b=(mc+g)a;\quad g<c;$

si avrà $\qquad b\cdot\frac{c^k-1}{ac}=m(c^k-1)+gc^{k-1}-1+\frac{c-g}{c};$

e però $\qquad r=c-g.$

Adunque con questi dati dalla anzidetta formola ricaveremo

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin.\frac{(2mc+2g-1)a\pi z}{c}\sin.(c-1)y\cos.y(c-2z)}{\sin.\frac{a}{c}\pi z\sin.y}dz\,dy=(c-2g+1)\pi.$$

27. Dalla espressione *(eee)* si ritraggono altresì con facilità i valori di alcuni altri integrali finiti: per esempio se n è un numero qualunque intero, e positivo; s il residuo della divisione di n per c; si avrà

$$(iii) \quad \Sigma_{u=1}^{u=r} \frac{\sin.\left(\frac{2b-a(1+n)}{c}\right)u\pi \cos.\frac{anu\pi}{c}}{\sin.\frac{a}{c}u\pi} = 2r+s+1-c\left(\frac{3\pm1}{2}\right);$$

$$(jjj) \quad \Sigma_{u=1}^{u=r} \frac{\sin.\left(\frac{2b-a(1-n)}{c}\right)u\pi \cos.\frac{anu\pi}{c}}{\sin.\frac{a}{c}u\pi} = 2r-s+1-c\left(\frac{1\mp1}{2}\right);$$

prendendo il segno superiore, od inferiore
per la formola *(iii)*, secondo che $c-r$ sarà, o non sarà minore di $s+1$;
per la *(jjj)*, secondo che r sarà, o non sarà minore di s.

Si ha evidentemente

$$\Sigma_{u=1}^{u=r} \frac{\sin\left(\frac{2b-a}{c}\right)u\pi}{\sin.\frac{a}{c}u\pi} = \Sigma_{u=1}^{u=r} \frac{\sin.\left(\frac{2b-a(1+n)}{c}\right)u\pi \cos.\frac{anu\pi}{c}}{\sin.\frac{a}{c}u\pi}$$

$$+\Sigma_{u=1}^{u=r} \frac{\sin.\frac{anu\pi}{c}\cos.\left(\frac{2b-a(1+n)}{c}\right)u\pi}{\sin.\frac{a}{c}u\pi} = 2r-c+1;$$

e però

$$(kkk) \quad \Sigma_{u=1}^{u=r} \frac{\sin.\left(\frac{2b-a(1+n)}{c}\right)u\pi \cos.\frac{anu\pi}{c}}{\sin.\frac{a}{c}u\pi}$$

$$= 2r-c+1-\Sigma_{u=1}^{u=r} \frac{\sin.\frac{anu\pi}{c}\cos.\left(\frac{2b-a(1+n)}{c}\right)u\pi}{\sin.\frac{a}{c}u\pi}.$$

Per trovare il valore di quest' ultimo integrale potremo tenere la via seguente. Prima di tutto osserviamo, che la funzione posta sotto il segno Σ è identica colla serie

$$\cos.2\left(\frac{b-a}{c}\right)u\pi + \cos.2\left(\frac{b-2a}{c}\right)u\pi + \cdots + \cos.2\left(\frac{b-na}{c}\right)u\pi;$$

il che si può subito vedere riducendo i seni, ed i coseni in quantità esponenziali. Perciò si otterrà

$$(lll) \quad \Sigma_{u=1}^{u=r} \frac{\sin.\frac{anu\pi}{c}\cos.\left(\frac{2b-a(1+n)}{c}\right)u\pi}{\sin.\frac{a}{c}u\pi}$$

$$= \Sigma_{u=1}^{u=r}\cos.2\left(\frac{b-a}{c}\right)u\pi + \Sigma_{u=1}^{u=r}\cos.2\left(\frac{b-2a}{c}\right)u\pi + \cdots + \Sigma_{u=1}^{u=r}\cos.2\left(\frac{b-na}{c}\right)u\pi.$$

Abbiamo poi $\quad \Sigma_{u=1}^{u=c} \cos. \frac{2hu\pi}{c} = \Sigma_{u=1}^{u=c} 1 = c - 1$; $\quad$ se $\frac{h}{c}$ è intero;

$$\Sigma_{u=1}^{u=c} \cos. \frac{2hu\pi}{c} = -1;$$

se $\frac{h}{c}$ è numero fratto; e però il valore della somma degli integrali finiti anzidetti

$$\Sigma_{u=1}^{u=c} \cos. 2\left(\frac{b-a}{c}\right)u\pi, \quad \Sigma_{u=1}^{u=c} \cos. 2\left(\frac{b-2a}{c}\right)u\pi, \text{ ecc.}$$

si troverà agevolmente, quando si sappia, quanti numeri interi sono compresi nella serie

$$(mmm) \qquad \frac{b-a}{c}, \quad \frac{b-2a}{c}, \; \ldots \; \frac{b-na}{c};$$

giacchè anche il numero dei fratti, che si contengono nella stessa, sarà allora noto. Ora è manifesto, che ciò si riduce a sapere quanti sono i valori di y, che soddisfanno all'equazione indeterminata

$$(nnn) \qquad b - ay = cx;$$

nel supposto, che questi non sorpassino il numero n. Ma si ha in particolare (num. 23)

$$y = -r;$$

e perciò generalmente (n.° 12)

$$y = c\omega + c - r;$$

essendo ω un numero intero arbitrario. Adunque se chiamasi ω il più grande multiplo di c, contenuto in n, in modo che sia

$$n = c\omega + s;$$

il numero dei valori di y, non eccedenti n, che soddisfanno alla (nnn), sarà $\omega + 1$, od ω, secondo che $c - r$ sarà, o non sarà minore di $s + 1$. Nel primo caso il numero dei termini frazionarii contenuti nella serie (mmm) sarà

$$c\omega + s - \omega - 1 = \omega(c-1) + s - 1;$$

e però dalla (lll) si trarrà

$$\Sigma_{u=1}^{u=c} \frac{\sin. \frac{anu\pi}{c} \cos. \left(\frac{2b - a(1+n)}{c}\right)u\pi}{\sin. \frac{a}{c} u\pi} = (\omega+1)(c-1) + \big(\omega(c-1) + s - 1\big)(-1) = c - s.$$

Nel secondo caso il numero degli stessi termini fratti sarà

$$c\omega + s - \omega = \omega(c-1) + s;$$

quindi

$$\Sigma_{u=1}^{u=c} \frac{\sin. \frac{anu\pi}{c} \cos. \left(\frac{2b - a(1+n)}{c}\right)u\pi}{\sin. \frac{a}{c} u\pi} = \omega(c-1) + \big(\omega(c-1) + s\big)(-1) = -s.$$

Sostituendo cotesti valori nella (kkk) risulterà la formola (iii). Nello stesso

modo si dimostra anche la (*jjj*). Tutte le formole precedenti d'integrali finiti non sono, che casi particolari di queste.

28. Se si pone $4a$ in luogo di a, e si fa

$$n=s\,;\quad b=(2s+3)a\,;\quad c=2m+1\,;$$

si troverà con facile calcolo pel caso di $s<m+1$

$$r=\frac{4m-2s-1\pm(2m+1)}{4}\,;$$

ove bisogna prendere il segno superiore od inferiore; secondo che $m+s$ sarà numero pari, od impari; per conseguenza dalla (*iii*) avremo

$$\Sigma_{u=1}^{u=2m+1}\frac{\cos.\dfrac{4asu\pi}{2m+1}}{\cos.\dfrac{2au\pi}{2m+1}}=\pm(2m+1)-1\,;$$

prendendo come sopra il segno $+$, od il segno $-$, secondo che $m+s$ sarà pari, od impari. Qui il numero a va soggetto alla sola condizione di essere primo con $2m+1$. Da cotesto caso particolare si passa immediatamente a quello, in cui s sia un numero qualunque, mettendo quest'ultimo sotto la forma

$$j(2m+1)\pm g,$$

supposto g minore di $m+1$; il che è visibilmente sempre possibile.

29. Inoltre se nella (*eee*) si pone $2c$ in luogo di c, e si osserva, che si ha identicamente

$$\Sigma_{u=1}^{u=2c}\frac{\sin.\left(\dfrac{2b-a}{2c}\right)u\pi}{\sin.\dfrac{a}{2c}u\pi}=\Sigma_{u=0}^{u=c}\frac{\sin.\left(\dfrac{2b-a}{2c}\right)(2u+1)\pi}{\sin.\dfrac{a}{2c}(2u+1)\pi}+\Sigma_{u=1}^{u=c}\frac{\sin.\left(\dfrac{2b-a}{c}\right)u\pi}{\sin.\dfrac{a}{c}u\pi}\,;$$

ricaveremo

$$\Sigma_{u=0}^{u=c}\frac{\sin.\left(\dfrac{2b-a}{2c}\right)(2u+1)\pi}{\sin.\dfrac{a}{2c}(2u+1)\pi}=-\Sigma_{u=0}^{u=c}\frac{\cos.\left(\dfrac{2b-a+c}{2c}\right)(2u+1)\pi}{\cos.\dfrac{a-c}{2c}(2u+1)\pi}=2(r'-r)-c\,;$$

ove r' esprime il più piccolo numero positivo, che soddisfa all'equazione

$$ar'+b=2cx'.$$

Sottraendo da questa l'equazione $ar+b=cx$; si ottiene $a(r'-r)=c(2x'-x)$. Per poter soddisfare a quest'ultima è chiaro, che $r'-r$ dovrà esser multiplo di c. Ma r', e r sono positivi, ed il primo minore di $2c$, l'altro minore di c. Adunque $r'-r$ non potrà essere, che *zero*, o c. Nel primo caso sarà r' minore di c; nel secondo sarà maggiore di c, od eguale a c. Per conseguenza avremo

$$2(r'-r)-c=\mp c\,;$$

prendendo il segno $-$, od il segno $+$, secondo che r' sarà, o non sarà minore di c. Tralascio ulteriori ricerche su questo soggetto, non essendo esse adattate a tale mio scritto.

TAVOLA

Contenente gli esponenti minimi, che corrispondono ai numeri naturali dal 2 sino al 200.

N Numero	K Esponente minimo corrisp.te	N Numero	K Esponente minimo corrisp.te	N Numero	K Esponente minimo corrisp.te	N Numero	K Esponente minimo corrisp.te	N Numero	K Esponente minimo corrisp.te	N Numero	K Esponente minimo corrisp.te
2	1	36	6	70	12	104	12	138	22	172	42
3	2	37	36	71	70	105	12	139	138	173	172
4	2	38	18	72	6	106	52	140	12	174	28
5	4	39	12	73	72	107	106	141	46	175	60
6	2	40	4	74	36	108	18	142	70	176	20
7	6	41	40	75	20	109	108	143	60	177	58
8	2	42	6	76	18	110	20	144	12	178	88
9	6	43	42	77	30	111	36	145	28	179	178
10	4	44	10	78	12	112	12	146	72	180	12
11	10	45	12	79	78	113	112	147	42	181	180
12	2	46	22	80	4	114	18	148	36	182	12
13	12	47	46	81	54	115	44	149	148	183	60
14	6	48	4	82	40	116	28	150	20	184	22
15	4	49	42	83	82	117	12	151	150	185	36
16	4	50	20	84	6	118	58	152	18	186	30
17	16	51	16	85	16	119	48	153	48	187	80
18	6	52	12	86	42	120	4	154	30	188	46
19	18	53	52	87	28	121	110	155	60	189	18
20	4	54	18	88	10	122	60	156	12	190	36
21	6	55	20	89	88	123	40	157	156	191	190
22	10	56	6	90	12	124	30	158	78	192	16
23	22	57	18	91	12	125	100	159	52	193	192
24	2	58	28	92	22	126	6	160	8	194	96
25	20	59	58	93	30	127	126	161	66	195	12
26	12	60	4	94	46	128	32	162	54	196	42
27	18	61	60	95	36	129	42	163	162	197	196
28	6	62	30	96	4	130	12	164	40	198	30
29	28	63	6	97	96	131	130	165	20	199	198
30	4	64	16	98	42	132	10	166	82	200	20
31	30	65	12	99	30	133	18	167	166		
32	8	66	10	100	20	134	66	168	6		
33	10	67	66	101	100	135	36	169	156		
34	16	68	16	102	16	136	16	170	16		
35	12	69	22	103	102	137	136	171	18		

PARTE SECONDA

Seguono due Capitoli che continuano la prima Sezione del TRATTATO SUL CALCOLO DEGLI INTEGRALI DEFINITI (*Vedi Fascicolo III, pag.* 273)

CAPO XII.

Dell' uso delle equazioni alle differenze per la determinazione dei valori di alcuni integrali definiti.

94. A mostrare come anche il calcolo delle differenze finite può usarsi con vantaggio per la ricerca dei valori di alcuni integrali definiti, mi occuperò in questo capo quasi unicamente dei celebri teoremi d'Eulero riportati altresì dal Brunacci nel suo Corso di Matematica Sublime (*).

Si pone per abbreviazione

$$(a) \qquad \Delta = 1 - 2a\cos.\phi + a^2$$

dove a è una costante che ha un qualunque valore reale: e si cerca primieramente

$$\int_0^\pi d\phi \cdot \frac{\cos. i\phi}{\Delta}$$

in cui i è un qualsivoglia numero intero positivo.

Conviene osservare che pel caso di $i=0$, l'integrale $\int_0^\pi d\phi \cdot \frac{1}{\Delta}$ si deduce prontamente dalla formola (ι) preparata a quest'oggetto al num. 31. Il confronto dà $a=1+a^2$, $b=-2a$, e quindi

$$(b) \qquad \int_0^\pi d\phi \cdot \frac{1}{\Delta} = \pm \frac{\pi}{1-a^2};$$

il doppio segno corrisponde ai due casi di $a<1$, $a>1$, non avendo riguardo in tal giudizio all' essere quest' a quantità positiva o negativa. Infatti è facile persuadersi dietro un noto teorema di Lagrange (**) che il valore dell' integrale deve sempre essere positivo, non diventando mai $\frac{1}{\Delta}$ infinita per nessun valore di ϕ compreso fra *zero*, π. E che sia così, riflettasi che per diventare infinita la funzione $\frac{1}{\Delta}$ bisognerebbe che fosse $\Delta=0$, ossia che $\cos.\phi$ prendesse un valor tale da verificare l'equazione $\cos.\phi = \pm \frac{1+a^2}{2a}$ (dove ho il doppio segno per esprimere i due casi di a positiva o negativa nella (a)). Ciò non può mai accadere, essendo necessariamente $\cos.\phi$ quantità positiva o negativa non mai maggiore dell'unità, ed essendo $\pm \frac{1+a^2}{2a}$ quantità positiva o negativa sempre

(*) Tom. III, pag. 51 e seg.

(**) *Leçons sur le calcul des fonctions.* Édit. in 8.° pag. 92.

maggiore dell'unità, come si capisce mettendola sotto la forma $\pm\left(1+\frac{(1-a)^2}{2a}\right)$. Di più l'applicazione del ricordato teorema esige che Δ non possa mai diventare una quantità negativa $-p$: ed è appunto così, perchè in quella ipotesi ϕ dovrebbe prendere tal valore da verificare l'equazione $\cos.\phi=\pm\left[1+\frac{(1-a)^2}{2a}+\frac{p}{2a}\right]$ (il doppio segno è per a positiva o negativa come sopra) cosa del pari impossibile.

Anche l'integrale pel caso di $i=1$, cioè $\int_0^\pi d\phi\cdot\frac{\cos.\phi}{\Delta}$ si ha speditamente integrando per ϕ fra *zero*, π i due membri dell'equazione identica

$$1=\frac{1+a^2}{\Delta}-2a\cdot\frac{\cos.\phi}{\Delta}$$

giacchè si ottiene

$$\pi=(1+a^2)\int_0^\pi d\phi\cdot\frac{1}{\Delta}-2a\int_0^\pi d\phi\cdot\frac{\cos.\phi}{\Delta}$$

da cui coll'uso della formola *(b)*

$$(c)\quad \begin{cases} \int_0^\pi d\phi\cdot\frac{\cos.\phi}{\Delta}=\frac{\pi a}{1-a^2} & \text{per } a<1 \\ \int_0^\pi d\phi\cdot\frac{\cos.\phi}{\Delta}=\frac{\pi}{a(a^2-1)} & \text{per } a>1 \end{cases}$$

95. Visti questi due casi particolari, possiamo elevarci subito al generale osservando l'equazione identica

$$\cos.i\phi=(1+a^2)\frac{\cos.i\phi}{\Delta}-2a\cdot\frac{\cos.\phi\cos.i\phi}{\Delta}$$

che facilmente si trasforma nella

$$\cos.i\phi=(1+a^2)\frac{\cos.i\phi}{\Delta}-a\frac{\cos.(i+1)\phi}{\Delta}-a\frac{\cos.(i-1)\phi}{\Delta}.$$

Premessa l'osservazione sul valore dell'integrale $\int_0^\pi d\phi\cdot\cos.i\phi=0$ (come subito si dimostra passando per l'integrale indefinito), si integrino i due membri della precedente equazione per ϕ fra i limiti *zero*, π: indi ponendo

$$(I)\qquad z_i=\int_0^\pi d\phi\cdot\frac{\cos.i\phi}{\Delta}$$

si otterrà l'equazione lineare alle differenze di second'ordine

$$0=(1+a^2)z_i-az_{i+1}-az_{i-1}$$

che può scriversi

$$z_{i+2} - \frac{1+a^2}{a} z_{i+1} + z_i = 0 .$$

Applicando il noto metodo se ne trova l'integrale completo

$$\text{(II)} \qquad z_i = A a^i + B a^{-i}$$

dove A, B sono le due costanti arbitrarie. Le determineremo dietro i due casi particolari discussi nel num. precedente operando a parte per $a<1$, e per $a>1$. Quando $a<1$ abbiamo dalla (b) e dalla prima delle (c) le due equazioni

$$\frac{\pi}{1-a^2} = A + B ; \quad \frac{\pi a}{1-a^2} = Aa + B\frac{1}{a}$$

dalle quali

$$A = \frac{\pi}{1-a^2} ; \quad B = 0 .$$

Quando $a>1$ abbiamo similmente dalla (b) e dalla seconda delle (c)

$$\frac{\pi}{a^2-1} = A + B ; \quad \frac{\pi}{a(a^2-1)} = Aa + B\frac{1}{a}$$

dalle quali

$$A = 0 ; \quad B = \frac{\pi}{a^2-1} .$$

Adunque, richiamate le (I), (II), si conchiude

$$(d) \qquad \begin{aligned} \int_0^\pi d\varphi \cdot \frac{\cos. i\varphi}{\Delta} &= \frac{\pi a^i}{1-a^2} \qquad \text{per } a<1 \\ \int_0^\pi d\varphi \cdot \frac{\cos. i\varphi}{\Delta} &= \frac{\pi a^{-i}}{a^2-1} \qquad \text{per } a>1 . \end{aligned}$$

96. *Scolio.* Il sig. Legendre ha osservato potersi sempre supporre $a<1$, perchè quando $a>1$ facciasi $a=\frac{1}{b}$ e risulterà

$$\int_0^\pi d\varphi \cdot \frac{\cos. i\varphi}{1-2a\cos.\varphi + a^2} = b^2 \int_0^\pi d\varphi \cdot \frac{\cos. i\varphi}{1-2b\cos.\varphi + b^2} ;$$

in questo secondo integrale è $b<1$, epperò il suo valore è trovabile colla prima delle precedenti (d), esso risulta $\frac{\pi b^i}{1-b^2}$, e in conseguenza

$$\int_0^\pi d\varphi \cdot \frac{\cos. i\varphi}{1-2a\cos.\varphi + a^2} = b^2 \cdot \frac{\pi b^i}{1-b^2} .$$

Se ora risostituiscasi per b il suo valore $\frac{1}{a}$ si ha la seconda delle formole (d),

che in tal modo riceve una conferma. L'indicata osservazione avendo luogo anche per l'analisi più generale che ora passiamo a vedere, supporremo in essa sottintesa la condizione di $a<1$.

97. Sia proposto a trovare il valore dell' integrale

$$\int_0^\pi d\phi \cdot \frac{\cos. i\phi}{\Delta^n}$$

essendo n numero intero positivo. Invece di riferire i lunghi calcoli dell'Eulero mostrerò, generalizzando una bella analisi del Legendre (*), come possa sempre aversi il valore dell'integrale $\int_0^\pi d\phi \cdot \frac{A(\phi)}{\Delta^n}$, dove $A(\phi)$ è una funzione nota di ϕ, quando si conosca quello di $\int_0^\pi d\phi \cdot \frac{A(\phi)}{\Delta}$. Sia

$$((1)) \qquad P_n = \int_0^\pi d\phi \cdot \frac{A(\phi)}{\Delta^n},$$

si derivi per a questa equazione di posizione: avremo

$$\left(\frac{dP_n}{da}\right) = -n\int_0^\pi d\phi \cdot \frac{A(\phi)}{\Delta^{n+1}}\left(\frac{d\Delta}{da}\right).$$

Ora dalla (a) $\left(\frac{d\Delta}{da}\right) = -2\cos.\phi + 2a = \frac{\Delta + a^2 - 1}{a}$

talchè la precedente si riduce all'espressione

$$\left(\frac{dP_n}{da}\right) = \frac{n}{a}(1-a^2)P_{n+1} - \frac{n}{a}P_n$$

e può mettersi sotto la forma

$$((2)) \qquad P_{n+1} = \frac{1}{n(1-a^2)a^{n-1}}\left(\frac{d \cdot a^n P_n}{da}\right).$$

Per integrare questa equazione alle differenze miste pongasi

$$((3)) \qquad P_n = \frac{u_n}{\Gamma(n)a^n}$$

essendo u_n una funzione incognita di n e di a. Rammentata la proprietà delle funzioni Γ espressa dalla (c) del num. 52, la ((2)) riducesi

$$((4)) \qquad u_{n+1} = \frac{a^2}{1-a^2}(u_n)'$$

indicando ora e in seguito cogli apici le derivate per a. A questa equazione

(*) *Exercices de Calcul Intégral*. III.[me] P., pag. 575, num. 61.

soddisfà il valore $u_n=\left(\frac{d^n\psi(h)}{dh^n}\right)$, essendo $h=-\frac{1+a^2}{a}$ e ψ simbolo di funzione arbitraria. Sembrerebbe che a motivo di tal funzione arbitraria l'integrale anzidetto fosse il più generale: eppure non lo è, come cogli esempj facilmente si scorge, e in particolare con quello in occasione del quale espongo il presente metodo. Ho creduto di porre quest' avvertenza, perchè non lascio mai all' opportunità di far osservare che molti degli integrali delle equazioni alle differenze parziali che secondo le vecchie teoriche si reputano abbastanza generali, non lo sono realmente.

A trovare il vero integrale dell'equazione ((4)) adopreremo il metodo di continua sostituzione deducendone successivamente u_n, u_{n-1}, u_{n-2}, ecc., e mettendo i valori risultanti gli uni dentro gli altri. È facile vedere uscirne

$$((5)) \qquad u_n=\frac{a^2}{1-a^2}\left(\cdots\left(\frac{a^2}{1-a^2}\left(\frac{a^2}{1-a^2}(u_{n-m})\right)'\right)'\cdots\right)'$$

dove m è un numero qualunque intero minore di n, e le indicate derivazioni per a sono di numero m. Fatta $m=n-1$, si ha

$$u_n=\frac{a^2}{1-a^2}\left(\cdots\left(\frac{a^2}{1-a^2}\left(\frac{a^2}{1-a^2}(u_1)\right)'\right)'\cdots\right)'$$

e quindi per la ((3)), e per la (*d*) del num. 53

$$((6)) \qquad P_n=\frac{1}{\Gamma(n)(1-a^2)a^{n-2}}\left(\cdots\left(\frac{a^2}{1-a^2}\left(\frac{a^2}{1-a^2}(aP_1)\right)'\right)'\cdots\right)'$$

nella quale le derivazioni per a sono di numero $n-1$. Ecco la formola che dà sempre P_n quando è noto P_1.

98. Nel caso nostro particolare di $A(\phi)=\cos.i\phi$, essendo P_1 noto per la prima delle equazioni (*d*), abbiamo (richiamata anche la (*i*) del num. 54)

$$(e) \qquad P_n=\int_0^\pi d\phi\cdot\frac{\cos.i\phi}{\Delta^n}=\frac{\pi}{2\cdot3\cdots(n-1)(1-a^2)a^{n-2}}\left(\cdots\left(\frac{a^2}{1-a^2}\left(\frac{a^2}{1-a^2}\left(\frac{a^{i+1}}{1-a^2}\right)'\right)'\right)'\cdots\right)'.$$

Scriviamo alcuni casi particolari per $n=2$, 3, 4, ecc.

$$P_2=\frac{\pi}{1-a^2}\left(\frac{a^{i+1}}{1-a^2}\right)'$$

$$P_3=\frac{\pi}{2a(1-a^2)}\left(\frac{a^2}{1-a^2}\left(\frac{a^{i+1}}{1-a^2}\right)'\right)'$$

$$P_4=\frac{\pi}{2\cdot3a^2(1-a^2)}\left(\frac{a^2}{1-a^2}\left(\frac{a^2}{1-a^2}\left(\frac{a^{i+1}}{1-a^2}\right)'\right)'\right)'$$

ecc. ecc. ecc.

Eseguendo le derivazioni indicate trovansi precisamente i valori registrati dal Legendre nel luogo citato. Se poi si studia la forma di tali espressioni svilup-

pate si giunge per analogia alla formola generale che dopo Eulero fu ridotta dal Legendre a maggiore semplicità nel seguente modo. Abbiamo

$$(f)\qquad P_n = \frac{\pi a^i}{(1-a^2)^{2n-1}} \cdot \frac{i+1\cdot i+2\cdot i+3\cdots i+n-1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n-1} A_n$$

essendo

$$(g)\qquad A_n = 1 + \frac{n-1}{1}\cdot a^2 \cdot \frac{n-i-1}{i+1} + \frac{n-1\cdot n-2}{1\cdot 2}\cdot a^4 \cdot \frac{n-i-1\cdot n-i-2}{i+1\cdot i+2}$$

$$+ \frac{n-1\cdot n-2\cdot n-3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot a^6 \cdot \frac{n-i-1\cdot n-i-2\cdot n-i-3}{i+1\cdot i+2\cdot i+3} + \text{ecc.}$$

Siccome una dimostrazione per analogia lascia sempre qualche cosa a desiderare, propose il Legendre di verificare *a posteriori* il risultato facendo nella ((2)) la sostituzione del valore di P_n dato dalle (f), (g): e asserì che ogni altro modo di verificazione sarebbe meno facile. In realtà però una tale operazione è ancora assai laboriosa: talchè sembrami miglior partito fare come soggiungo.

Mettasi nella ((2)) il valore di P_n dato dalla (f) e dopo alcune riduzioni risulterà l'equazione

$$(h)\qquad (n+i)A_{n+1} = \left(n+i+(3n-i-2)a^2\right)A_n + a(1-a^2)\left(\frac{dA_n}{da}\right)$$

la quale dovrà essere avverata dal valore (g). Ce ne persuaderemo alla maniera seguente, che avrebbe potuto servire a trovare *a priori* lo stesso valore (g) se fosse stato incognito.

Facciasi

$$(k)\qquad A_n = p_n + q_n a^2 + r_n a^4 + s_n a^6 + t_n a^8 + \text{ecc.}$$

essendo p_n, q_n, r_n, s_n, ecc. altrettante funzioni incognite di n da determinarsi: la sostituzione di tale espressione nella (h) fornisce, mediante il confronto delle eguali potenze di a, le equazioni

$$(i)\qquad \begin{aligned} p_{n+1} &= p_n \\ q_{n+1} &= \frac{n+i+2}{n+i}\, q_n + \frac{3n-i-2}{n+i}\, p_n \\ r_{n+1} &= \frac{n+i+4}{n+i}\, r_n + \frac{3n-i-4}{n+i}\, q_n \\ s_{n+1} &= \frac{n+i+6}{n+i}\, s_n + \frac{3n-i-6}{n+i}\, r_n \\ t_{n+1} &= \frac{n+i+8}{n+i}\, t_n + \frac{3n-i-8}{n+i}\, s_n \\ &\text{ecc.} \qquad \text{ecc.} \qquad \text{ecc.} \end{aligned}$$

le quali procedono con una legge manifesta e sono soddisfatte dai valori di

p_n, q_n, r_n, ecc. quali risultano dal confronto delle (g), (k). Siffatta verificazione, senza essere brevissima, non presenta alcuna complicazione.

Osserviamo la formola (g). La sua legge è elegantissima e affatto palese: essa finisce col termine che ha per fattore a^{2n-2}.

99. Due casi compresi nel generale cui appartengono le formole (f), (g), meritano particolare attenzione.

Il primo è quello di $n=i+1$: per esso il valore di A_n si riduce al primo termine 1: e quindi

$$(j)\qquad \int_0^\pi d\phi \cdot \frac{\cos.i\phi}{(1-2a\cos.\phi+a^2)^{i+1}} = \frac{i+1\cdot i+2\cdots 2i}{1\cdot 2\cdots i}\cdot\frac{\pi a^i}{(1-a^2)^{2i+1}}.$$

Eulero compiacevasi di questa formola a motivo della semplicità del valore, che a prima giunta si sarebbe creduto dover essere molto composto.

Il secondo caso è quello di $i=0$: allora

$$(l)\qquad \int_0^\pi d\phi \cdot \frac{1}{(1-2a\cos.\phi+a^2)^n} = \frac{\pi}{(1-a^2)^{2n-1}}\left\{1+\left(\frac{n-1}{1}\right)^2 a^2 + \left(\frac{n-1\cdot n-2}{1\cdot 2}\right)^2 a^4 + \left(\frac{n-1\cdot n-2\cdot n-3}{1\cdot 2\cdot 3}\right)^2 a^6 + \text{ecc.}\right\}$$

dove i coefficienti delle successive potenze di a^2 sono i quadrati dei coefficienti di un binomio elevato alla potenza $n-1$. Quindi le formole particolari

$$\int_0^\pi d\phi \cdot \frac{1}{(1-2a\cos.\phi+a^2)^2} = \frac{\pi}{(1-a^2)^3}(1+a^2)$$

$$\int_0^\pi d\phi \cdot \frac{1}{(1-2a\cos.\phi+a^2)^3} = \frac{\pi}{(1-a^2)^5}(1+2^2a^2+a^4)$$

$$\int_0^\pi d\phi \cdot \frac{1}{(1-2a\cos.\phi+a^2)^4} = \frac{\pi}{(1-a^2)^7}(1+3^2a^2+3^2a^4+a^6)$$

ecc. ecc. ecc.

100. *Scolio.* Eulero e Legendre si occuparono anche dell'integrale

$$\int_0^\pi d\phi \cdot \Delta^n \cos.i\phi$$

in cui Δ è come nella (a): giunsero ad alcuni teoremi degni di considerazione, ed anche a due formole che legano un tale integrale con quello superiormente trattato. Siccome però nei diversi casi particolari si può facilmente trovarne il valore passando per l'integrazione indefinita, oserei dire che quelle ricerche sono un oggetto piuttosto di curiosità, che di decisa utilità. Quindi le ommetto, rimandando il lettore che ne sia desideroso alle opere originali (*).

(*) Eulero. *Calculi Integralis.* T. IV pag. 199; e l'opera di Legendre nel luogo ultimamente citato.

101. Passiamo a trattare l'integrale $\int_0^\pi dz \cdot \frac{\cos. iz}{1+n\cos. z}$ intorno al quale abbiamo anticipate al num. 41 alcune proposizioni non dimostrate. Quando $n<1$, il suo valore si desume facilmente dalle precedenti formole (d), le quali, posta $-a$ in luogo di a possono scriversi

$$(m)\quad \begin{cases} \int_0^\pi dz \cdot \frac{\cos. iz}{1+\frac{2a}{1+a^2}\cos. z} = (-1)^i \pi \cdot \frac{1+a^2}{1-a^2} \cdot a^i & \text{per } a<1 \\ \int_0^\pi dz \cdot \frac{\cos. iz}{1+\frac{2a}{1+a^2}\cos. z} = (-1)^i \pi \cdot \frac{a^2+1}{a^2-1} \cdot a^{-i} & \text{per } a>1. \end{cases}$$

Infatti l'espressione $\frac{2a}{1+a^2}$ è minore dell'unità, come subito si vede mettendola sotto la forma $1-\frac{(1-a)^2}{1+a^2}$.

Pongasi pertanto $\frac{2a}{1+a^2}=n$; si cavano per a i due valori

$$\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n},\quad \frac{1+\sqrt{1-n^2}}{n}$$

radici di un'equazione di secondo grado. Prendendo il primo risulta $a<1$, e allora bisogna usare la prima delle (m): prendendo il secondo si ha $a>1$, e allora bisogna usare la seconda delle (m). È indifferente l'assumere l'uno o l'altro dei valori di a, perchè, facendo come si è detto, si arriva al medesimo risultato: piglieremo il primo.

La stabilita equazione tra a ed n dà

$$\frac{1+a^2}{1-a^2} = \frac{a}{n-a} = \frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n^2-1+\sqrt{1-n^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-n^2}} \cdot \frac{1-\sqrt{1-n^2}}{1-\sqrt{1-n^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-n^2}}.$$

Quindi per la prima delle (m)

$$(n)\qquad \int_0^\pi dz \cdot \frac{\cos. iz}{1+n\cos. z} = (-1)^i \frac{\pi}{\sqrt{1-n^2}} \left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^i$$

identica colla formola (ε) del num. 41.

102. Il valore dell'integrale $\int_0^\pi dz \cdot \frac{\cos. iz}{1+n\cos. z}$ ove $n>1$ non può essere desunto dalle formole antecedenti, e la sua ricerca abbisogna di un metodo particolare. Ne userò uno affatto simile a quello de' numeri 94, 95, e perciò devo premettere i valori particolari del cercato integrale pei due casi $i=0$,

$i=1$. Quanto al primo dimostrerò nel Capo seguente (num. 114 sul fine) essere

$$(o)\qquad \int_0^\pi dz \cdot \frac{1}{1+n\cos. z}=0$$

dando all' integrale il senso che ivi sarà spiegato. E quanto al secondo, dietro l' equazione identica

$$1=\frac{1}{1+n\cos. z}+n\frac{\cos. z}{1+n\cos. z}$$

integrata ne' suoi due membri per z fra i limiti *zero*, π, si deduce prontamente in conseguenza della (o) l' altra formola

$$(p)\qquad \int_0^\pi dz \cdot \frac{\cos. z}{1+n\cos. z}=\frac{\pi}{n}.$$

Ora dall' equazione identica

$$\cos. iz=\frac{\cos. iz}{1+n\cos. z}+\frac{n}{2}\cdot\frac{\cos.(i+1)z}{1+n\cos. z}+\frac{n}{2}\cdot\frac{\cos.(i-1)z}{1+n\cos. z}$$

integrata nei suoi due membri per z fra i limiti *zero*, π: avendo posto

$$z_i=\int_0^\pi dz \cdot \frac{\cos. iz}{1+n\cos. z},$$

si cava, in somiglianza di quanto si è fatto al num. 95, l' equazione

$$0=z_i+\frac{n}{2}z_{i+1}+\frac{n}{2}z_{i-1}$$

che può scriversi

$$z_{i+2}+\frac{2}{n}z_{i+1}+z_i=0;$$

e della quale l' integrale completo è

$$z_i=A\left(\frac{-1+\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^i+B\left(\frac{-1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^i.$$

Facciasi, come al num. 41,

$$\cos. \theta=\frac{1}{n},\quad \sin. \theta=\frac{1}{n}\sqrt{n^2-1};$$

l' ultimo valore di z_i prende la forma

$$z_i=A(-1)^i(\cos. \theta-\sqrt{-1}\cdot\sin. \theta)^i+B(-1)^i(\cos. \theta+\sqrt{-1}\cdot\sin. \theta)^i$$

ovvero, mediante formola assai nota,

$$z_i=(A+B)(-1)^i\cos. i\theta-(A-B)(-1)^i\sqrt{-1}\cdot\sin. i\theta.$$

Le due costanti A, B si determinano per mezzo dei casi particolari di $i=0$, $i=1$, (formole (o), (p)), e si hanno le equazioni

$$A+B=0;\quad (A-B)\sqrt{-1}\cdot\sin.\theta=\frac{\pi}{n}$$

per cui l' espressione di z_i diventa

$$z_i=-(-1)^i\,\frac{\pi}{n}\cdot\frac{\sin.i\theta}{\sin.\theta}$$

identica colla formola (ζ) del num. 41.

103. La formola (n) presa nel caso di $i=1$ s' integri per n, avremo

$$\int_0^\pi dz\cdot\log.(1+n\cos.z)=\pi\log.(1+\sqrt{1-n^2})+C,$$

facendo $n=0$ si trova che la costante ha il valore $-\pi\log.2$ quindi

$$(q)\qquad \int_0^\pi dz\cdot\log.(1+n\cos.z)=\pi\log.\left(\frac{1+\sqrt{1-n^2}}{2}\right)$$

valore già trovato altrimenti dal sig. Frullani (*).
Nel caso particolare di $n=1$ la (q) ci porge la formola

$$(r)\qquad \int_0^\pi dz\cdot\log.(1+\cos.z)=-\pi\log.2$$

trovata dallo stesso Frullani poco prima del luogo citato in quella sua opera. Avvertasi però che essendovi nella (n) la condizione di $n<1$, la precedente (r) non può ritenersi vera se non riguardata come formola di limite in un senso che verrà spiegato più tardi.

Col medesimo andamento nel caso di n negativa si sarebbe trovato

$$\int_0^\pi dz\cdot\log.(1-\cos.z)=-\pi\log.2.$$

Le due ultime formole ove mettansi per $1+\cos.z$, $1-\cos.z$ le espressioni equivalenti $2\cos.^2\frac{z}{2}$, $2\sin.^2\frac{z}{2}$ somministrano facilmente

$$(s)\qquad \int_0^\pi dz\cdot\log.\cos.\frac{z}{2}=\int_0^\pi dz\cdot\log.\sin.\frac{z}{2}=-\pi\log.2$$

risultati che diede il sig. Cauchy insieme ad altri molti nel T. XVII degli *Annales de Mathématiques par Gergonne*.

104. In questo e nel Capo precedente abbiamo fatto uso di equazioni differenziali o alle differenze le quali (tranne l' unica del n.° 97) erano tutte a coefficienti costanti. Trovo che il sig. Poisson (**) usò in un caso anche equazioni a

(*) Ricerche sopra le serie. Firenze 1816, pag. 17.
(**) *Journal Polyt.* Cah. XVII, pag. 612.

coefficienti variabili: la sua analisi è certamente pregevole: ma siccome i principali integrali definiti determinati con tal mezzo si hanno non difficilmente per altra via, credo possa bastare l'averla qui indicata.

Per prova della mia asserzione facciasi nella precedente (q) $n = -\frac{2a}{1+a^2}$,

avremo $\sqrt{1-n^2}$ eguale a $\frac{1-a^2}{1+a^2}$ ovvero ad $\frac{a^2-1}{1+a^2}$ secondo che $a < 1$, ovvero $a > 1$ perchè, nella citata formola, $\sqrt{1-n^2}$ è sempre quantità positiva: quindi dopo facili riduzioni dedurremo

$$(t)\quad \begin{cases} \int_0^\pi dz \cdot \log.(1 - 2a\cos.z + a^2) = 0 & \text{per } a < 1 \\ \int_0^\pi dz \cdot \log.(1 - 2a\cos.z + a^2) = \pi\log.a^2 & \text{per } a > 1 \end{cases}$$

come trovò il sig. Poisson nel luogo citato.

L'integrazione a parti ci dà

$$\int dz \cdot \log.(1 - 2a\cos.z + a^2) = z\log.(1 - 2a\cos.z + a^2) - 2a\int dz \cdot \frac{z\sin.z}{1 - 2a\cos.z + a^2}.$$

Dalla quale per la prima delle (t)

$$(u)\qquad \int_0^\pi dz \cdot \frac{z\sin.z}{1 - 2a\cos.z + a^2} = \frac{\pi}{a}\log.(1+a).$$

E questa per l'ultima formola generale del num. 97 ne somministra altre molte cioè

$$(x)\quad \begin{cases} \int_0^\pi dz \cdot \frac{z\sin.z}{(1 - 2a\cos.z + a^2)^2} = \frac{\pi}{(1-a^2)(1+a)} \\ \int_0^\pi dz \cdot \frac{z\sin.z}{(1 - 2a\cos.z + a^2)^3} = \frac{\pi a}{(1-a^2)^2(1+a)^2}(2+a+a^2) \\ \text{ecc.} \qquad \text{ecc.} \qquad \text{ecc.} \end{cases}$$

non essendo difficile salire alla formola generale pel denominatore elevato alla potenza n come si è fatto nel caso del num. 98.

105. *Scolio.* È tempo di fare una riflessione. In varii passi dei precedenti capitoli ho io stesso crette alcune difficoltà che ho lasciate senza risposta: e il lettore se ne sarà forse create parecchie altre. Trovo dunque conveniente il non occuparsi unicamente della esposizione dei metodi per la ricerca dei valori degli integrali definiti, ma anche di quelle considerazioni che valgono ad eliminare, se non in tutto almeno in gran parte, le dubbiezze cui soggiacciono alcuni risultati già ottenuti. Questo è il motivo per cui di tratto in tratto mi proposi d'inserire qualche capitolo che ha per iscopo la dilucidazione di certi punti: tale fu il Capo VI. Non è possibile dare tutte in una volta le teoriche per la soluzione delle diverse difficoltà, giacchè bisogna aspettare che siansi

formati i materiali su cui esercitare gli analoghi ragionamenti: e di più si danno discussioni tanto sottili che richieggono un esercizio di mente al quale conviene abituarsi con qualche lentezza. Ora porrò un capitolo di schiarimento in cui ho raccolto quanto basta a togliere molte difficoltà: altre ne rimangono di diverso genere, e il lettore avrà pazienza di attenderne la spiegazione nel seguito in luogo opportuno.

CAPO XIII.

Delle somme d' integrali definiti che spesso conviene sostituire ad integrali definiti presi alla maniera ordinaria.

Entriamo in una materia alquanto difficile e nello stesso tempo degna di seria considerazione a motivo della sua importanza. Geometri valentissimi non sono in essa d'accordo intorno ad alcuni punti: io l'esporrò giovandomi dei lumi di tutti, e soggiungendo, qualunque ne possa essere il merito, la mia maniera di vedere in quest'argomento.

106. La nozione dell'integrale definito, quale è data al num. 1, è chiarissima, e perciò io, appoggiato all'autorità del sig. Poisson (*), non amo cangiarla. Il sig. Cauchy chiama in varii luoghi delle sue opere integrale definito una quantità analitica il cui valore è identico con quello del nostro integrale definito in moltissimi casi, e ne diversifica in alcuni altri, come or ora vedremo. Egli ha avuto gran ragione di fissare l'attenzione dei geometri su quella quantità piuttosto che sull'integrale definito preso alla nostra maniera, perchè il valore di essa è sempre di utilità pratica, laddove il valore dell'integrale definito conduce talvolta a risultati incompatibili colle applicazioni; ma avrebbe forse fatto meglio non adoperando per esprimere siffatta quantità la denominazione d'integrale definito che gli analisti hanno prima di lui da lungo tempo consacrata ad altro uso: diversissima ne è l'idea, epperò sarebbe bene che diversa fosse anche la parola. All'opposto il sig. Poisson ha ragione nel sostenere all'integrale definito l'idea puramente analitica e semplicissima della differenza dei valori estremi dell'integrale indefinito: ma non fu forse egualmente felice nel volerne mantenere l'uso in alcuni casi in cui conviene abbandonarlo per rivolgersi alla quantità analitica indicata dal suo emulo. Spiegare alla meglio che posso queste proposizioni, e conchiudere procurando una conciliazione sarà il lavoro del presente capitolo.

107. Sia un integrale definito $\int_a^b dx \cdot f(x)$, dove per non accumulare difficoltà intenderemo i limiti a, b quantità reali e $b > a$. Siano $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n$

(*) *Journal Polyt.* Cah. XVIII. pag. 319, et suiv.

diversi valori di x intermedj fra a, e b: sia i una quantità arbitraria che deve essere successivamente impicciolita sino a zero.

Richiamato il teorema del num. 9, è facile vedere che ponendo

$$(1)\quad A=\int_a^{a_1-i}dx\cdot f(x)+\int_{a_1+i}^{a_2-i}dx\cdot f(x)+\int_{a_2+i}^{a_3-i}dx\cdot f(x)+----+\int_{a_{n-1}+i}^{a_n-i}dx\cdot f(x)+\int_{a_n+i}^{b}dx\cdot f(x)$$

$$(2)\quad B=\int_{a_1-i}^{a_1+i}dx\cdot f(x)+\int_{a_2-i}^{a_2+i}dx\cdot f(x)+\int_{a_3-i}^{a_3+i}dx\cdot f(x)+----+\int_{a_n-i}^{a_n+i}dx\cdot f(x)$$

si ha

$$(3)\quad \int_a^b dx\cdot f(x)=A+B;$$

e che, generalmente parlando, mentre i continuamente s'impicciolisce la A si accosta al valore della somma

$$(4)\quad C=\int_a^{a_1}dx\cdot f(x)+\int_{a_1}^{a_2}dx\cdot f(x)+\int_{a_2}^{a_3}dx\cdot f(x)+----+\int_{a_{n-1}}^{a_n}dx\cdot f(x)+\int_{a_n}^{b}dx\cdot f(x)$$

e vi diventa eguale per $i=0$: accostandosi la B nello stesso tempo continuamente a zero e prendendone il valore quando si fa parimenti $i=0$. Questa conclusione però ha una eccezione pel caso particolare in cui $a_1, a_2, a_3, --- a_n$ sono valori di x radici dell' equazione

$$(5)\quad \frac{1}{f(x)}=0$$

ed in conseguenza $f(x)$ diventa infinita per ciascuno di essi. In tal caso la (2) non dà più $B=0$ per $i=0$, e quindi non è più permesso conchiudere dalle (1), (3), (4)

$$(6)\quad \int_a^b dx\cdot f(x)=C$$

ma bisogna conchiudere

$$(7)\quad \int_a^b dx\cdot f(x)=\lim. A+\lim. B$$

esprimendo per *lim.* A, *lim.* B le quantità cui sono eguali A, B quando $i=0$.

108. Tutto dunque consiste a provare che un integrale definito

$$\int_{h-i}^{h+i}dx\cdot f(x)$$

può non essere zero per $i=0$ quando h è un tal valore particolare di x, che rende $f(x)$ infinita. A persuadercene converrà premettere una trasformazione ponendo $x=h+iy$ il che dà

$$(8)\quad \int_{h-i}^{h+i}dx\cdot f(x)=i\int_{-1}^{1}dy\cdot f(h+iy).$$

Il secondo membro di questa equazione, quando h ha la proprietà come sopra, può non solo non essere zero per $i=0$, ma avere un valore anche infinito. Piuttosto che con ragionamenti astratti amo mostrare tal verità per via di esempj.

Sia 1.° $f(x)=\frac{1}{x}$, che diventa infinita per $x=0$, la (8) riesce

$$\int_{-i}^{i} dx \cdot \frac{1}{x} = i\int_{-1}^{1} dy \cdot \frac{1}{iy} = \int_{-1}^{1} dy \cdot \frac{1}{y} = -\log.(-1).$$

Sia 2.° $f(x)=\frac{1}{x^2-m^2}$, che risulta infinita per $x=m$, la (8) dà

$$\int_{m-i}^{m+i} dx \cdot \frac{1}{x^2-m^2} = i\int_{-1}^{1} dy \cdot \frac{1}{2miy+i^2y^2} = \frac{1}{2m}\int_{-1}^{1} dy \cdot \frac{1}{y} - \frac{i}{4m}\int_{-1}^{1} dy + \frac{i^2}{8m^3}\int_{-1}^{1} dy \cdot y - \text{ecc.}$$

e quindi per $i=0$, stante l'antecedente, si ha il valore dell'integrale eguale a $-\frac{1}{2m}\log.(-1)$.

Sia 3.° $f(x)=\frac{1}{x^2}$, la quale si fa infinita per $x=0$: abbiamo dalla (8)

$$\int_{-i}^{i} dx \cdot \frac{1}{x^2} = i\int_{-1}^{1} dy \cdot \frac{1}{i^2y^2} = \frac{1}{i}\int_{-1}^{1} dy \cdot \frac{1}{y^2} = -\frac{2}{i}$$

che per $i=0$ prende il valore $-\infty$.

Sia 4.° $f(x)=\frac{1}{1+n\cos.x}$ nella supposizione di $n>1$: essa diventa infinita per $x=\pi-\text{Arc.}\cos.\frac{1}{n}$, e dalla (8) si ottiene

$$\int_{\pi-\text{Arc.}\cos.\frac{1}{n}-i}^{\pi-\text{Arc.}\cos.\frac{1}{n}+i} dx \cdot \frac{1}{1+n\cos.x} = i\int_{-1}^{1} dy \cdot \frac{1}{1+n\cos.\left(\pi-\text{Arc.}\cos.\frac{1}{n}+iy\right)}.$$

La quantità che è nel denominatore si riduce con facili operazioni alla

$$1-\cos.iy-\sqrt{n^2-1}\cdot\sin.iy = -\sqrt{n^2-1}\cdot iy + \frac{i^2y^2}{2} + \text{ecc.}:$$

epperò all'ultimo integrale può darsi l'espressione

$$-\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}\int_{-1}^{1} dy \cdot \frac{1}{y} + R(i)$$

essendo $R(i)$ una quantità che diviene zero per $i=0$. Si conchiude che il proposto integrale ha per $i=0$ il valore $\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}\log.(-1)$.

È manifesto che questi esempj possono moltiplicarsi a piacere.

109. Pensi lo studioso essere cosa degna di tutta considerazione che nel caso del passaggio della $f(x)$ una o più volte per l'infinito corrispondentemente a valori di x compresi fra a, b, i due termini del secondo membro della equazione (7) sussistano entrambi ed abbiano valori indipendenti da i. Il secondo di essi, cioè *lim.B* è la somma d' integrali compresi fra limiti che fra loro differiscono meno d' ogni quantità assegnabile, e ai quali piacque al Cauchy di dare il nome d' *integrali definiti singolari*: questi riescono d'ordinario infiniti, o immaginarii e compongono tutta quella parte, che secondo le prescrizioni dello stesso Autore, deve essere rigettata. Invece il primo termine *lim.A* è una quantità analitica meritevole di fissare in un modo speciale l' attenzione de' geometri per varie ragioni che in seguito verrò sponendo: essa è quella cui il sig. Cauchy dà il nome d' integrale definito. Di qui si vede chiarissimamente come Poisson e Cauchy non debbono andare d' accordo dando uno stesso nome a cose diverse: l' integrale definito secondo Poisson è la somma d'ambi i termini del secondo membro dell'equazione (7), e secondo Cauchy è il solo primo termine. Già dissi che in quanto alla denominazione a me piace seguire il primo de' sullodati geometri; riguardo alla quantità analitica considerata dal secondo, io proporrei a scanso d'ogni equivoco un piccolo cambiamento nella notazione esprimendola colla lettera majuscola S invece che colla $\int$ ordinaria. Sarà dunque

$$(9)\quad S_a^b dx\cdot f(x)=\int_a^{a_1-i}dx\cdot f(x)+\int_{a_1+i}^{a_2-i}dx\cdot f(x)+\cdots+\int_{a_{n-1}+i}^{a_n-i}dx\cdot f(x)+\int_{a_n+i}^{b}dx\cdot f(x)$$

intendendo nel secondo membro *a operazioni eseguite* fatta $i=0$. Questa avvertenza di fare $i=0$ a operazioni eseguite è di utilità in varii casi (ne vedremo alcuno in seguito) nei quali facendo $i=0$ prima delle integrazioni si correrebbe pericolo di sbagliare, a meno di usare una somma oculatezza: ma non toglie che in moltissimi altri casi la $S_a^b dx\cdot f(x)$ possa essere calcolata a dirittura dietro l' equazione

$$(10)\quad S_a^b dx\cdot f(x)=\int_a^{a_1}dx\cdot f(x)+\int_{a_1}^{a_2}dx\cdot f(x)+\cdots+\int_{a_{n-1}}^{a_n}dx\cdot f(x)+\int_{a_n}^{b}dx\cdot f(x)$$

110. *Scolio*. Il sig. Poisson sostiene (luogo sopra citato n.° 36) che quando $f(x)$ diventa infinita per un valore a_1 compreso fra a, b non è più permesso scomporre l'integrale $\int_a^b dx\cdot f(x)$ nella somma $\int_a^{a_1}dx\cdot f(x)+\int_{a_1}^{b}dx\cdot f(x)$. E reca il seguente esempio relativamente all'integrale $\int_0^\infty dx\cdot\frac{1}{1-x^2}$, che chiama z. Se facciasi

$$z=\int_0^1 dx\cdot\frac{1}{1-x^2}+\int_1^\infty dx\cdot\frac{1}{1-x^2};$$

potrassi trasformare il secondo integrale ponendo $x=\frac{1}{t}$: osservando poi che

ai valori $x=1$, $x=\infty$ corrispondono i valori $t=1$, $t=0$, è facile dopo rovesciati i limiti conchiudere

$$z=\int_0^1 dx\cdot\frac{1}{1-x^2}-\int_0^1 dt\cdot\frac{1}{1-t^2}.$$

Siccome non fa differenza l'esservi nel secondo di questi ultimi la lettera t per la x, risulta $z=0$: mentre passando per l'integrazione indefinita, come è facile provare, si trova $z=\frac{1}{2}\log.(-1)$: valore che può prendersi anche col segno negativo per una ragione che vedrassi fra poco: il Poisson infatti vi antepone il segno $-$.

Dopo il detto di sopra non havvi alcuna difficoltà a rendere ragione della surriferita anomalia: il valore di z calcolato alla prima maniera è quello di $S_0^\infty dx\cdot\frac{1}{1-x^2}$ che si desumerebbe dalla precedente (10), ossia è il valore di *lim.* A nel secondo membro della (7). A dare il vero valore dell'integrale definito $\int_0^\infty dx\cdot\frac{1}{1-x^2}$ manca il secondo termine *lim.* B, ossia manca l'integrale singolare $\int_{1-i}^{1+i} dx\cdot\frac{1}{1-x^2}$. Questo col metodo del num. 108 si trova subito $\frac{1}{2}\log.(-1)$; quindi in questo caso il valore dell'integrale definito è tutto nell'integrale singolare.

Il non aversi dal secondo membro della equazione (10) se non una parte del valor vero dell'integrale definito, come si vide anche nel recato esempio, quando $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ sono valori di x per cui $f(x)$ diventa infinita, è quella eccezione che promettemmo al num. 9.

111. Ho fatta tanto più volentieri la precedente osservazione in quanto che per essa viene difesa una bella analisi del Legendre (*) la quale verrebbe a cadere se all'obbjezione del Poisson non si fosse potuto dare una risposta: ecco tale analisi. Trattasi dell'integrale

$$\int_0^\infty dz\cdot\frac{z^{a-1}}{1-z^n}.$$

Qui per $z=1$ la funzione sotto il segno diventa infinita: scompongasi adunque l'integrale in due, e lo spezzamento sia appunto in detto luogo: così verremo in sostanza a calcolare $S_0^\infty dz\cdot\frac{z^{a-1}}{1-z^n}$ per la (10): abbiamo

$$S_0^\infty dz\cdot\frac{z^{a-1}}{1-z^n}=\int_0^1 dz\cdot\frac{z^{a-1}}{1-z^n}+\int_1^\infty dz\cdot\frac{z^{a-1}}{1-z^n}.$$

(*) *Exercices de Calcul Intégral.* Vme P., pag. 164.

Si trasformi l'ultimo integrale ponendo $z=\frac{1}{y}$; ai limiti $z=1$, $z=\infty$ corrisponderanno i limiti $y=1$, $y=0$, e risulterà

$$-\int_1^0 dy\cdot\frac{y^{1-a}}{y^2(1-y^{-n})}=\int_0^1 dy\cdot\frac{y^{n-a-1}}{y^n-1}.$$

Ora rimettasi z per y, e riunendo in un solo i due integrali simili, avremo

$$S_0^\infty dz\cdot\frac{z^{a-1}}{1-z^n}=\int_0^1 dz\cdot\frac{z^{a-1}-z^{n-a-1}}{1-z^n}.$$

Questo si può trovare per la formola (μ) del num. 68. Osservisi che detta formola ponendo $x=z^n$ si trasforma nella seguente

$$\int_0^1 dz\cdot\frac{z^{pn-1}-z^{rn-1}}{1-z^n}=\frac{1}{n}\left(Z'(r)-Z'(p)\right)$$

e però, fatta $p=\frac{a}{n}$, $r=1-\frac{a}{n}$, la precedente diventa

$$S_0^\infty dz\cdot\frac{z^{a-1}}{1-z^n}=\frac{1}{n}\left(Z'\left(1-\frac{a}{n}\right)-Z'\left(\frac{a}{n}\right)\right).$$

Richiamiamo, per la (ϑ) del num. 67 il significato delle funzioni Z e vedremo essere

$$\left(\frac{d\cdot\log.\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)}{da}\right)=Z'\left(\frac{a}{n}\right)\frac{1}{n};\quad\left(\frac{d\cdot\log.\Gamma\left(1-\frac{a}{n}\right)}{da}\right)=-Z'\left(1-\frac{a}{n}\right)\frac{1}{n}$$

talchè il secondo membro dell'ultima equazione può scriversi

$$-\left(\frac{d\cdot\log.\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{a}{n}\right)}{da}\right)$$

e per la (l) del num. 55

$$-\left(\frac{d\cdot\log.\frac{\pi}{\sin.\frac{a\pi}{n}}}{da}\right)=\frac{\pi}{n\tan.\frac{a\pi}{n}};$$

quindi la formola

$$(\alpha)\qquad S_0^\infty dz\cdot\frac{z^{a-1}}{1-z^n}=\frac{\pi}{n\tan.\frac{a\pi}{n}}.$$

La formola (l) di cui abbiamo fatto uso esige che $\frac{a}{n}$ sia minore dell'unità: di qui la condizione che nella precedente formola (α) sia $a<n$, condizione affatto eguale a quella della simile formola (ρ) del num. 91.

L'attuale nel caso di $a=1$, $n=2$, come osserva Legendre nel luogo citato, dà

$$(\beta) \qquad S_0^\infty dz \cdot \frac{1}{1-z^2}=0$$

risultato che consente con quello trovato nel numero precedente: prova manifesta che nella (α) si deve usare la notazione S e non la $\int$ dell'integrale definito preso nel senso ordinario: giacchè come si vide, quest' ultimo ha un valore immaginario.

Lo stesso Autore dà in quel luogo anche il valore dell' integrale

$$\int_0^\infty dz \cdot \frac{A+Bz}{(m^2+z^2)(c^2-z^2)},$$

dove A, B, m, c sono quattro costanti indeterminate. Osservando essere

$$\frac{A+Bz}{(m^2+z^2)(c^2-z^2)}=\frac{A-m^2B}{c^2+m^2}\cdot\frac{1}{m^2+z^2}+\frac{A+c^2B}{c^2+m^2}\cdot\frac{1}{c^2-z^2}$$

è facile conchiuderlo dietro le due formole

$$\int_0^\infty dz \cdot \frac{1}{m^2+z^2}=\frac{\pi}{2m}; \quad S_0^\infty dz \cdot \frac{1}{c^2-z^2}=0$$

la prima delle quali è notissima, e la seconda discende dalla precedente (β) ove mettasi $\frac{z}{c}$ per z: quindi

$$(\gamma) \qquad S_0^\infty dz \cdot \frac{A+Bz}{(m^2+z^2)(c^2-z^2)}=\frac{\pi}{2m}\cdot\frac{A-m^2B}{c^2+m^2}$$

avendo anche qui messa la S in luogo della $\int$ perchè la funzione sotto il segno ha fra i limiti un valore infinito.

112. Il sig. Cauchy propose altresì per calcolare $S_a^b dx \cdot f(x)$ un' analisi più generale della sopra esposta: ecco i suoi insegnamenti rifusi alla nostra maniera. Invece delle somme d' integrali definiti chiamate A, B nelle (1), (2), prendansi le seguenti

$$(11) \quad D=\int_a^{a_1-i\mu_1} dx \cdot f(x)+\int_{a_1+i\nu_1}^{a_2-i\mu_2} dx \cdot f(x)+\cdots+\int_{a_{n-1}+i\nu_{n-1}}^{a_n-i\mu_n} dx \cdot f(x)+\int_{a_n+i\nu_n}^{b} dx \cdot f(x)$$

$$(12) \quad E=\int_{a_1-i\mu_1}^{a_1+i\nu_1} dx \cdot f(x)+\int_{a_2-i\mu_2}^{a_2+i\nu_2} dx \cdot f(x)+\cdots+\int_{a_n-i\mu_n}^{a_n+i\nu_n} dx \cdot f(x)$$

dove riguardo ai limiti estremi a, b, ai valori intermedj di x $a_1, a_2, \ldots a_n$, e alla quantità i che continuamente impicciolisce è tutto come prima: si sono poi introdotte le $2n$ costanti $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n; \nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n$ alle quali può attribuirsi qualunque valore finito.

Qui egualmente che al num. 107 si forma l' equazione

$$(13)\qquad \int_a^b dx \cdot f(x) = D + E$$

colla quale sussiste insieme per $i = 0$ l' altra

$$(14)\qquad \int_a^b dx \cdot f(x) = \lim. D + \lim. E.$$

Or ecco un fatto importante di cui ci persuaderemo cogli esempj. Aspettando nel calcolo delle (11), (12) a fare $i = 0$ ad operazioni finite si trova talvolta che rimangono tutte o alcune delle arbitrarie $\mu_1, \mu_2, \ldots \nu_1, \nu_2$, ecc. Quindi è che *lim.D*, *lim.E* riescono rispettivamente quantità diverse dalle *lim.A*, *lim.B* del citato numero, e ad esse si riducono ponendo tutte le arbitrarie $\mu_1, \mu_2, \ldots \nu_1, \nu_2$, ecc. eguali all' unità. L' integrale $\int_a^b dx \cdot f(x)$ prende così per la (14) un valore apparentemente indeterminato (e fra poco si vedrà perchè dico apparentemente) che si riduce a quello desunto dall' integrazione ordinaria facendo tutte le costanti arbitrarie eguali all' unità. Se poi, come vuole il Cauchy, dei due termini che compongono il secondo membro della (14) prendasi solamente il primo e facciasi

$$(15)\qquad S_a^b\, dx \cdot f(x) = \lim. D$$

un tal valore indeterminato in confronto di quello desunto dall' equazione

$$(16)\qquad S_a^b\, dx \cdot f(x) = \lim. A$$

contiene questo secondo come caso particolare che dallo stesso Cauchy è chiamato suo *valore principale*.

L' altro termine della (14), cioè *lim.E* è la somma di tutti gl' integrali definiti singolari indeterminati: per calcolarlo gioverà la stessa trasformazione usata al num. 108 avendosi invece della (8) l' equazione

$$(17)\qquad \int_{h-i\mu}^{h+i\nu} dx \cdot f(x) = i \int_{-\mu}^{\nu} dy \cdot f(h + iy).$$

Qualche esempio schiarirà ogni cosa.

Sia proposto l' integrale $\int_0^\infty dx \cdot \frac{1}{x^2 - c^2}$ denominato I al num. 86; dove la funzione sottoposta al segno integrale diventa infinita per l'unico valore $x = c$ compreso fra *zero*, ∞. La D nel caso attuale è

$$D = \int_0^{c-i\mu} dx \cdot \frac{1}{x^2 - c^2} + \int_{c+i\nu}^{\infty} dx \cdot \frac{1}{x^2 - c^2}$$

quantità facile a calcolarsi essendo noto l' integrale indefinito

$$(18)\qquad \int dx\cdot\frac{1}{x^2-c^2}=\frac{1}{2c}\log.\left(\frac{c-x}{c+x}\right)$$

si ha così

$$D=\frac{1}{2c}\log.\left(\frac{i\mu}{2c-i\mu}\right)+\frac{1}{2c}\log.(-1)-\frac{1}{2c}\log.\left(\frac{-i\nu}{2c+i\nu}\right)$$

che riducesi

$$D=\frac{1}{2c}\log.\left(\frac{\mu}{\nu}\cdot\frac{2c+i\nu}{2c-i\mu}\right)$$

e quindi per la (15)

$$(19)\qquad S_0^\infty dx\cdot\frac{1}{x^2-c^2}=\frac{1}{2c}\log.\left(\frac{\mu}{\nu}\right)$$

valore indeterminato che diviene zero facendo $\mu=\nu=1$, quale sarebbe risultato dal calcolo della (9).

È poi

$$E=\int_{c-i\mu}^{c+i\nu}dx\cdot\frac{1}{x^2-c^2}$$

e per mezzo della (18) si trova

$$E=\frac{1}{2c}\log.\left(-\frac{\nu}{\mu}\cdot\frac{2c-i\mu}{2c+i\nu}\right)$$

quindi

$$\lim. E=\frac{1}{2c}\log.\left(-\frac{\nu}{\mu}\right).$$

Pertanto l'equazione (14) dà nel nostro caso il valore

$$(20)\qquad \int_0^\infty dx\cdot\frac{1}{x^2-c^2}=\frac{1}{2c}\log.\left(\frac{\mu}{\nu}\right)+\frac{1}{2c}\log.\left(-\frac{\nu}{\mu}\right)$$

che, fatta $\mu=\nu=1$, diventa

$$\int_0^\infty dx\cdot\frac{1}{x^2-c^2}=\frac{1}{2c}\log.(-1)$$

quale sarebbesi avuto dall' integrazione indefinita per mezzo della (18).

Giova grandemente notare, e or ora se ne vedrà la ragione, che il secondo membro della (20) riducesi $\frac{1}{2c}\log.(-1)$ anche senza fare $\mu=\nu=1$, bastando compenetrare i logaritmi.

113. È qui opportuna la seguente riflessione. Non ignorasi che negli integrali indefiniti espressi mediante un logaritmo possono indifferentemente prendersi positive o negative le quantità sotto il segno logaritmico, talchè invece della espressione (18) potevamo assumere

$$(21)\qquad \int dx\cdot\frac{1}{x^2-c^2}=\frac{1}{2c}\log.\left(\frac{x-c}{x+c}\right).$$

Così facendo trovasi per $\int_0^\infty dx \cdot \frac{1}{x^2 - c^2}$ il valore $-\frac{1}{2c}\log.(-1)$ col segno diverso da quello ottenuto nel numero precedente: avviene d'incontrarsi in questa ambiguità di segno in varii casi simili. Il valore invece di $S_0^\infty dx \cdot \frac{1}{x^2 - c^2}$ riesce lo stesso sia che per ottenerlo si adoperi la (18) o la (21): è questa una buona ragione, oltre altre che diremo in seguito, per persuaderci che la quantità analitica proposta da Cauchy è veramente la parte utile dell' integrale definito, e che però conviene prenderla particolarmente di mira.

Si sa poi che Mascheroni (*) avea una teorica sua particolare circa il modo di usare i doppj valori logaritmici degli integrali, cioè di assumerli a vicenda in quella guisa che si richiede a schivare i risultati immaginarii. Così nell'esempio che ci occupa dovendo dare ad x un valore minore di c converrà pigliare per $\int dx \cdot \frac{1}{x^2 - c^2}$ l'espressione (18), giacchè la (21) darebbe valore immaginario, e viceversa per un valore di x maggiore di c converrà usare l'espressione (21) e non la (18). Ammessa una tal regola per calcolare l'integrale definito $\int_0^\infty dx \cdot \frac{1}{x^2 - c^2}$ si trova per risultato finale lo zero, cioè il valor principale di $S_0^\infty dx \cdot \frac{1}{x^2 - c^2}$ calcolato col metodo di Cauchy. Essendo curiosa una tale coincidenza ottenuta dietro viste assai diverse, ho creduto bene notarla.

114. Propongasi per secondo esempio l'integrale $\int_0^\pi dx \cdot \frac{1}{1 + n\cos.x}$ dove $n > 1$, e la funzione sotto al segno integrale riesce infinita (come già si è detto al num. 108) per $x = \pi - \text{Arc.cos.}\frac{1}{n}$. Avremo

$$D = \int_0^{\pi - \text{Arc.cos.}\frac{1}{n} - i\mu} dx \cdot \frac{1}{1 + n\cos.x} + \int_{\pi - \text{Arc.cos.}\frac{1}{n} + i\nu}^{\pi} dx \cdot \frac{1}{1 + n\cos.x}.$$

Con un calcolo simile a quello del num. 31 (esempio 4.°) si trova la formola d'integrale indefinito

$$(22) \qquad \int dx \cdot \frac{1}{1 + n\cos.x} = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} \log.\left(\frac{1 + \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \cdot \tan.\frac{x}{2}}{1 - \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \cdot \tan.\frac{x}{2}}\right)$$

il cui secondo membro può anche scriversi

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} \log.\left(\frac{\sin.x + \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}(1 - \cos.x)}{\sin.x - \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}(1 - \cos.x)}\right).$$

(*) *Adnot. ad Cal. Int. Euleri* P. I. pag. 23.

Con questa, avvertendo essere

$$\cos.\left(\pi - \text{Arc.}\cos.\frac{1}{n} - i\mu\right) = -\frac{1}{n}\cos.i\mu + \frac{1}{n}\sqrt{n^2-1}\cdot\sin.i\mu\,;$$

$$\sin.\left(\pi - \text{Arc.}\cos.\frac{1}{n} - i\mu\right) = \frac{1}{n}\sqrt{n^2-1}\cdot\cos.i\mu + \frac{1}{n}\sin.i\mu\,;$$

dalle quali si hanno subito, fatta avvertenza ai segni, anche le espressioni di $\cos.\left(\pi - \text{Arc.}\cos.\frac{1}{n} + i\nu\right)$, $\sin.\left(\pi - \text{Arc.}\cos.\frac{1}{n} + i\nu\right)$; si ottiene dopo qualche riduzione

$$D = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}\log.\left(\frac{\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} + \frac{n+2}{n}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\cos.i\mu + \frac{2-n}{n}\sin.i\mu}{\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} + \frac{n+2}{n}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\cos.i\nu - \frac{2-n}{n}\sin.i\nu}\cdot\frac{\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} - \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\cos.i\nu + \sin.i\nu}{\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\cos.i\mu - \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} + \sin.i\mu}\right).$$

Facendo ora $i = 0$ per avere *lim.D*, si vede che il primo fattore sotto il logaritmo riducesi all'unità, e il secondo a $\frac{0}{0}$; trovato però di quest'ultimo il vero valore colla regola nota, si ha

$$\lim.D = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}\log.\left(\frac{\nu}{\mu}\right).$$

È poi

$$E = \int_{\pi-\text{Arc.}\cos.\frac{1}{n}-i\mu}^{\pi-\text{Arc.}\cos.\frac{1}{n}+i\nu} dx\cdot\frac{1}{1+n\cos.x}$$

e, dietro un andamento similissimo all'esposto, prima

$$E = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}\log.\left(\frac{\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} + \frac{n+2}{n}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\cos.i\nu - \frac{2-n}{n}\sin.i\nu}{\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} + \frac{n+2}{n}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\cos.i\mu + \frac{2-n}{n}\sin.i\mu}\cdot\frac{\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\cos.i\mu - \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} + \sin.i\mu}{\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\cos.i\nu - \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} - \sin.i\nu}\right)$$

poi

$$\lim.E = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}\log.\left(-\frac{\mu}{\nu}\right);$$

quindi a motivo della (14)

$$\int_0^\pi dx\cdot\frac{1}{1+n\cos.x} = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}\log.\left(\frac{\nu}{\mu}\right) + \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}\log.\left(-\frac{\mu}{\nu}\right)$$

e ponendo $\mu = \nu = 1$, ovvero compenetrando i logaritmi

$$(23)\qquad \int_0^\pi dx\cdot\frac{1}{1+n\cos.x} = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}\log.(-1);$$

il qual valore è quello stesso che si sarebbe ottenuto usando a dirittura l'espressione (22) al modo ordinario.

Richiamata in seguito la (15), si vede essere

$$(24)\qquad S_0^{\pi} dx \cdot \frac{1}{1+n\cos.x} = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}\log.\left(\frac{\nu}{\mu}\right)$$

valore che diventa zero se riducesi al suo principale. Quest'ultimo è il risultato di cui facemmo uso al numero 102 del capitolo precedente, e che potessimo assumerlo invece del precedente (23) è un passo che sarà giustificato qui dopo al numero 123.

115. Meditando sui due esempj ultimamente adotti, mi sono formata opinione che la maggiore generalità introdotta, dietro le dottrine del Cauchy, nel precedente num. 112 e seguenti, non sia necessaria. Le costanti indeterminate sortono dal calcolo e lasciano un risultato pienamente determinato quando si trova colla (14) il valore dell'integrale definito: succede lo stesso anche adoperando la (13) in cui i non è ancora fatta eguale a zero. Per poco che si rifletta, vedesi tutta la convenienza di questo fatto analitico: giacchè essendo noi avvezzi a trovare fisso il valore di un integrale definito, dovea necessariamente urtarci l'idea di un valore indeterminato che dipende dal nostro arbitrio. Resta l'indeterminato nel valore di $S_a^b dx\cdot f(x)$ calcolato colla (15), ma un tal valore si può facilmente ridurre a due parti, l'una determinata quale sarebbe risultata dal calcolo della (16), e l'altra arbitraria che nella (14) è poi elisa mediante una simile cavata dal secondo termine *lim.E.* Io dunque rigetterci volentieri queste parti arbitrarie; il che è lo stesso che dire, non farei uso che dei valori principali di Cauchy. Vedremo più innanzi che tenendo di mira le applicazioni si ha un nuovo argomento in appoggio di questo progetto. Pertanto nello stesso tempo che sono desideroso di ritenere la quantità analitica $S_a^b dx\cdot f(x)$, dichiaro che d'ora in avanti non la calcolerò più che mediante le formole (9), o (10).

116. *Scolio.* Dissi sulla fine del num. 109 che è più sicuro l'uso della (9) facendo $i=0$ ad operazioni eseguite, che quello della (10); alcuni esempj metteranno questa proposizione in chiara luce.

Se propongasi a cercare il valore di $S_{-1}^{1} dx\cdot\frac{1}{x^2}$, adoperando la (9) abbiamo i due termini $\int_{-1}^{-i} dx\cdot\frac{1}{x^2} + \int_{i}^{1} dx\cdot\frac{1}{x^2}$ facilmente calcolabili mediante la formola d'integrale indefinito $\int dx\cdot\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x}$: essi si trovano entrambi eguali alle quantità $\frac{1}{i}-1$, e risultano entrambi infiniti per $i=0$, laonde si conchiude $S_{-1}^{1} dx\cdot\frac{1}{x^2}=\infty$. Usando invece la formola (10) avremo i due termini $\int_{-1}^{0} dx\cdot\frac{1}{x^2} + \int_{0}^{1} dx\cdot\frac{1}{x^2}$, il primo dei quali, non avvertendo che lo zero può prendersi tanto col segno + quanto col —, ci darebbe il valore $-\infty$, che è

falso. Infatti, che realmente esso debba avere lo stesso valore del secondo provasi con facilità trasformandolo col porre $x=-y$, e rovesciando i limiti.

Per un secondo esempio. Sia proposto a calcolarsi $S_0^1 dx \cdot \frac{1}{x-a}$ essendo a un numero minore dell' unità. Abbiamo la formola d' integrale indefinito $\int dx \cdot \frac{1}{x-a} = \log.(x-a)$: epperò servendoci della (9) il binomio

$$\int_0^{a-i} dx \cdot \frac{1}{x-a} + \int_{a+i}^1 dx \cdot \frac{1}{x-a}$$

ci porge il quadrinomio $\log.(-i) - \log.(-a) + \log.(1-a) - \log.(i)$ che si compendia nella quantità reale $\log.\left(\frac{1-a}{a}\right)$. Servendoci invece della (10), il binomio

$$\int_0^a dx \cdot \frac{1}{x-a} + \int_a^1 dx \cdot \frac{1}{x-a}$$

ci presenta l' espressione $\log.(0) - \log.(-a) + \log.(1-a) - \log.(0)$ nella quale è facilissimo credere che il primo e quarto termine si elidano, e che quindi rimanga il valore $\log.\left(\frac{a-1}{a}\right)$ immaginario e falso.

117. Abbiasi una formola conosciuta

$$(25) \qquad S_a^b dx \cdot f(x,c) = \psi(c);$$

si vorrebbe sapere se è permesso, come nel caso dell' integrale definito ordinario, differenziare per riguardo a una costante c, e così dedurre dalla precedente l' altra

$$(26) \qquad S_a^b dx \cdot f'(x,c) = \psi'(c)$$

dove gli apici indicano le derivate per rapporto a c. Rispondo che generalmente sì; perchè sostituendo nella (25) al primo membro il suo valore dato dalla (9) si ha un' equazione

$$(27) \qquad \psi(c) = \int_a^{a_1-i} dx \cdot f(x,c) + \int_{a_1+i}^{a_2-i} dx \cdot f(x,c) + \text{ecc.} \left[\begin{matrix} i=0 \text{ a ope-} \\ \text{razioni finite} \end{matrix}\right]$$

in cui gl' integrali essendo gli ordinarii si può benissimo differenziare per c e dedurne

$$\psi'(c) = \int_a^{a_1-i} dx \cdot f'(x,c) + \int_{a_1+i}^{a_2-i} dx \cdot f'(x,c) + \text{ecc.} \left[\begin{matrix} i=0 \text{ a ope-} \\ \text{razioni finite} \end{matrix}\right].$$

Persuadendoci che il secondo membro di questa è $S_a^b dx \cdot f'(x,c)$, vedremo dimostrata la (26). Ce ne persuaderemo osservando che non può $f'(x,c)$ riuscire infinita se non per valori di x che rendono infinita anche $f(x,c)$. Infatti

abbiamo l'equazione identica (num. 24)

$$f(x, c+\omega)=f(x, c)+\omega f'(x, c+\theta\omega)$$

ove θ ha un valore fra *zero*, 1; quel valore di x che rende infinita $f'(x, c)$ rende pur tale $f'(x, c+\theta\omega)$, quindi per la sussistenza dell'equazione rende infinite anche $f(x, c+\omega)$, $f(x, c)$ le quali non possono esserlo che insieme. La viceversa non ha luogo: può un valore di x rendere infinita $f(x, c)$ e non $f'(x, c)$: ma ciò non disturba la precedente dimostrazione e solo ci fa capire che $S_a^b dx\cdot f'(x, c)$ può avere qualche caso di meno della $S_a^b dx\cdot f(x, c)$ in cui la quantità sotto il segno si faccia infinita per valori di x compresi fra a, b.

Havvi però un caso di eccezione ed è quando uno dei valori a_1, a_2, ecc. per cui $f(x, c)$ diventa infinita è appunto la stessa costante c per cui si differenzia, o una funzione di essa. Si capisce subito che nella (27) entrando la c nei limiti di alcuno degli integrali, non possono questi, quando si deriva per c, essere trattati come gli altri: e che quindi la dimostrazione antecedente non ha più luogo. A persuadercene anche con un esempio richiamisi la formola

$$S_0^1 dx\cdot\frac{1}{x-a}=\log.\left(\frac{1-a}{a}\right)$$

dimostrata nel numero precedente: differenziandola per a ne dedurremo

$$S_0^1 dx\cdot\frac{1}{(x-a)^2}=-\frac{1}{a(1-a)}$$

la quale è falsa, perchè la costante a è quel valore di x che rende infinita la funzione $\frac{1}{x-a}$. Infatti il valore di $S_0^1 dx\cdot\frac{1}{(x-a)^2}$ non è già finito come risulterebbe dalla precedente, ma è infinito come prontamente si vede calcolandolo al modo solito col binomio

$$\int_0^{a-i} dx\cdot\frac{1}{(x-a)^2}+\int_{a+i}^1 dx\cdot\frac{1}{(x-a)^2}$$

e colla formola d'integrale indefinito $\int dx\cdot\frac{1}{(x-a)^2}=-\frac{1}{x-a}$.

La precedente osservazione, presentata però in una maniera diversa, devesi particolarmente al sig. Cauchy (*): è per essa che riceve chiara spiegazione una difficoltà del Legendre riportata dal sig. Lacroix (**).

118. Richiaminsi le formole (ι), ($\varkappa$) del num. 86; sostituendo all'integrale $\int_0^\infty dx\cdot\frac{1}{x^2-c^2}$ il suo valore trovato qui sopra al num. 113, si hanno le se-

(*) *Exercices de mathématiques* T. II, pag. 125.
(**) *Traité du Calcul.* Tom. III, pag. 501.

guenti di Poisson (*)

$$(\delta)\quad \begin{cases} \int_0^\infty dx \cdot \frac{\cos. ax}{x^2 - c^2} = -\frac{\pi}{2c} \sin. ac - \frac{1}{2c} \cos. ac \cdot \log.(-1) \\ \int_0^\infty dx \cdot \frac{x \sin. ax}{x^2 - c^2} = \frac{\pi}{2} \cos. ac - \frac{1}{2} \sin. ac \cdot \log.(-1). \end{cases}$$

Quando invece per quell' integrale si metta il valore *zero*, è lo stesso come scambiarlo colla quantità $S_0^\infty dx \cdot \frac{1}{x^2 - c^2}$. Riflettendo quindi che tutto il calcolo fatto nel citato num. 86 sta egualmente, a motivo della proprietà esposta nel numero precedente, anche per la ricerca dei valori di

$$S_0^\infty dx \cdot \frac{\cos. ax}{x^2 - c^2}; \quad S_0^\infty dx \cdot \frac{x \sin. ax}{x^2 - c^2};$$

giacchè qui non ha luogo il marcato caso di eccezione: abbiamo dalle stesse (x) le formole di Cauchy (**) ridotte ai suoi valori principali

$$(\varepsilon)\quad \begin{cases} S_0^\infty dx \cdot \frac{\cos. ax}{x^2 - c^2} = -\frac{\pi}{2c} \sin. ac \\ S_0^\infty dx \cdot \frac{x \sin. ax}{x^2 - c^2} = \frac{\pi}{2} \cos. ac \end{cases}$$

le quali consentono con quelle date prima di entrambi dal sig. Bidone (***).

119. *Scolio.* E qui parmi doveroso avvertire che il sig. Bidone molto tempo prima delle recenti memorie francesi avea proposto il metodo di calcolare l' integrale definito, nel caso del passaggio della funzione per l' infinito, scomponendo il corso della variabile in due parti separate appunto nel luogo in cui il suo valore rende la funzione infinita (****): il che equivale all' uso della formola (10). Vedemmo essere più sicuro l' uso della (9), e questa è una pregevolissima invenzione del sig. Cauchy: ma intanto sarà sempre vero che l' idea felice di sostituire nel caso contemplato *all' integrale definito una somma d' integrali definiti* si trova raggiunta dal detto italiano geometra. Egli ha anche fatta l' importante osservazione (*****) che mettendo nelle formole *(a)*, *(b)* del num. 72, $c\sqrt{-1}$ in luogo di m, e quindi trasformando gli esponenziali immaginarii dei secondi membri mediante le espressioni equivalenti fatte di seno e coseno, doveasi rigettare la parte immaginaria e ritenere la sola reale: operazione che riproduce le antecedenti formole (ε). Ciò era una specie di

(*) *Journal Polyt.* Cah. XVIII, pag. 329.
(**) *Journal Polyt.* Cah. XIX, pag. 591.
(***) *Mémoire sur diverses intégrales définies*, pag. 80.
(****) *Ibid.* pag. 78.
(*****) *Ibid.* pag. 82.

paradosso ora spiegato coll' osservazione che passando dalle citate formole del num. 72 alle precedenti (ε) si cambia il significato dei primi membri, cambiamento che equivale al depennare le parti immaginarie; ma la sopraggiunta chiarezza in questo argomento non toglie che al sig. Bidone debbasi la lode di avervi penetrato prima d' altri profondamente. Il sig. Legendre fece poi (*) sopra altre formole un' osservazione affatto simile.

120. È ora tempo di mettere in chiara luce un teorema relativo agl'integrali definiti il quale è quello che avvicina le esposte teoriche alle applicazioni, e ci conduce a capire il vantaggio che si ha nel considerare le espressioni $S_a^b dx \cdot f(x)$ piuttosto delle $\int_a^b dx \cdot f(x)$. Stetti lungo tempo in forse di collocare questa esposizione al principio del presente capitolo dove per alcuni riguardi sarebbe stata opportuna: ma ho poi deciso di porla sul fine anche per mostrare che ogni apparente discordanza fra i signori Poisson e Cauchy poteva essere tolta dietro semplici osservazioni d' analisi.

La $f(x)$ è una funzione qualsivoglia della x: a, b sono due valori che deve prendere la variabile x: n è un numero intero che deve essere continuamente ingrandito. Si pone

$$(28)\qquad \omega = \frac{b-a}{n}, \text{ da cui } b = a + n\omega$$

e si forma al modo seguente una somma di termini indicata per $S(\omega)$

$$(29)\qquad \omega f(a) + \omega f(a+\omega) + \omega f(a+2\omega) + \cdots + \omega f\big(a+(n-1)\omega\big) + \omega f(b) = S(\omega).$$

È facile capire che i termini di tal serie, al crescere di n e quindi all' impicciolirsi di ω, aumentano continuamente di numero e diminuiscono di grandezza. L' opposizione di questi due principj permette di supporre che la somma $S(\omega)$, crescendo n e quindi impicciolendosi ω, si accosti continuamente come a limite ad una quantità $L(a, b)$, la quale secondo la conosciuta nozione del limite, non conterrà nè n nè ω, e sarà una funzione di a, b valori estremi della variabile x. Or ecco un teorema d' importanza primaria. *Quando la funzione* f(x) *non diventa infinita per alcun valore di* x *compreso fra i limiti* a, b, *la quantità* L(a, b) *è identica coll' integrale definito* $\int_a^b dx \cdot f(x)$.

La dimostrazione che soggiungo è nella sostanza quella data dal sig. Poisson (**), ma prima farò osservare ch' essa è tutta basata sulla supposizione della equazione identica

$$(30)\qquad F(x+\omega) = F(x) + \omega f(x) + \omega R(x, \omega)$$

(*) *Exercices de Calcul Intégral.* Vme P., pag. 208, num. 75.

(**) *Journal Polyt.* Cab. XVIII, pag. 322.

dove $F(x)$ è la funzione primitiva di $f(x)$, x ha un qualunque valore compreso fra a, b, ed $R(x, \omega)$ è una funzione di x, ω la quale ha la proprietà di dover diminuire continuamente insieme ai piccolissimi valori di ω, e di dovere essere zero per $\omega = 0$. Ritenuta per $f(x)$ la condizione sopra espressa, può vedersi stabilita la verità dell'equazione (30) presso il Lagrange (*) o presso il Bordoni (**); sul qual proposito dirò che esaminando attentamente le dimostrazioni de' citati Autori, se ne scorgono i ragionamenti così strettamente congiunti colle prime nozioni del calcolo differenziale, che a me sembrerebbe più naturale l'assumere a dirittura la precedente (30) a modo di definizione come quella in cui prende origine tutto il meccanismo del suddetto calcolo. Non è qui il luogo di insistere su questo argomento, sì perchè esso è alquanto lontano dal mio oggetto principale, sì perchè non ho voglia di crearmi nuove difficoltà in tempo che ne ho altronde a sufficienza. Ammetto pertanto l'equazione (30) come teorema noto appoggiandomi alle recate citazioni: e quanto all'idea che ho qui accennata, sarei pronto a tornarvi sopra con piacere in altra occasione se mi si chiedesse un suo ulteriore svolgimento. Sussistendo l'equazione (30) per tutti i valori di x da a a b, staranno tutte le seguenti

$$F(a+\omega) = F(a) + \omega f(a) + \omega R(a, \omega)$$

$$F(a+2\omega) = F(a+\omega) + \omega f(a+\omega) + \omega R(a+\omega, \omega)$$

$$F(a+3\omega) = F(a+2\omega) + \omega f(a+2\omega) + \omega R(a+2\omega, \omega)$$

$$F(a+n\omega) = F\big(a+(n-1)\omega\big) + \omega f\big(a+(n-1)\omega\big) + \omega R\big(a+(n-1)\omega, \omega\big);$$

sommandole tutte insieme, richiamando le (28), (29), e ponendo per brevità

$$(31) \qquad T = R(a, \omega) + R(a+\omega, \omega) + \cdots + R\big(a+(n-1)\omega, \omega\big)$$

verremo facilmente alla seguente

$$(32) \qquad F(b) = F(a) + S(\omega) - \omega f(b) + \omega T.$$

La T è la somma di una serie di cui molti termini saranno positivi, ed alcuni potranno essere negativi: chiamo $s(\omega)$ la somma dei primi, e $-\sigma(\omega)$ quella dei secondi, di modo che $T = s(\omega) - \sigma(\omega)$. Sia $R(a+k\omega, \omega)$ quello dei termini positivi che ha il maggior valore (niente ostando che possa anche incontrarsi ripetuto più d'una volta) ed $R(a+h\omega, \omega)$ quello che ha il maggior valore negativo. È evidente che $s(\omega)$ sarà minore di $nR(a+k\omega, \omega)$, talchè posta $s(\omega) = pnR(a+k\omega, \omega)$, sarà necessariamente p numero minore della unità; similmente si potrà fare $\sigma(\omega) = qnR(a+h\omega, \omega)$ essendo parimenti q

(*) *Leçons sur le calcul des fonctions.* Édit. in 4.° pag. 67. Édit. in 8.° pag. 90.
(**) Lezioni di Calcolo Sublime. T. I, pag. 156.

numero minore dell' unità. Quindi

$$T = s(\omega) - \sigma(\omega) = n[p\,R(a+k\omega,\omega) - q\,R(a+h\omega,\omega)]$$

e per la (28)

$$(33)\qquad \omega T = (b-a)[p\,R(a+k\omega,\omega) - q\,R(a+h\omega,\omega)].$$

Così dalla (32) si deduce la

$$(34)\quad S(\omega) = F(b) - F(a) + \omega f(b) - (b-a)[p\,R(a+k\omega,\omega) - q\,R(a+h\omega,\omega)].$$

Immaginiamo ora che la ω diminuisca continuamente fino a zero: potranno cambiare i numeri interi k, h affinchè $R(a+k\omega,\omega)$, $R(a+h\omega,\omega)$ rappresentino sempre il maggior termine positivo e il maggiore negativo della serie (31): cambieranno anche p, q restando però sempre numeri minori dell' unità. Tali cambiamenti non impediscono di conchiudere che, a motivo della proprietà delle funzioni R da principio rammentata, gli ultimi termini nella precedente (34) diminuiranno continuamente e si ridurranno in fine a zero. Dal che risulta che $F(b) - F(a)$ ossia $\int_a^b dx \cdot f(x)$ è veramente il limite $L(a,b)$ a cui la somma $S(\omega)$ continuamente s' avvicina.

In proposito del recato teorema osserveremo: 1.° che qualche termine aggiunto o tolto colla medesima legge in principio o in fine della serie (29) non produce cambiamento circa la quantità $L(a,b)$ limite della somma della serie: 2.° che la dimostrazione precedente sussiste qualunque sia il cambiamento di segno nei valori della $f(x)$ corrispondenti ai successivi valori che prende x: 3.° che si è supposto tacitamente farsi il passaggio della x per valori reali: il passaggio per valori immaginarii esige considerazioni particolari, di cui occorrerà parlare in appresso.

121. Quando la funzione $f(x)$ passa una o più volte per l' infinito mentre la variabile x prende i successivi valori da a a b, il limite $L(a,b)$ della somma $S(\omega)$ non si può più nell' esposta maniera dimostrare eguale all' integrale definito $\int_a^b dx \cdot f(x)$: perchè alcuna delle equazioni dedotte dalla (30) e adoperate nel precedente ragionamento non ha più luogo. Siccome però potrebbe rimaner dubbio che questa eguaglianza, quantunque non si sappia dimostrare, pure sussista: aggiungo che in qualche caso si può provare direttamente che non sussiste. Eccone uno molto simile a quello con cui Lagrange fece pel primo osservare una sì notabile eccezione (*).

Sia $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $a = -1$, $b = 1$, e in conseguenza $\omega = \frac{2}{n}$. La serie (29) è

(*) *Leçons sur le calcul des fonctions.* Édit. in 4.° pag. 69; Édit. in 8.° pag. 93

$$(35) \qquad \omega\left(\frac{1}{-1}\right)^2+\omega\left(\frac{1}{-1+\omega}\right)^2+\omega\left(\frac{1}{-1+2\omega}\right)^2+\cdots+\omega\left(\frac{1}{1-\omega}\right)^2+\omega\left(\frac{1}{1}\right)^2$$

e si vede che non è più applicabile il teorema di cui trattasi, perchè $\frac{1}{x^2}$ diventa infinita pel valore $x=0$ compreso fra -1, $+1$. Qui anche non conoscendo la grandezza del limite $L(-1, 1)$, comprendiamo benissimo ch' esso non può mai essere una quantità negativa, perchè i termini della serie sono necessariamente e sempre tutti positivi. Eppure l' integrale definito $\int_{-1}^{1} dx \cdot \frac{1}{x^2}$ trovasi, passando per l' integrale indefinito, eguale a -2 quantità negativa. È dunque evidente in tal caso che il limite $L(-1, 1)$ è quantità ben diversa dal valore dell' integrale definito dato dal teorema.

122. Or ecco l' importante conclusione: nel caso del passaggio di $f(x)$ una o più volte per l' infinito, non essendo $L(a, b)=\int_a^b dx \cdot f(x)$, è invece

$$(36) \qquad L(a, b)=S_a^b\, dx \cdot f(x).$$

Infatti si richiami la somma

$$(37) \qquad \int_a^{a_1-i} dx \cdot f(x)+\int_{a_1+i}^{a_2-i} dx \cdot f(x)+\cdots+\int_{a_n+i}^{b} dx \cdot f(x)$$

la quale, quando $i=0$ (equaz. (9)) eguaglia $S_a^b\, dx \cdot f(x)$, e si consideri quando i non è ancora zero. Ciascun termine di essa può riguardarsi limite di una serie come la (29) non avendo in essa luogo il caso di eccezione: e la somma di quegli integrali equivalente a una somma di limiti

$$(38) \qquad L_1(a, a_1-i)+L_2(a_1+i, a_2-i)+\cdots+L_{n+1}(a_n+i, b)$$

di cui ciascuno corrisponde ordinatamente alle serie estese fra

$$a, a_1-i; \quad a_1+i, \quad a_2-i; \cdots a_n+i, b.$$

Il limite $L(a, b)$ della serie totale estesa da a a b non eguaglia la somma (38), perchè in questa non sono contemplati i pezzi della serie totale estesi fra

$$a_1-i,\ a_1+i; \quad a_2-i,\ a_2+i; \cdots a_n-i,\ a_n+i;$$

è però evidente che la differenza deve diventare sempre più piccola al diminuire di i, e deve svanire per $i=0$; ma quando $i=0$ la (38) o la (37) eguaglia $S_a^b\, dx \cdot f(x)$, dunque si ha la (36).

Per un esempio: è facile persuadersi che il vero limite $L(-1, 1)$ della precedente (35) è l' infinito positivo, giacchè si capisce subito che i termini verso il mezzo di essa hanno un valore grandissimo: e l' infinito positivo è appunto il valore di $S_{-1}^{1}\, dx \cdot \frac{1}{x^2}$ come trovammo al num. 116.

Avvertasi che nella (36) suppongo $S_a^b dx \cdot f(x)$ calcolata colla (9) e non colla (15): ossia suppongo i valori indeterminati di Cauchy ridotti ai suoi valori principali. Infatti nella somma delle serie, che coi loro termini estremi si serrano continuamente vicino ai termini della serie totale contenenti i valori di x per cui $f(x)$ si fa infinita, io non potrei trovare ragione che mi giustifichi lo stare lontano da una parte più che dall'altra dagli anzidetti valori di x, il che succede quando, per esempio, intorno il valore $x = a_1$ finisco da una parte con $x = a_1 - i\mu_1$, e dall'altra comincio con $x = a_1 + i\nu_1$, essendo μ_1, ν_1 fra loro diverse. L'applicazione alle misure delle quantità concrete, di cui faremo subito parola, persuade anche più efficacemente la non convenienza di valori indeterminati. È questa la riflessione indicata più sopra al num. 115.

123. *Scolio.* Nell'applicazione del calcolo alle misure delle quantità concrete trattasi in sostanza sempre di trovare i limiti di serie come la (29), o di serie che essendo formate diversamente dalla (29) hanno però con essa un egual limite. Il calcolo ordinario degli integrali definiti è quel mezzo che meravigliosamente ci serve in simili ricerche: ma nei casi di eccezione sopra marcati non ci risponde più, ed anzi co' suoi risultati diretti non è atto che a traviarci. Bisogna allora ricorrere al calcolo delle espressioni $S_a^b dx \cdot f(x)$, che si fa ancora mediante formole d'integrali definiti. Quindi è che Cauchy proponendoci l'uso delle espressioni $S_a^b dx \cdot f(x)$ invece delle $\int_a^b dx \cdot f(x)$, ci propone un calcolo il quale in tutta la parte utile si sovrappone, per così dire, al calcolo integrale ordinario: ma dove questo co'suoi risultati diretti si distacca dalle applicazioni, e si perde in un astratto insignificante ed anche nell'immaginario, esso invece seguita a tenersi vicino alla natura e a soddisfare a' nostri bisogni. Ed ecco la maggior ragione per deciderci a suo favore: giacchè il Geometra, che più di tutti ai nostri giorni ingrandì l'analisi, applicava le nuove sue formole di mano in mano che le inventava, ed ebbe a dire (*): « questa è la condizione « principale che abbiamo avuta sempre di mira, e senza la quale i risultati « del calcolo ci sembrerebbero trasformazioni inutili. »

(*) *Théorie de la Chaleur*, pag. 580.

(la continuazione nel tomo seguente)

SULLE RIPULSIONI ELETTRICHE NELL'ARIA RAREFATTA

NOTA

DI GIUSEPPE BELLI

Ammettono molti Fisici che un elettrometro, per esempio di quelli a pagliette, a cui sia stata comunicata dell'elettricità o positiva o negativa, e il quale perciò mostri una divergenza in queste pagliette o in generale ne' due corpicelli che col loro allontanamento servono a indicare la tensione elettrica, se venga posto sotto il recipiente della macchina pneumatica, soffre una diminuzione nella divergenza medesima al venire levata l'aria, e torna a mostrare la divergenza primiera quando l'aria viene di nuovo a rientrare (1). E da ciò questi Fisici traggono la conseguenza che nella vicendevole ripulsione di due corpi similmente elettrizzati abbia necessariamente una grande influenza l'aria in mezzo a cui si trovano, di maniera che, a pari quantità di elettrico in essi corpi eccedente o deficiente, debba siffatta ripulsione essere più grande o più piccola secondo che è maggiore o minore la densità dell'aria medesima.

Ho sempre ammesso anch'io che quando l'aria che sta intorno ai corpi elettrizzati non si trovi allo stato naturale, ma sia anch'essa elettrizzata o in più o in meno, ella influisca realmente assai in questo genere di fenomeni. Ma che ciò avvenga anche quando essa aria è allo stato naturale ho avuto del dubbio; e ho stimato che in questo caso voglia la cosa esser diligentemente verificata.

La maniera più semplice che io abbia trovata per decidere un siffatto dubbio fu la seguente. Presi un elettrometro a pagliette, e senza punto elettrizzarlo il posi sul piatto della macchina pneumatica, con sopra una campana di cristallo attraverso al cui fondo superiore di ottone passava a tenuta d'aria una bacchetta pur di ottone che io feci discendere fino a toccare il cappello dell'elettrometro stesso. Il fondo di questo era in comunicazione metallica colla vite forata di ottone che suol sorgere dal centro del piatto delle macchine pneumatiche. La campana era invernieiata per una buona parte del collo con vernice copal sì dentro che fuori, era bene asciugata esternamente, e internamente racchiudeva, oltre all'elettrometro, un vasetto di piombo contenente acido solforico concentrato onde togliere l'umidità. Il cappello dell'elettrometro non era a tenuta d'aria, di modo che facendosi il voto nella campana veniva tolta l'aria anche dall'interno dell'elettrometro medesimo.

Fatto il voto e lasciato passare qualche tempo onde l'acido solforico potesse operare, toccai la estremità esteriore della bacchetta metallica mediante uno de' poli di una pila a secco gentilmente donatami dal chiarissimo prof. Zamboni; e immediatamente le pagliette si allontanarono e si mantennero a 13 gradi. Lasciai entrare tutta l'aria, e presso a poco si conservarono questi medesimi gradi, e posto ancora a contatto lo stesso polo della pila, continuarono ad aversi precisamente gli stessissimi 13 gradi. Provai la cosa in altri modi, ora toccando col polo positivo della pila ed ora col negativo, ora usando d'un voto corrispondente a tre linee di mercurio, ed ora d'un voto di cinque linee o più; ed ebbi sempre lo stesso risultamento, cioè ad uguale attività della pila ottenni sempre la stessissima divergenza ai nell'aria rarefatta che nella densa.

(1) Vedi fra gli altri la Fisica del Gerbi, Tom. III, pag. 287, Pisa 1823.

Se alcuno vorrà ripetere una tale sperienza, che io reputo di qualche importanza nella scienza dell'elettricità, affinchè essa gli riesca dovrà avere le seguenti avvertenze:

1.ª Che le pareti della campana e dell'elettrometro sieno in ottima condizione isolante, onde l'elettricità comunicata non abbia a scorrere lungo queste pareti e nemmeno a distribuirsi e fermarsi su di esse per la tendenza che ha in generale l'elettricità a portarsi alle superficie dei corpi; nel qual caso verrebbe a diminuire la porzione d'elettricità che rimarrebbe alle pagliette, e queste mostrerebbero una divergenza minore di quella dovuta all'attività della pila.

2.ª Che l'interno spazio tanto della campana quanto dell'elettrometro sia ben privato di vapore acqueo. A ciò serve ottimamente l'acido solforico concentrato; senza del quale assai facilmente dopo aver fatto il voto potrebbe rimanere dentro la campana un residuo di vapore acqueo, il quale renderebbe più conduttrice l'aria finchè fosse rarefatta, e quindi condensandosi nel rientrar dell'aria esterna, umida per lo più anch'essa per vapore o portato seco dal di fuori o preso nel passare dalla canna della macchina pneumatica, si potrebbe deporre sulle pareti in un velo umido; il che tutto sarebbe nocevolissimo al buon esito della sperienza.

3.ª Che la tensione elettrica sia debole; altrimenti l'elettricità delle pagliette potrebbe dissiparsi attraverso all'aria contenuta nell'interno dell'elettrometro, specialmente quando ella è rara, e portarsi sulle pareti di questo strumento, ovvero anche fissarsi nell'aria medesima, cosa che altererebbe il risultamento. Per una densità dell'aria corrispondente alla pressione di cinque linee di mercurio serve assai bene una tensione di 10 a 15 gradi d'un ordinario elettrometro a pagliette sottili. In generale quanto più perfetto è il voto, tanto più debole debb'essere la tensione dell'elettricità che si vuol comunicare, dovendo sempre questa tensione essere al di sotto di quel limite a cui l'elettricità può cominciare a sfuggire dalle pagliette.

In quanto alla pila a secco, quantunque ella sia ottima per questo genere di prove, pure chi non l'abbia può supplirvi con una bottiglia di Leida che conservi bene l'elettricità e che sia debolmente carica.

Dall'esposto risultamento io ne conchiudo che quando l'aria che sta intorno a due corpi similmente elettrizzati non ha che la sua quantità naturale d'elettrico, la ripulsione vicendevole di essi due corpi non dipende dalla densità di quest'aria, ma soltanto dalla più o meno grande quantità d'elettrico in essi corpi sovrabbondante o deficiente. Per conseguenza, tornando alla sperienza primitivamente esposta, quantunque io conceda che la divergenza mostrata da un elettrometro posto sotto il recipiente della macchina pneumatica, vada diminuendo col rarefare l'aria entro di questo, io attribuisco però il fatto a una diminuzione della quantità d'elettrico eccedente o deficiente nelle due pagliette o in genere ne' due corpicciuoli repellentisi, diminuzione favorita e dalla lunga durata dell'operazione del fare il voto e dal rendersi l'aria tanto più conduttrice quanto più ella diviene rara, e in molti casi altresì da qualche umidità che rimanga o aderente alle pareti o diffusa nell'aria rarefatta. In quanto poi all'aumentarsi di nuovo la divergenza de' due corpicelli col lasciare rientrar l'aria, e senza che nuovo elettrico venga ad essi o dato o tolto, a me non è riuscito di osservarlo, nè io il credo possibile quando l'aria entri allo stato naturale, e tale sia anche l'aria rarefatta che vi esisteva precedentemente.

FINE DEL TOMO PRIMO.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO PRIMO
DEGLI OPUSCOLI MATEMATICI E FISICI

PARTE PRIMA

PARTE SECONDA

Trattato sul calcolo degli integrali definiti (PIOLA)

SEZIONE PRIMA

Sopra la ricerca dei valori degli integrali definiti e sopra alcuni loro usi.

NB. Il Trattato deve essere continuato

pag.	*lin.*	ERRORI O INDICAZIONI	CORREZIONI O CAMBIAMENTI
33	12	$r = 2\sqrt{p^2 + r^2} \cdot \frac{u}{1-u^2}$	$r = 2\sqrt{p^2 + h^2} \cdot \frac{u}{1-u^2}$
93	18	chiamò inammissibile	mostrò dedursi da un metodo da lui dichiarato inammissibile
235	8	$\left(\frac{dx}{dK}\right)$	$\left(\frac{dK}{dx}\right)$
269	3		*In tutto il numero* 11 *invece di* k *leggasi* k_1, *e* k *invece di* k_1
277	8		*Si aggiunga,* le quali potevano più prontamente dedursi dalle (*d*), (*e*), (*f*).
286	10	$x = \frac{a}{y}$	*È meglio per togliere ogni equivoco cambiare questa* y *in un'altra lettera* z.
292	14	$\Gamma\left(\frac{n}{m} + \right)$	$\Gamma\left(\frac{n}{m} + 1\right)$